射影平面六講 — 第四講

王九逵

令 E_0, E_1, I, X 爲 $\mathbb{P}$ 中的直線 l 的相異的四點。如上一講的最後, 在 l 上建立射影座標系 (E_0, E_1, I) 並設 X 的射影座標向量爲 $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1)$。我們稱實數 ζ_1/ζ_0 爲四點 E_0, E_1, I, X 的叉比 (cross ratio), 以符號 ℞(E_0, E_1, I, X) 表之。換言之, 若選擇 E_0, E_1, I, X 的齊次座標向量 ε_0, ε_1, ι, ξ 及實數 χ, 使

$$\iota = \varepsilon_0 + \varepsilon_1, \qquad \xi = \varepsilon_0 + \chi\varepsilon_1,$$

則該四點的叉比 ℞(E_0, E_1, I, X) 可以定義爲實數 χ。

我們現在在 l 上取和 E_0, E_1 及 I 都相異的四點 X_1, X_2, X_3, X_4。假定

$$\text{℞}(E_0, E_1, I, X_i) = \chi_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

我們想利用 χ_i 將 ℞(X_1, X_2, X_3, X_4) 表示出來。令

$$\eta_1 = \varepsilon_0 + \chi_1\varepsilon_1, \quad \eta_2 = \varepsilon_0 + \chi_2\varepsilon_1,$$
$$\xi_3 = \varepsilon_0 + \chi_3\varepsilon_1, \quad \xi_4 = \varepsilon_0 + \chi_4\varepsilon_1,$$

則 η_1, η_2, ξ_3, ξ_4 是 X_1, X_2, X_3, X_4 的齊次座標向量。遂得到

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{\chi_1 - \chi_2}(\eta_1 - \eta_2) \\
&= \frac{1}{\chi_1 - \chi_2}\eta_1 + \frac{1}{\chi_2 - \chi_1}\eta_2, \\
\varepsilon_0 &= \eta_1 - \frac{\chi_1}{\chi_1 - \chi_2}\eta_1 - \frac{\chi_1}{\chi_2 - \chi_1}\eta_2 \\
&= -\frac{\chi_2}{\chi_1 - \chi_2}\eta_1 - \frac{\chi_1}{\chi_2 - \chi_1}\eta_2, \\
\xi_3 &= -\frac{\chi_2}{\chi_1 - \chi_2}\eta_1 - \frac{\chi_1}{\chi_2 - \chi_1}\eta_2 \\
&\quad + \frac{\chi_3}{\chi_1 - \chi_2}\eta_1 + \frac{\chi_3}{\chi_2 - \chi_1}\eta_2 \\
&= \frac{\chi_3 - \chi_2}{\chi_1 - \chi_2}\eta_1 + \frac{\chi_3 - \chi_1}{\chi_2 - \chi_1}\eta_2.
\end{aligned}$$

所以如果我們令

$$\xi_1 = \frac{\chi_3 - \chi_2}{\chi_1 - \chi_2}\eta_1, \qquad \xi_2 = \frac{\chi_3 - \chi_1}{\chi_2 - \chi_1}\eta_2,$$

便會有 $\xi_3 = \xi_1 + \xi_2$。而此時

$$\begin{aligned}
\xi_4 &= \varepsilon_0 + \chi_4\varepsilon_1 \\
&= \Big(-\frac{\chi_2}{\chi_3 - \chi_2}\xi_1 - \frac{\chi_1}{\chi_3 - \chi_1}\xi_2\Big) \\
&\quad + \chi_4\Big(\frac{1}{\chi_3 - \chi_2}\xi_1 + \frac{1}{\chi_3 - \chi_1}\xi_2\Big) \\
&= \frac{\chi_4 - \chi_2}{\chi_3 - \chi_2}\xi_1 + \frac{\chi_4 - \chi_1}{\chi_3 - \chi_1}\xi_2.
\end{aligned}$$

於是我們得到了

$$\begin{aligned}
&\text{℞}(X_1, X_2, X_3, X_4) \qquad\qquad (1) \\
&= \frac{\chi_4 - \chi_1}{\chi_3 - \chi_1}\Big/\frac{\chi_4 - \chi_2}{\chi_3 - \chi_2} = \frac{\chi_3 - \chi_2}{\chi_3 - \chi_1}\Big/\frac{\chi_4 - \chi_2}{\chi_4 - \chi_1}.
\end{aligned}$$

有了這個公式以後, 我們可以利用極限把它推廣, 不再要求四點互異, 也不再要求四點都和 E_0, E_1, I 相異了。

令 A, B, C, D 爲 x 軸上的四個實數。再令 F 爲 x 軸上的無限遠點。則

$$\text{℞}(0,F,1,A)=A, \quad \text{℞}(0,F,1,B)=B,$$
$$\text{℞}(0,F,1,C)=C, \quad \text{℞}(0,F,1,D)=D.$$

因此

$$\begin{aligned}\text{℞}(A,B,C,D) &= \frac{C-B}{C-A}\Big/\frac{D-B}{D-A}\\ &= \frac{\overline{BC}/\overline{AC}}{\overline{BD}/\overline{AD}}.\end{aligned}$$

