劉太平院士演講——數學難、數學美

演講：劉太平
整理：林桂暖
時間：民國89年10月28日
地點：中央研究院數學研究所

今天是中研院院區開放日，歡迎大家來到我們數學所。

數學是人類文明一個重要的科目，美國進大學必須考 SAT，主要的兩個科目是數學跟語文，數學的重要大家都不會懷疑，大家都承認數學重要，但對我來說數學眞是難，相信大部分的人都覺得數學難。有時坐計程車，司機問我是做什麼的，我說是念數學的，他多半回答：數學很難。今天我要說的是：大家都知道數學難；但有眞的深刻的體會到數學的難嗎？

我對數學有興趣的時候，是開始數一二三，我小時候，有一次鄰居去參加學校的家長會，回來說：我那已經念小學的四哥不會從一數到一百，我母親覺得很奇怪，因爲雖然我母親不識字，但她覺得數學很簡單，一點都不難。這事卻不能怪我四哥 (他後來上台大機械系)，因爲鄉下地方沒人教過他數字，於是我母親放下寶貴的農作時間，來教我哥哥從一數到一百。我坐在旁邊就跟著學，覺得有趣：從一開始到十一，然後就到二十一，再到三十一，一直有相似的地方然後再做變化，於是我從一數到九十九然後也可以從九十九數到一，之後我就可以一直數到一千，覺得很有意思，有一天我母親和鄰居聊天說:「我們家太平可以讀數學。」所以我這樣決定讀數學了。數學的難我第一次感覺到是小學二年級的時候，那時候開始學乘法，要背九九乘法表，我覺得很難，因爲乘法的概念很不明顯，例如：$5\times 6=5+5+5+5+5+5$ 是5加了6次，雖然乘法是加法的延伸，但事實上它是一個思想上的突破。偉大的音樂家貝多芬因爲不會乘法，在他的樂譜上寫滿加法來算錢，乘法是一個偉大的發明。乘法有一個有趣的性質，我們來看圖一的對角線，

九九乘法表

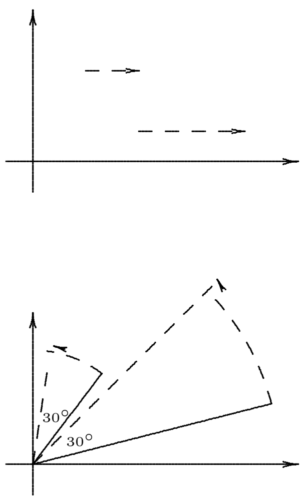
×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	$\boxed{24}$	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	$\boxed{24}$	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

圖一

$2\times 2=4$, $3\times 3=9$, $4\times 4=16$, 一直下去然後上下成對稱, $2\times 7=7\times 2$, $4\times 6=6\times 4$ 等等 $\ldots$, 有一個完全的對稱關係, 我在背九九乘法表時一直在想著: 爲什麼它會成對稱呢? 我一個一個檢查 $3\times 2=2\times 3$, 一直到全部檢查完, 因此耽誤了背九九乘法表, 放學時還被老師留下來背完才可以回家。我發現很多人覺得 $3\times 7=7\times 3$ 是一件很自然的事情, 而很快就接受了, 但我覺得一點都不自然, $3\times 7=7\times 3$ 是說乘法有交換性, 就是 $A\times B=B\times A$, 交換性是數學上的大事情, $102\times 204=204\times 102$ 用加要算很久, 何況還有上千和上萬的數目, 所以說交換性是一件很奇妙的事情, 人們就對它習以爲常成習慣, 但是習慣是一件不好的事情, 不過這個習慣不會維持很久; 到了高中就碰到不同的事了, 我提到的是矩陣的乘法, 例如: A 矩陣如圖示是一個空間的移動, B 矩陣是空間的一個轉動,

