結 (3)

Louis H. Kauffman 著 · 謝春忠 譯

第六節: 維氏不變量 (Vassiliev Invariants)

我們已經看到線圖中其他部分不動, 僅在某一個固定處考慮此處爲正跨越 (crossing) 及爲負跨越時二線圖不變量的差, 這是討論不變量時一個基本的考慮模式。最早的例子是 Conway 多項式 [1] $C_K(z)$, 其交換恆等式爲

$$C_{K_+} - C_{K_-} = zC_{K_0}.$$

俄國數學家 V. A. Vassiliev 考量所有自圓 S^1 到三度空間 $\mathbf{R}^3$ 的映射所成空間的結構而賦與這類恆等式全新的意義。這個空間包含了具有奇異點 (singularity) 的映射, 也就是有二 (線) 相交點的曲線, (即 $f: S^1 \to \mathbf{R}^3$, $\exists\, x \neq y$, $f(x) = f(y)$) 他解釋下述方程

$$Z_{K+} - Z_{K-} = Z_{K_\#}.$$

爲描述經過奇異嵌入 $K_\#$ 的不變量的變化。見圖三十四, $K_\#$ 爲具有横越奇點 (transverse singularity) 的結 (所謂横越奇點, 是指曲線沿二個方向在這點相交)。

K_+ K_- $K_\#$

$$V_{K_+} - V_{K_+} = V_{K_\#}$$

圖三十四. 差分方程式

這個式子可用來定義奇異嵌入 (singular embedding) 的不變量, 並且可用來將已知結的不變量的定義, 推廣及於空間中具有可控制數量的横越奇點的嵌入圖 形。這種想法在維氏 (Vassiliev) 之前已有人想過, 維氏利用代數拓樸來分析具奇異點的結 (singular knot) 所成的空間, 稱結空間 (Knot Space), 在此過程中, 他發現一個過去研究圖不變量時忽略的關鍵概念 — 有限型不變量 (invariant of finite type)。

定義: 我們叫 Z_G 是 i-有限型 (圖) 不變量, 如果對任一具有至少 $(i+1)$ 個二相交點的圖 G, 恆有 $Z_G = 0$。

這個觀念是 J. Birman 和 X. S. Lin[2]自 Vassiliev的工作中導出的。一個結圖 (knotted graph) 的 (剛性頂點同倫) 不變量被稱爲 i-有限型維氏不變量

(Vassiliev invariant of finite type i) 如果它滿足恆等式

$$Z_{K+} - Z_{K-} = Z_{K_{\#}}$$

而且, 是 i-有限型。

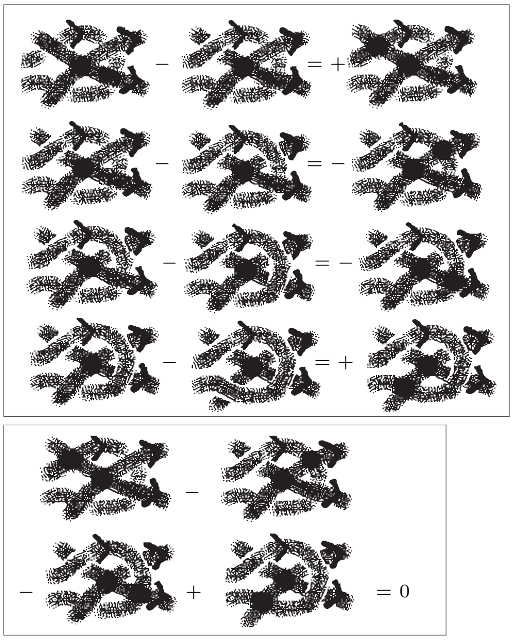
所謂剛性頂點同倫 (rigid vertex isotopy) 是指此同倫須保留頂點的循環次序 (cyclic order) (即指每一個二相交點 (double point) 都有一個在平面上的剛性圓盤鄰域, 此同倫須保存這一鄰域)。維氏不變量總體形成一類非常特出的結不變量。「維氏不變量是否足以分辨拓樸結構不同的結?」仍是待解的問題。