這說明在實軸上叉比可以用有向距離表示。

定理: 設 $\text{℞}(X_1,X_2,X_3,X_4)=\kappa$。則

$$\begin{aligned}
\text{℞}(X_1,X_2,X_3,X_4) &= \text{℞}(X_2,X_1,X_4,X_3)\\
&= \text{℞}(X_3,X_4,X_1,X_2)\\
&= \text{℞}(X_4,X_3,X_2,X_1)\\
&= \kappa,\\
\text{℞}(X_1,X_2,X_4,X_3) &= \text{℞}(X_2,X_1,X_3,X_4)\\
&= \text{℞}(X_4,X_3,X_1,X_2)\\
&= \text{℞}(X_3,X_4,X_2,X_1)\\
&= \frac{1}{\kappa},\\
\text{℞}(X_1,X_3,X_2,X_4) &= \text{℞}(X_3,X_1,X_4,X_2)\\
&= \text{℞}(X_2,X_4,X_1,X_3)\\
&= \text{℞}(X_4,X_2,X_3,X_1)\\
&= \frac{\kappa}{\kappa-1},\\
\text{℞}(X_1,X_3,X_4,X_2) &= \text{℞}(X_3,X_1,X_2,X_4)\\
&= \text{℞}(X_4,X_2,X_1,X_3)\\
&= \text{℞}(X_2,X_4,X_3,X_1)\\
&= \frac{\kappa-1}{\kappa},\\
\text{℞}(X_1,X_4,X_2,X_3) &= \text{℞}(X_4,X_1,X_3,X_2)\\
&= \text{℞}(X_2,X_3,X_1,X_4)\\
&= \text{℞}(X_3,X_2,X_4,X_1)\\
&= \frac{1}{1-\kappa},\\
\text{℞}(X_1,X_4,X_3,X_2) &= \text{℞}(X_4,X_1,X_2,X_3)\\
&= \text{℞}(X_3,X_2,X_1,X_4)\\
&= \text{℞}(X_2,X_3,X_4,X_1)\\
&= 1-\kappa.
\end{aligned}$$

這些結果都可以從 (1) 式推出。關於 κ 和關於 $\dfrac{1}{\kappa}$ 的公式都很直接。如果我們有了關於 $1-\kappa$ 的公式, 則其餘的公式都可以從這些公式推出來了。所以我們只須證明關於 $1-\kappa$ 的公式。其實關於 $1-\kappa$ 的公式中, 我們只須證明

$$\text{℞}(X_1,X_4,X_3,X_2)=1-\kappa$$

就可以了。此式的證法如下:

$$\begin{aligned}
&\text{℞}(X_1,X_4,X_3,X_2)+\kappa\\
&=\frac{(\chi_2-\chi_1)(\chi_3-\chi_4)}{(\chi_3-\chi_1)(\chi_2-\chi_4)}+\frac{(\chi_4-\chi_1)(\chi_3-\chi_2)}{(\chi_3-\chi_1)(\chi_4-\chi_2)}\\
&=\frac{-\chi_2\chi_3+\chi_1\chi_3+\chi_2\chi_4-\chi_1\chi_4}{(\chi_3-\chi_1)(\chi_4-\chi_2)}\\
&\quad+\frac{\chi_3\chi_4-\chi_1\chi_3-\chi_2\chi_4+\chi_1\chi_2}{(\chi_3-\chi_1)(\chi_4-\chi_2)}\\
&=\frac{\chi_3\chi_4+\chi_1\chi_2-\chi_2\chi_3+\chi_1\chi_4}{(\chi_3-\chi_1)(\chi_4-\chi_2)}=1
\end{aligned}$$

現在我們想把叉比的觀念對偶化。設 e_0, e_1 和 i 爲 $\mathbb{P}$ 中共點的三條直線, 並假定它們兩兩相異。選擇 e_0, e_1, i 的齊次座標向量 ε_0, ε_1 and ι 使 $\iota=\varepsilon_0+\varepsilon_1$。令 l 爲和這三條直線共點的另一條直線。我們可

以把它的齊次座標向量寫成 $\lambda_0\varepsilon_0+\lambda_1\varepsilon_1$ 之形。則 e_0, e_1, i, l 四線的 叉比 (cross ratio) $\mathcal{R}(e_0, e_1, i, l)$ 的定義爲 λ_1/λ_0。對共點的任意四條直線的叉比, 我們也有一個類似公式 (1) 的公式。

對共點四直線的叉比, 當四線重新排列時, 也有類似上定理的結果, 讀者不難自行寫出。

定理: 設 X_1, X_2, X_3, X_4 爲共線的四點, X 爲線外的一點。以 l_1, l_2, l_3 和 l_4 分別表示直線 XX_1, XX_2, XX_3 和 XX_4。則

$$\mathcal{R}(X_1, X_2, X_3, X_4)=\mathcal{R}(l_1, l_2, l_3, l_4). \quad (2)$$

證明: 設$\chi=\mathcal{R}(X_1, X_2, X_3, X_4)$。選擇 X_1, X_2, X_3 及 X_4 的齊次座標向量 ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, 使

$$\xi_3=\xi_1+\xi_2, \quad \xi_4=\xi_1+\chi\xi_2, \qquad (3)$$

令 X 的座標向量爲 ξ。則 ξ 和 (3) 式的外積爲

$$\xi\times\xi_3=\xi\times\xi_1+\xi\times\xi_2,$$
$$\xi\times\xi_4=\xi\times\xi_1+\xi\times\chi\xi_2.$$

但 $\xi\times\xi_i$ 是 l_i 的線齊次座標向量。故得 $\chi=\mathcal{R}(l_1, l_2, l_3, l_4)$。

本定理的對偶定理便是它本身。

設 l_1 和 l_2 爲二直線, O 爲二線以外之一點。我們定義從 l_1 到 l_2 的對應如下: 對 l_1 上的一點 X, 取連線 OX 和 l_2 的交點和它對應。這對應叫從 l_1 到 l_2 的一個 透視 (對應) (perspectivity), O 叫這透視的 透視中心 (center of perspectivity)。

系: 叉比在透視對應下不變。

—本文作者爲國立中央大學數學系退休教授—