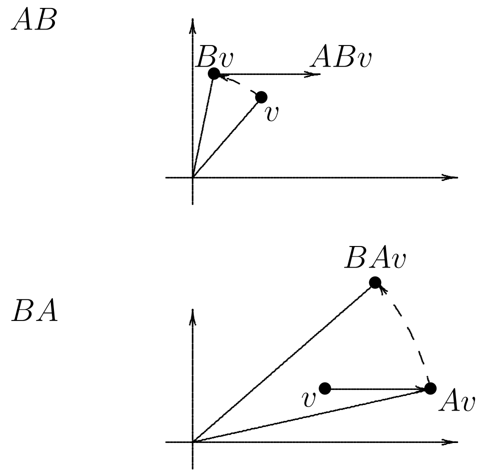
$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



圖二

我們來看 AB 等不等於 BA, 如圖三, 我們知道: AB 是先轉動再移動, BA 是先移動再轉動, 我們清楚的看到 AB 不會等於 BA。



圖三

如果我們直接做矩陣的計算如圖四, 我們也可以得到 AB 不會等於 BA。

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}\underset{B}{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underset{B}{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

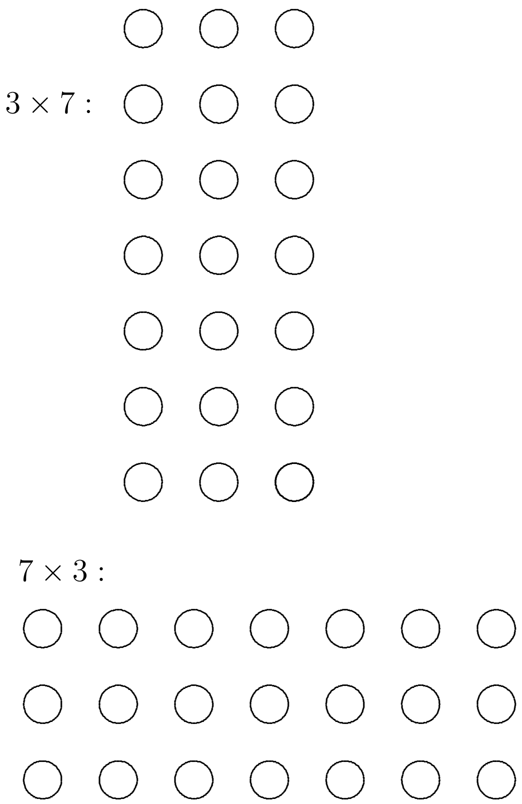
$$A\times B\neq B\times A$$

圖四

我學數學好不容易才接受 $AB=BA$, 但是呢, 現在又被教說 $AB\neq BA$, 對我來說是一件震驚的事情, 其實事情有交換的時候

也會有不交換的時候, 日常生活上我們常有不交換的時候, 例如先買菜再接小孩或先接小孩再買菜是不一樣的事情, 不可隨便交換。或在量子力學上 A, B 可以各代表一種測量, 如果 $AB = BA$ 那麼這兩種測量可同時測量不會互相干擾; 如果 $AB \neq BA$ 就代表兩種測量會互相干擾, 不可同時測量, 在這裡數學的理論對物理上有深遠的影響。

我們再回來看爲什麼 $3 \times 7 = 7 \times 3$? 對我來說這是那麼的困難, 如圖五



圖五 · 重組

我把上面兩個三加上下面的一個湊成一個七, 那第二個七就較難湊成, 所以我一個下午都在做這件事情, 其實老師有教過怎樣湊, 但是我沒聽到, 後來我知道所有三的第一個就湊成一個七, 第二個就第二個七, 這樣就簡單多了, 這就是數學的一個重組過程, 重組是數學上一個重要的過程。

接下來我想舉一個例子來說明重組的妙用。我們知道在古希臘 Euclid 證明過有無窮多個質數, 今天不說他的證明, 我要講的是大約 Euclid 之後兩千年 Euler 的另一個證明, 這中間沒有其他人對質數有其他證明。首先我們先講一些代數, 我們知道

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) &= 1+x+\cdots+x^n-x-\cdots-x^{n+1} \\ &= 1-x^{n+1} \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n\end{aligned}$$