Vassiliev 由分析此不變量的圖計值 (函數) 的組合條件著手, 他的重要觀察是下面的引理:

引理: 如果 Z_G 是 i-有限型的維氏不變量, 則當 G 有 i 個頂點時, Z_G 不因圖形 G 的不同空間嵌入而改變其值。

證明: 假設 G_+ 是具有 i 個二相交點 (node) 的空間嵌入圖。如果我們將 G_+ 中某一正跨越改爲負跨越, 則維氏交換關係告訴我們 $Z_{G_+} - Z_{G_-} = Z_{G_{\#}}$, $G_{\#}$ 比 G_+, G_- 多一個二相交點, 即 $G_{\#}$ 有 $i+1$ 個二相交點, 因之 $Z_{G_{\#}} = 0$, 所以 $Z_{G_+} = Z_{G_-}$ 這表示我們可以將 G 的任何空間嵌入圖中的跨越正負顚倒而不改變 Z_G 的值。由此可知 Z_G 不因空間嵌入的不同而改變。它的值只取決於圖 G。證畢。

對於 i- 有限型的維氏不變量, 它在恰好有 i 個二相交點的圖形上的值具有重要的訊息。這些值不因圖形的空間嵌入而變, 但是並不是所有具有這個性質的圖形計值都可衍伸爲結或圖的不變量, 必須有一些必要條件。Vassiliev 通過對結空間 (Knot space) 的分析找到這些條件的一種形式, 而 Joan Birman 的學生, 數學家 Ted Stanford [3] 研究這些條件與交換恆等式的關係而發現了很漂亮的拓樸意義。他的論述如下: 考慮一個有一弧通過其底部的相交二線 (即一奇異跨越) 如圖三十五

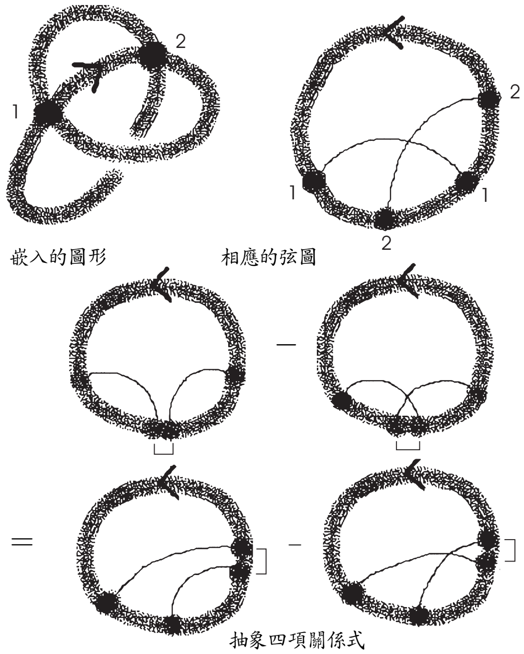


圖三十五. 嵌入的四項關係式

經過四次顚倒正、負跨越 (crossing) 可將這個弧置於原先的相交二線之上, 而如此得到的圖形與原先開始的圖形拓樸等價。每一次顚倒正負跨越, 就給出一個方程, 共是四個方程。把它們加起來就得到四個圖形上不變量的恆等式, 稱爲四項關係式 (Four term relation)。這恆等式表示在圖三十五的第二個方框中。

現在我們回顧前面的引理。Vassiliev i 有限型不變量, 在有 i 個二相交點的圖形上, 其值不因空間嵌入而改變。(我們稱 Vassiliev i 有限型不變量作用在 i 個二相交點的圖形爲高階 (top level)。) (此引理與四項關係式二者同樣利用 Vassiliev 恆等式證出。) 這表示四項關係式在高階時可用來做爲抽象圖的關係式, 在高階時四項關係式純粹是與拓樸有關的組合關係。

