B_μ場的質量是什麼?

高涌泉

數學與理論物理的發展往往是相輔相成, 所以關係一向密切。不過兩者關係有時緊有時鬆。緊的時候, 數學家與理論物理學家往來頻繁, 會留意對方的新發展。這時候高手甚至可以跨領域工作, 同時身爲一位一流數學家及一流的理論物理學家。十九、二十世紀之交時的 Poincare 就是一例。關係鬆的時候, 雙方都會覺得對方所做的和自己的領域沒有什麼關係, 當然談不上會去留意彼此的尖端研究了。二十世紀五、六十年代大致上講就是這麼一個時期。那時理論物理學家還正被新發現的一大堆粒子弄得頭昏腦脹, 研究主流是現象的分析。同時期數學家著力於拓樸學與代數幾何的發展, 所以都在討論數學內在結構性的問題, 與自然沒有什麼明顯的關聯。所以數學家與理論物理學家都不認爲可以從對方學到什麼有用的東西, 能夠幫助解決自己面對的問題。(當然那時還是有一些人如 Penrose 用最新的拓樸與微分幾何技巧研究廣義相對論, 也有一些人研究統計力學與可積系統, 算是結合了數學與理論物理, 不過他們人數不多, 在當時並非研究主流。)

數學與物理這種疏離的情況在過去十餘年間有了一百八十度的翻轉。大家只要上網到柏克萊數學科學研究中心 (MSRI) 或普林斯頓高等研究所 (IAS) 去了解一下這些中心的活動, 就知道主流數學家現在也對量子場論、費曼圖、路徑積分這一類量子物理題材很感興趣。有些數學家已經非常熟悉場論的概念與語言, 有的正在認眞學習。我所謂的主流數學家包括很多費爾茲獎得主, 如 Atiyah、 Deligne、 Freedman、 Connes、 Jones、 Kontsevich、 丘成桐等人, 以及 Bott、Singer、Kazhdan 等一流數學家。至於古典 Yang-Mills 規範場論則更是早在七十年代底就已引起 Atiyah、Manin 等人的注意, 其對數學的衝擊之大已是衆所週知的。Donaldson 在四維流形上的成就就是奠基在 Yang-Mills 微分方程的研究上面。

相對的, 物理學家現在也逐漸熟悉 fiber bundle、K-理論、Calabi-Yau 流形、Atiyah-Singer Index 定理等近代數學題材。對於 50、60 年代物理學家來說, 這是很不可思議的事。總之數學家與理論物理學家共同的語言越來越多, 尤其是量子場論, 近年來可以說已成爲相當重要的數學工具。前幾年, Seiberg-Witten方程式出現, 把四維流形的研究推進了一大步, 這完全是因爲量子場論

(即 $N=2$ 超對稱 Yang-Mills 理論) 有了新的成果, 才附帶而來的進展。

去年私立的 Clay 數學研究所宣佈了七個有賞金的數學問題, 解出任何一題就可獲一百萬美元。這七個問題多半是一般數學家熟知的難題, 如 Riemann Hypothesis、Poincare Conjecture、Hodge Conjecture 等。但其中夾了一題對很多數學家來說相當陌生的量子場論問題。我前面已說明了現今數學與物理的關係, 所以在此背景下, 量子場論出現在 Clay 問題中也是應當的事。以下我將簡要地解釋 Clay 這個場論問題的意義。此問題由 Jaffe 與 Witten 執筆, 其敍述是:「考慮R^4空間中, 規範群爲 G 的量子 Yang-Mills 理論, 證明此理論存在而且有大於零的 mass gap Δ (即 $\Delta>0$)。G 在這裡是 compact simple Lie group。」問題中的 mass gap Δ就是量子 Yang-Mills 理論中的基態 (最低能量態) 與最低激發態之間的能量差。場論中的基態就是眞空態, 其能量一般就定爲零。而最低激發態的能量就是理論中最輕粒子的質量。所以 mass gap Δ就是等於此最小質量, 而 $\Delta>0$ 意味著 Yang-Mills 場論中沒有質量爲零的粒子。換一個方式講, 我們想要證明量子 Yang-Mills 理論的 Hamiltonain H, 其 eigenvalue E不會落於 $(0,\Delta)$ 之間。不過我得指出, 因爲必須考慮重整化 (renormalization) 效應, $H\Psi=E\Psi$ 這個方程式在量子場論中還沒有十分完整的數學意義。