若 $|x|<1$, 讓 n 趨向無窮大, 得到

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots$$

我們再回來看質數 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, $\cdots$, Euler 對數論做了一個基本的工作, 他看下面的乘式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{7}} \times \cdots \\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right) \times \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right) \times \left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right) \times \left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\cdots\right) \times \cdots \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots\end{aligned}$$

上面的第二個等號是一個初等、自然, 卻是偉大的發現, Euler把質數非常不規則的東西重

組成非常規則的東西，然後我們把最後的式子做重組

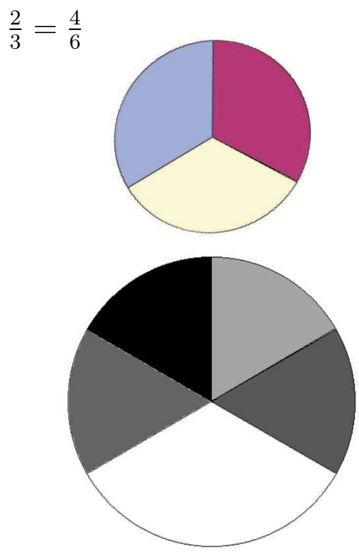
$$
\begin{aligned}
&1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{100}\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{1000}\right)+\cdots\\
&\quad>1+\frac{9}{10}+\frac{90}{100}+\frac{900}{1000}+\cdots\\
&=1+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\cdots
\end{aligned}
$$

上面的不等式成立的原因是因爲

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}>\frac{1}{10},\frac{1}{3}>\frac{1}{10},\cdots,\frac{1}{11}>\frac{1}{100}\\
&\frac{1}{12}>\frac{1}{100},\cdots,\frac{1}{101}>\frac{1}{1000},\cdots
\end{aligned}
$$

然後我們知道不等式的右邊是無窮大，所以左邊也無窮大，因此證明了有無窮多的質數。重組的工夫在數學上有非常廣泛的應用。

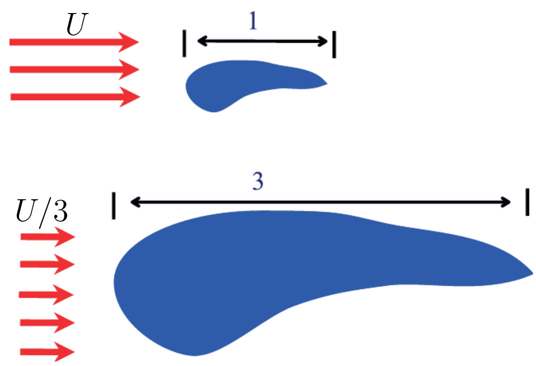
底下我想舉一個小學四年級的例子，我小學四年級的時候大概有一個月沒上課，我母親怕我的功課落後所以跟鄰居借了幾本課本我自己看，我大概花一個月看了一年的教材，因爲看的太快，其中有關分數的部份我始終覺得怪怪的，我看書上說 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ 是因爲 $\frac{2}{3}$ 就是把一塊大餅分成三等分的其中兩份，$\frac{4}{6}$ 是把同樣一塊餅分成六份的其中四份，所以他們相等，可是我一直覺得很奇怪，兩塊餅如果不一樣大，那 $\frac{2}{3}$ 怎麼等於 $\frac{4}{6}$? 這個問題是不能問老師的，否則老師會以爲你故意搗蛋，好多年下來我才終於知道分數不是大小的問題，而是比例的問題，是餅有的顏色部份比上沒顏色部份，無關餅的大小，如圖六。



圖六

世間沒有絕對的大小，我舉莊子的話：「天下莫大於秋毫之末，而大山爲小」。這裡大山就是泰山，因爲他看到最大的山就是泰山。所以沒有什麼絕對，只有比較而已，莊子在這重要的哲學題目得到突破，可惜我們東方後來並沒有繼續以數學來發展。

我舉一個物理實驗的例子來說明大小一事；有兩個飛機翅膀，一個大一個小，大的長度是小的三倍如圖七:



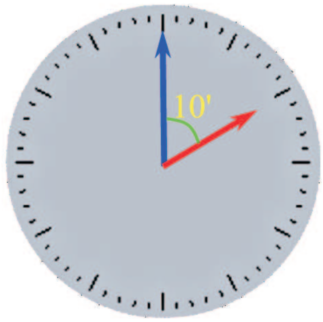
圖七

我們在實驗的時候不可能把一台波音747放進風洞實驗室, 所以我們造一個小的翅膀來做實驗, 做實驗時風速必須是大的三倍, 它附近的氣流才會跟大的相似, 是流體力學重要的雷若常數, 這是一種比例關係。當然不是所有的比例關係是三倍跟三分之一, 有時候跟我們高中學的拋物線 $y = x^2$, x 增加三倍 y 增加九倍, 雙曲線 $y^2 = x^2$, x 增加三倍 y 增加三倍, 各種比例問題在自然界物理界有不同的應用, 例如光的傳遞和熱的傳導, 數學能用不同比例法則描述出來。

接下來我所舉的例子是小學六年級的例子, 時鐘問題: 分針和時針在兩點三點之間何時重合? 我那時覺得是一個困難的問題, 先不說爲什麼我覺得困難, 我們先看書本怎樣算的。兩點時, 分針在時針之後 10 分, 而時針的速度是每分 1/12 分, 我們把它想成分針時針在賽跑, 一個在後一個在前, 一個快一個慢, 速度差 11/12 分, 所以要花 $10 \div \frac{11}{12} = 10\frac{10}{11}$ 分鐘才能趕上, 因此分針時針在 2 點 10 又 10/11 分重疊。問題的解決是把時鐘問題想成賽跑問題, 這是一種類比, 類比就是把表相不相同, 但本質是相同的問題連想在一起, 類比在數學上非常的重要, 有時候做純數學就是爲了做類比。我們再來看看幾個類比的問題, 水波、音波、光波、車流是類比的問題; 熱傳導、污水擴散、生物蔓延也是類比問題, 在數學上都是同一個問題, 所以把時鐘問題想成賽跑問題是一個重大的突破。

爲什麼那時我會覺得時鐘問題很困難呢? 如圖八:

兩點十分不重疊



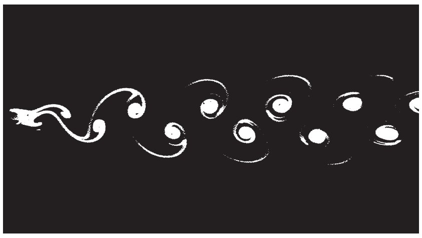
兩點 $10\frac{10}{12}$ 分仍不重疊

圖八

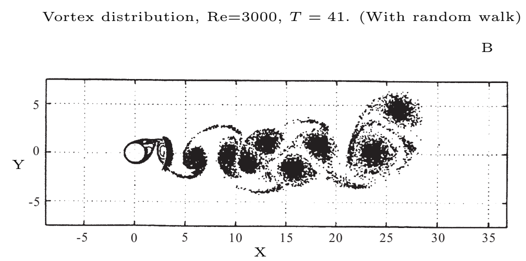
兩點十分的時候分針到了 10 分, 但時針不等分針, 自己走了 10/12 分, 所以不重疊, 兩點又 10 又 10/12 分仍不重疊, 一直下去好像永遠不重疊。我舉另一個例子, 有一位匈牙利偉大的數學家, 一天有人問他一個問題: 有兩個人面對面由兩端開始走, 中間有一隻蒼蠅在飛, 碰到一個人的鼻子時就往回飛, 碰到另一個的鼻子就又往回飛, 就這樣來回飛, 如果知道兩人速度, 那麼在兩個人碰到之前蒼

蠅飛了多遠？ 這跟時針問題一樣, 你把全部加起來就可以: $10 + 10 \times \frac{1}{12} + 10 \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} + 10 \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} + \times \frac{1}{12} + \cdots = 10\frac{10}{11}$ 這個數學家工夫了得, 只花了三四秒就算出來, 問的人覺得無趣, 說: 你以前一定聽過這問題了。其實他沒聽過只不過他把它加起來而已。他加的速度也眞快。同樣的我們也可說: 分針往前時針就往前一點點, 就一直在追, 無窮無盡的追, 是一種逼近的過程。