我們如何看待相應於空間中有自相交的結的抽象圖形? 一個抽象的結就是一個圓圈, 而一個抽象有奇異點的結就是一個圓圈上並加註幾對點, 在嵌入空間時, 每一對點成爲一自相交點 (或稱二相交點)。我們將每對點以弧線聯結稱做弦 (chord), 而如此得到的圖形叫做弦圖 (chord diagram)。如圖三十六的上圖所示。



圖三十六. 以弦圖表示的抽象四項關係式

在高階時的四項關係式 (圖三十五) 以弦圖的語言翻譯出來就是圖三十六的下圖表示的方程。圖三十六中以外括號] 連結的部份表示這個區間沒有其他的弦, 括號之外則可有任何形狀的弦, 但方程中四個圖僅只在圖中所畫出的弦及括號部分有所不同。

如果你能寫下弦圖在高階的計値函數而且滿足四項關係式, 則這個函數將是形成一個維氏不變量的素材。這樣的函數稱爲相應的維氏不變量的權系 (weight system), M. Kontsevich 與 D. Bar-Natan [4] 的定理保證每一權系至少可構成一個滿足高階計値的不變量。這世界充滿了維氏不變量, Birman 和 Lin [2] 直接證明鍾氏多項式 (Jones polynomials) 和它的推廣都是維氏不變量。下面是對鍾氏多項式的情形的簡易證明。

定理: 令 $V_G(t)$ 表示推廣到具自相交結的鍾氏多項式 (其定義是利用 $V_{K_+} - V_{K_-} = V_{K_\#}$, K_+, K_-, $K_\#$ 定義如前)。令 $v_i(G)$ 表示 $V_G(e^x)$ 展開後 x^i 的係數, 則 $v_i(G)$ 是 i- 有限型的維氏不變量。

證明: 利用第五節末的公式

$$\begin{aligned}
V_{K_+} &= -t^{1/2} V_{K_0} - t V_{K_\&} \\
V_{K_-} &= -t^{-1/2} V_{K_0} - t^{-1} V_{K_\&}.
\end{aligned}$$

以 $t = e^x$ 代入, 立刻可得 x 整除 $V_{K_\#} = V_{K_+} - V_{K_-}$。所以, 若 G 有 i 個二相交點則 V_G 可被 x^i 整除, 也就是說, 若 G 至少有 $i+1$ 個二相交點則 $v_i(G) = 0$, 故爲 i-有限型。證畢。

由這個定理可知, 我們可以由探討已知的結與鏈結的不變量的結構著手來研究維氏不變量。尤其可以藉著已知的不變量來導出許多權系的的結構。不過本文不擬探討這個題目。下節我們將介紹李代數 (Lie algebra) 與建構維氏不變量之間的關係, 這是結與代數的緊密天地的一個開端。

第七節: 維氏不變量與李代數

李代數是以代數方法探討自然科學的學科, 它和結、鏈結的拓樸有顯著而密不可分的關聯。本節首先簡短的介紹李代數的概念, 再指出前節所描述的李代數與結、鏈結的維氏不變量結構間深奧的關係。

爲了解李代數 (Lie algebra) 背後的想法, 我們先從群 (group) 的概念說起。

定義: 一個集合G, 我們稱作群 (group), 假如其上有一二元運算$*$, 滿足

1. 給定 G 中之元素 a, b 則 $a * b$ 亦在 G 中。
2. 給定 G 中之元素 a, b, 及 c, 我們恆有 $a*(b*c) = (a*b)*c$。
3. 在 G 中恆有元素 e 使得: 對 G 中任何元素 a, 我們都有 $a*e = e*a = a$。
4. 給定 G 中的元素 a, 我們恆有另一元素 a^{-1} 使得 $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$。

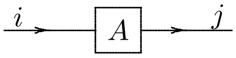
在諸多群中, 一個具有豐富資訊及性質的群就是矩陣群 (matrix group)。

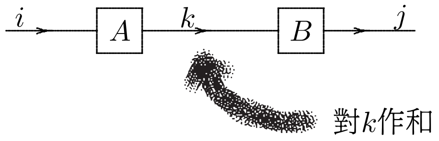
我們說 A 是一個 $n \times n$ 的矩陣, 指的是 $A = (A_{ij})$, 其中 $i, j = 1, 2, \ldots, n$, 且 A_{ij} 可爲實數或複數。我們可以定義二個矩陣的乘法如下:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

如此, 很容易檢驗出: 所有 $n \times n$ 的矩陣構成一個矩陣代數—即有結合律、分配律、零元及么元。對我們而言, 將矩陣乘法以圖形表示是很關鍵的。

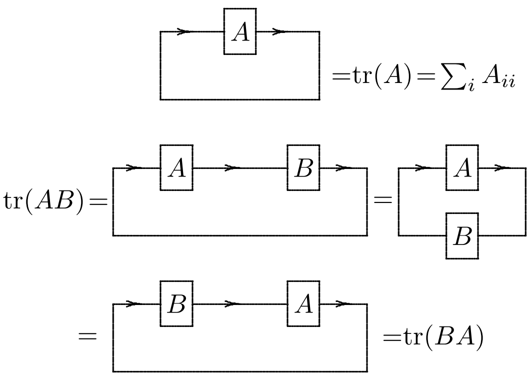
如圖三十七, 每一矩陣用一帶有一進一出方向的方格表示, 進的方向表示 (A_{ij}) 的 i 足標, 出的方向表示 (A_{ij}) 的 j 足標, 而矩陣 A、B 乘法表示連結 A 的出的方向與 B 的進的方向, 如圖三十七所示, 我們採取愛因斯坦共識 (Einstein's notation), 若 B 進的方向與 A 出的方向相同, 表示我們把此二足標等同後並作和。





圖三十七. 矩陣乘積之圖示化

很多矩陣的運算與代數, 用了此種圖示化後, 變得顯明多了。例如, 我們算 $\mathrm{trace}(A) = \sum A_{ii}$ 時, 即連結 (A_{ii}) 的進的方向與出的方向, 同理很容易看出 $\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$, 如圖三十八所示。



圖三十八.

我們再回到矩陣代數。

給定一自然數 n, 我們用 $M_n(\mathbb{R})$ 來表示全部實係數 $n \times n$ 矩陣所成的集合。我們用 $A * B$ 來代表 A、B 矩陣的乘積, 用 E 表示么元矩陣:

$$E_{ii} = 1, E_{ij} = 0, \forall i, \text{ 若 } i \neq j.$$

如此定義之下, $M_n(\mathbb{R})$ 滿足上述群的定義的前三個條件, 不過, 存在矩陣 A, 而 A 沒有反元素 A^{-1} (即 $AA^{-1} = E$), 如零矩陣就沒有反元素, 所以 $M_n(\mathbb{R})$ 不是一個群。

但是, 我們有一個反元素存在的準則—即 $M_n(\mathbb{R})$ 中元素 A 有反元素, 若且唯若行列式 $det(A) \neq 0$。所以在 $M_n(\mathbb{R})$ 中, 我們可找到最大的群, 就是 $M_n(\mathbb{R})$ 中行列式不為零所成的集合, 記為 $GL_n(\mathbb{R})$。$GL_n(\mathbb{R})$ 有很多有意思的子群 (subgroup)。例如 $SL_n(\mathbb{R})$, 它包括所有行列式為一的矩陣。又如 $O(n)$, 它包含所有矩陣 A, 使得 $A^{-1} = A^t$, 其中 A^t 表示 A 的轉置矩陣 $(A^t)_{ij} = A_{ji}$。讀者, 可試證 $SL_n(\mathbb{R})$, $O(n)$ 及 $SO(n) = SL_n(\mathbb{R}) \cap O(n)$ 皆是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的子群。

詳言之, 當 $n = 2$, $SO(2)$ 表示平面中, 繞著原點旋轉矩陣所成的集合。當 $n = 3$, $SO(3)$ 表示繞著一固定軸旋轉矩陣所成的集合。還有, $SO(3)$ 包括很多有趣的有限子群, 例如 $SO(3)$ 包括五個古典正則多面體的對稱群。終極地說, 矩陣群已變成表達對稱的數學語言。