逼近的過程是一個辛苦的過程, 因爲要無窮無盡的加。但是有很多時候逼近可以由計算機去做, 計算機的出現, 就有了新的數學的出現, 本來笨拙的計算方法就變得很有用, 計算機對近代的數學有很大的作用。接下來例子告訴你們計算機的作用, 這張圖九是數學所周謀鴻先生給我的,



(From Van Dyke, An Album of Fliud Motion) According to Henri Poincare, we study Nature simply because she is beautiful.



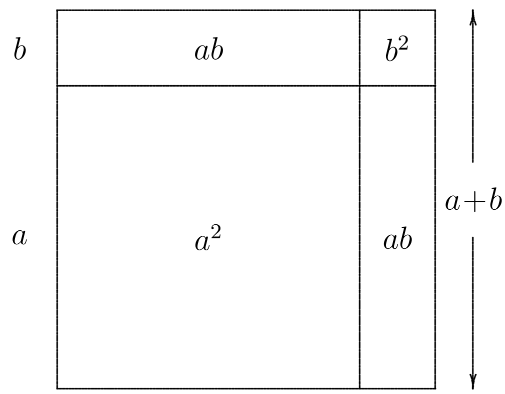
For a mathematician, Nature consists of various set of differential equations.

圖九

圖形的一開始有一顆很小的石頭, 這就像我們在河裡看水流經過石頭產生的流水, 會有一個個不對稱漩渦, 這跟我們飛機尾後的氣體漩渦一樣, 如果水流越快漩渦圖形就不一樣, 飛機也是一樣。我們知道做實驗很貴, 因此用計算機來算, 用計算機來算是一個逼近的過程, 爲什麼用計算機算物理實驗要逼近過程？ 水流往石頭旁邊流產生壓力, 壓力呢就產生力量把水往另一邊壓, 用計算機就算出圖九的下圖。如果我們要做不同的飛機的實驗, 飛行速度不一樣, 翅膀形狀也不一樣, 做風洞實驗就還要做另一個翅膀, 這是一個很昂貴的事情, 計算機呢只要輸入不同數字就可以達成, 所以用計算機逼近是一件大事情。

接下來我舉最後一個問題是國中問題, $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$ 如圖十就可以告訴你爲什麼

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$$



$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

非線性

圖十

這是一個非線性的問題, 我們工程大部分應用是用線性去算的, 例如我敲一塊東西力氣越大它震動也比例的增大, 是一種線性現象, 但是呢我力氣一直增大到一個地步, 就要斷裂了, 因此線性常是不好的逼近。非線性的作用是到處都有, 例如氣象的氣壓圖它今天一個樣子到了明天就完全不一樣, 天有不測風雲。下面這個非線性例子是數學所杜寶生先生給我的, 如圖十一:

$$f(x) = 2.675 - c(1 + x^2)$$

週期: 1 $\quad c = 0.2$

$$\begin{aligned} x &= 1.81567 \\ &\xrightarrow{f} 2.675 - 0.2[1 + (1.81567)^2] \\ &\qquad = 1.81567 \end{aligned}$$

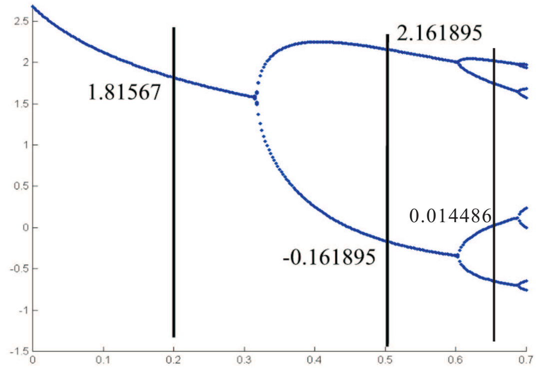
週期: 2 $\quad c = 0.5$

$$\begin{aligned} x &= -0.161895 \\ &\xrightarrow{f} 2.675 - 0.5[1 + (-0.161895)^2] \\ &\qquad = 2.161895 \\ &\xrightarrow{f} 2.675 - 0.5[1 + (2.161895)^2] \\ &\qquad = -0.161895 \end{aligned}$$