我們試問何時可將一個矩陣 A 表為 $A = \exp(B)$, 其中 $\exp(B)$ 定義為 $\exp(B) = E + B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \ldots + \frac{1}{m!}B^m + \ldots$ 因為 $\exp(B) = \lim_{m\to\infty}(E + B/m)^m$, 當 m 很大時我們可將 $E + B/m$ 視為 A 的無限小的表徵而 B 是 A 的無限小生成元 (infinitesimal generator)。有趣而且在數學上也有意義的是對 A、B 的代數性質做一比較, 這個比較的關鍵是行列式方程:

$$\mathrm{det(exp(B)) = e^{tr(B)}}$$

(證明這恆等式的一個方法是利用 Jordan 式, 並注意到相似矩陣具有相同的 trace 與行列式)。

例如 $\mathrm{det(exp(B))} = 1$ 若且唯若 $\mathrm{trace}(B) = 0$。也就是說 $SL_n(\mathbb{R})$ 乃包括所有矩陣 $\exp(B)$, 其中 $\mathrm{tr(B)} = 0$。我們用

$sl_n(\mathbb{R})$ 表示所有 trace 爲零的矩陣所成的集合。

注意到: $sl_n(\mathbb{R})$ 在上述定義的矩陣乘法是不封閉的, 但 $sl_n(\mathbb{R})$ 卻是在李氏括號 (Lie bracket) 運算下封閉的, 李氏括號運算即:

$$[B, C] = BC - CB.$$

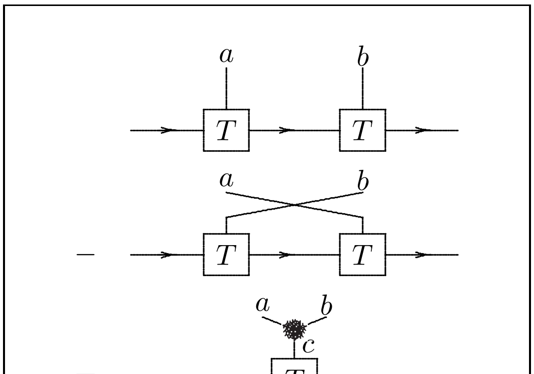
若 $\mathrm{tr(B)} = \mathrm{tr(C)} = 0$, 則 $\mathrm{tr[B, C]} = \mathrm{tr(BC - CB)} = \mathrm{tr(BC)} - \mathrm{tr(CB)} = \mathrm{tr(BC)} - \mathrm{tr(BC)} = 0$. 所以, 若 B、C 是 $sl_n(\mathbb{R})$ 的元素, 則 $[B, C]$ 亦在 $sl_n(\mathbb{R})$, 這種在李氏括號運算之下的封閉性, 是李代數的觀念。

定義: 一個實向量空間 L 稱作一個李代數 (Lie algebra), 假若 L 具有一二元運算—稱李氏括號 (Lie bracket), 記作 $[A, B]$ —且滿足下面的要求:

1. 對所有 L 上的元素 A、B, 恆有 $[A, B] = -[B, A]$
2. 對所有 L 上的元素 A、B、C 及實數 a、b, 恆有 $[aA+bB, C] = a[A, C]+b[B, C]$
3. $[A, [B, C]]+[C, [A, B]]+[B, [C, A]] = 0$

此第三個要求稱爲 Jacobi 恆等式, 讀者可試證 $sl_n(\mathbb{R})$ 爲一李代數。到現在爲止, 我們已看到 $sl_n(\mathbb{R})$ 是一個與矩陣群 $SL_n(\mathbb{R})$ 自然關聯的李代數。事實上, $sl_n(\mathbb{R})$ 經由“指數化” (exponentiation) 而生成 $SL_n(\mathbb{R})$, 我們稱 $SL_n(\mathbb{R})$ 是一李群 (Lie group), 而 $sl_n(\mathbb{R})$ 爲 $SL_n(\mathbb{R})$ 的李代數。一般的模式是每一矩陣群都有相對應的李代數, 矩陣群的分類可經由李代數的分類而簡化。更妙的是, 李代數亦自然地出現於各個數學、物理的領域, 顯然地, 李代數已脫離李群而獨自存在、發展。

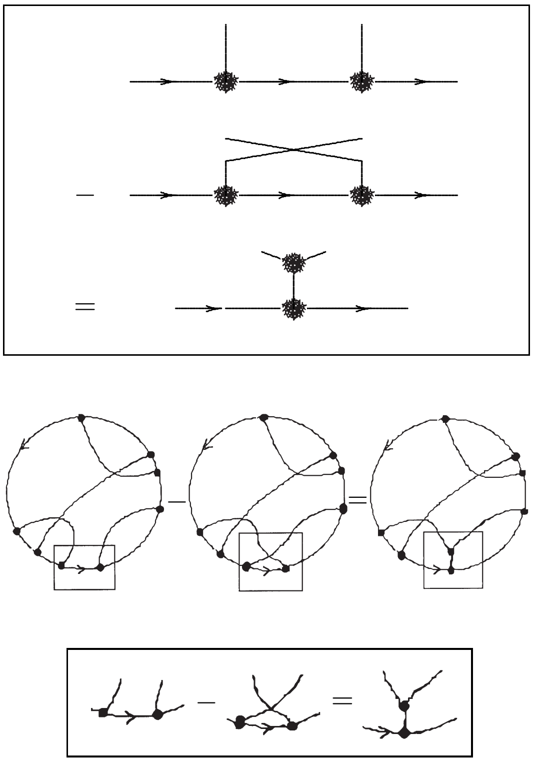
在我們的探討中, 李代數將與前述的 Vassiliev 不變量的權系的建立相關。我們試看下面的一個簡單論述—我們將圖示李氏括號及封閉性的意義。李代數條件告訴我們, 若用李代數 L 的一個基底 $\{T^1, T^2, \ldots, T^m\}$, 其中 T^a 都是 $n \times n$ 矩陣, 則我們可找到一組常數 $\{f_c^{ab}\}$, 使得 $T^aT^b - T^bT^a = [T^a, T^b] = \sum_c f_c^{ab}T^c$。在圖三十九我們圖示上式李氏括號的意義, 其中出現常數 $\{f_c^{ab}\}$, 我們用一個具三線的結點 (vertex) 來表示。爲了討論方便, 我假設常數 f_c^{ab} 只與 abc 的循環次序 (cyclic order) 有關—意即 $f_c^{ab} = f_a^{bc} = f_b^{ca} = -f_c^{ba} = -f_b^{ac} = -f_a^{cb}$。值得一提的是, 利用此 cyclic 不變性所導得到的結果可推廣到一般李代數, 詳情省略。



$$\boxed{T^aT^b - T^bT^a = f_c^{ab}T^c}$$

圖三十九.

現在看圖四十, 我們首先看到上半部與圖三十九類似的圖形, 只不過去掉了標記和足碼, 並將代表矩陣的方塊以圖上的黑點代



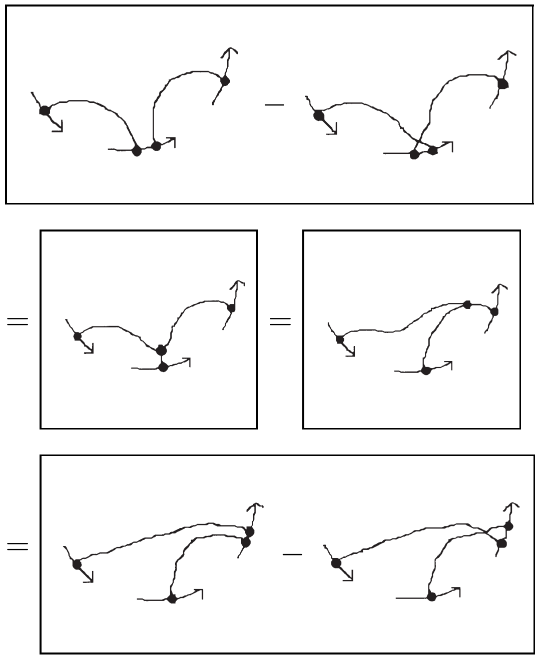
圖四十.