圖十一

C 控制著 $f(x)$ 非線性的程度, 當 $c = 0.2$ 時, 不管 x 等於多少把它代入 $f(x)$ 的出來的值再一直代入, 最後都會趨近 1.81567, 把 $x = 1.81567$ 代入, $f(x) = 1.81567$ 是唯一的固定點; 當 $c = 0.5$ 時, 則 $x = -0.161895$ 時, $f(x)$ 代入兩次會等於 x, 所以它有一個週期, 如果我們再增強非線性, $c = 0.65$, 圖十二告訴我們運算結果,

週期: 4 $\quad c = 0.65$

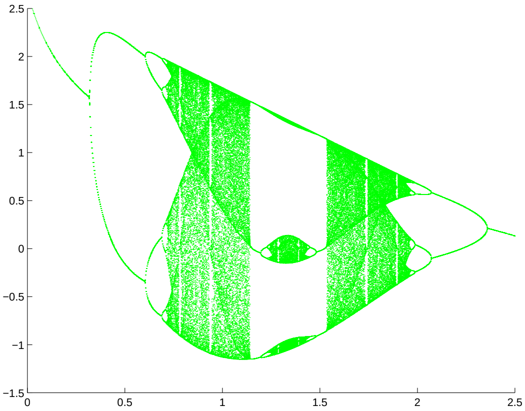


$$\begin{aligned} x &= -0.640047 \\ &\xrightarrow{f} 2.675 - 0.65[1 + (-0.160047)^2] \\ &\qquad = 1.758721 \\ &\xrightarrow{f} 2.675 - 0.5[1 + (1.758721)^2] \\ &\qquad = 0.014486 \\ &\xrightarrow{f} 2.675 - 0.5[1 + (0.014486)^2] \\ &\qquad = 2.024864 \\ &\xrightarrow{f} 2.675 - 0.5[1 + (2.024864)^2] \\ &\qquad = -0.160047 \end{aligned}$$

圖十二

從圖知道它會在四個點不停的繞, 永無止境的繞, 不會離開四個點, 如果再增加非線性因素例如 $c = 0.7$ 就會有八個點繞, 再繼續增加的話就有無窮多的點在繞, 如圖十三。

它的變化已經沒有規則, 它是一種混亂的現象, 有一個日本的數學家, 他說混亂現象在渾沌裡找到, 有一次他在大陸演講學生沒聽過渾沌一詞還以爲是指吃的東西。渾沌現象根源於所謂的蝴蝶效應, 是說一隻小蝴蝶翅膀動一下, 附近的空氣變一下, 但最後可能導致極大的變動。這個是多年研究的數學結果, 其實絕大多數的非線性作用今天我們還是不能理解的。



圖十三

我最後做一個總結: 數學難, 數學的難一定要深切的去體認它, 很多教數學的, 爲了安撫學生, 說數學不是那麼難, 我一向不這麼說, 因爲我自己覺得很難。如果能夠深刻的體認數學的難, 就會欣賞數學裡面看起來很簡單, 事實上很豐厚的手法, 數學難學, 主要不在它本身的難, 而是學的太快, 沒辦法去深刻的體認再克服數學的難。就像我們欣賞一個藝術品, 最重要的就是要慢, 看黃公望畫水邊的草, 岸邊的樹, 水的流動, 雖是用很簡單的筆觸去畫它, 卻是經過思考, 筆筆精準的。學數學也是要慢, 不能夠說學數學遇到了困難, 就想辦法用簡便的方法而忘了它本質的困難, 數學本質的困難要不時的去感覺它, 如此, 你才會發現: 數學的美就在其中。

—本文演講者劉太平爲中央研究院數學所所長, 林桂暖曾任中央研究院數學所助理—