替。想像這個交換運算關係是圖四十下半部弦圖的一部分。(即圖中以方框表出的部分)。換句話說, 回想上節中介紹的弦圖的方法, 並想像除了弦還有具有三線的結點 (vertex), 這些結點與交換運算的關係如圖中所示。

最後, 再看四十一, 這是利用圖示的交換運算恆等式導出弦圖的四項關係式。

這表示, 我們上節由拓樸考量所導出的四項關係式與李代數的基本結構有密不可分的關係。這就是維氏不變量與李代數之間關係之精義所在。

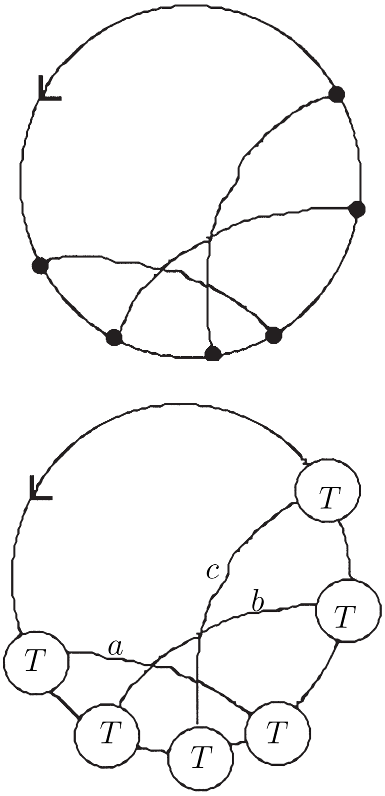
具體地說, 我們所描述的關係就是我們可以藉由矩陣李代數來建構維氏不變量的權系。要明瞭這點, 我們看圖四十二, 在圖上有一個弦圖 D 和對應的李代數基底中矩陣 T^a 的圖, 第二圖代表 trace 的和 $wt(D) = \sum_{a,b,c} \mathrm{tr}(\mathrm{T^aT^bT^cT^aT^bT^c})$, 這個圖代表“權” (weight)。$wt(D)$ 亦即分派給第一圖的權。如此建構的權系滿足四項關係式, 因此由 Kontsevich 的定理, 這是對維氏不變量最高階 (top level) 的計值。



圖四十一.

此節只是簡單地介紹李代數與結不變量深刻且迷人之關聯, 這方面的探討更是出奇有趣。首先, 由上面討論, 不難看出我們只須李代數的一些適當推廣而已。事實上, 在 Vassiliev 不變量出現之前, 李代數的另一個方向的推廣—量子群 (Quantum group) 早

已因統計力學的研究而出現, 並應用於結理論上, 量子群並且提供了李代數及其推廣, 與鏈結、結不變量間強而有力的關係。值得注意的是: 是否可由量子群找出所有 Vassiliev 不變量的權系?



圖四十二.

下節, 我們將探討前面有關結不變量背後的物理背景。

參考文獻

1. J. H. Conway, An enumeration of knots an links and some of their algebraic properties, Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, New York, 1970, 329-358.
2. J. Birman and X. S. Lin, Knot polynomials and Vassiliev's invariants, Invent. Math., 111 (1993), pp.225-270.
3. T. Standford, Finite-type invariants of knots, links and graphs, Topology Vol.35, No.4 (1996), pp.1027-1050.
4. D. Bar-Natan, On the Vassiliev Knot invariants, Topology, Vol.34, No.2(1995), pp.423-472.

(本文原是作者爲 *Encyclopedia of Natural and Physical Science* 所寫)

—本文作者任教於美國伊利諾大學, 譯者爲中央研究院數學所研究人員—

—(下期待續)—