爲什麼證明 $\Delta>0$ 是一件重要的事? 而其困難又是在哪裡? 要進一步理解 mass gap 問題的背景, 我想從對比 Yang-Mills 理論與較簡單的 Maxwell 理論入手是最好的方式。古典的 Maxwell 理論是一個阿貝爾 $U(1)$ 規範場論, 其規範場 A_μ 是四維流形 $\mathbf{R}^4$ 中的向量場, 從 A_μ 我們可得 one-form $\boldsymbol{A}=A_\mu dx^\mu$ 及 two-form $\boldsymbol{F}=d\boldsymbol{A}$, 若 $\boldsymbol{F}=F_{\mu v}dx^\mu\wedge dx^v$, 則 $F_{\mu v}=\partial_\mu Av-\partial_v A_\mu$, $F_{\mu v}$ 就是電磁場張量。在 $U(1)$ 規範變化之下, $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{U}d\boldsymbol{U}^{-1}$, $\boldsymbol{U}$ 是 $U(1)$ 群的一個 元素, 可以寫成 $\boldsymbol{U}=e^\lambda$。所以 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}-d\lambda$。在規範變化之下, two-form $\boldsymbol{F}$ 與 Maxwell Lagrangian $\boldsymbol{L}_M=\frac{1}{4e^2}\boldsymbol{F}\wedge *\boldsymbol{F}$ 都是不變量 ($*$是 Hodge duality operator), 也就是 $\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}_M\to\boldsymbol{L}'_M=\boldsymbol{L}_M$。把 $\boldsymbol{L}_M$ 代入 Euler-Lagrange 方程就可以得到大家熟悉的古典 Maxwell 方程式, 就是 $d\boldsymbol{F}=0$ 與 $d*\boldsymbol{F}=0$。Maxwell 從方程式找到電磁波的解, 發現電磁波速與光速相同, 因而認定光就是電磁波。這是十九世紀物理的最大成就之一。不過我們知道光也有粒子行爲, 所以得以量子 Maxwell 理論取代古典 Maxwell 理論。量子 Maxwell 理論把 A_μ 看成是可以在每一時空點創造或消滅光子的場運算子 (field operator)。因爲量子場 A_μ 得要滿足 Maxwell方程, 我們可以證明光子的能量E與動量 p 成正比, 即 $E=cp$, 比例常數 c 是光速。所以只要動量 p 趨近於零, 能量也就趨近於零。也就是說在量子 Maxwell 理論中, 激發態與基態 (即眞空態, 其$E=0$) 的能量差可以趨於零, 亦即沒有 mass gap。(由 Einstein 公式, $E^2=m^2c^4+p^2c^2$, 就可以

看出對光子而言 $m = 0$)。由於光子在我們這裡所談的純 (pure) 量子 Maxwell 理論中是自由粒子, 有人也許會要問, 如果把電子等帶電粒子包括進來, 使理論成爲四維量子電動力學 (QED, Quantum Electrodynamics), 光子是否仍然能保持零質量? 答案是肯定的。光子在 QED 中仍不帶質量, 所以 QED 理論也沒有 mass gap。

從數學的角度看, 楊振寧與 Robert Mills 在 1954年發表的非阿貝爾規範場論僅是把阿貝爾 Maxwell 理論推廣至非阿貝爾對稱的情況而已。Yang-Mills 理論中的規範場 A_μ 是一個矩陣, 可以展成 $A_\mu = \sum_a A^a_\mu \tau^a$, 其中 τ^a 是非阿貝爾群G的李代數元素。從 one-form $\boldsymbol{A} = A_\mu dx^\mu$ 可以定義出 two-form $\boldsymbol{F} \equiv d\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{A}$。對於 $U(1)$ 阿貝爾群而言, $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{A} = 0$, 所以 $\boldsymbol{F}$ 只是 $d\boldsymbol{A}$ 而已。對於 $\boldsymbol{A}$ 而言, 非阿貝爾規範變換就是

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^{-1} + \boldsymbol{U}d\boldsymbol{U}^{-1},$$

$\boldsymbol{U}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 的元素, 而 $\boldsymbol{F}$ 的變換則是 $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}' = \boldsymbol{U}\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}$。Yang-Mills Lagrangian $\boldsymbol{L}_{YM}$ 則是一個規範不變量

$$\boldsymbol{L}_{YM} = \frac{1}{4g^2} Tr \boldsymbol{F} \wedge *\boldsymbol{F}.$$

如同 Maxwell 理論, 將 $\boldsymbol{L}_{YM}$ 套入 Euler-Lagrange 方程式就可以得到場方程式, 也就是著名的 Yang-Mills 方程式: $\boldsymbol{D}_A\boldsymbol{F} = 0$ 與 $\boldsymbol{D}_A * \boldsymbol{F} = 0$。其中$\boldsymbol{D}_A$是協變微分 (covariant derivative) 算符, 例如 $\boldsymbol{D}_A\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{F} + \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{A}$。楊振寧在他的論文集中回顧他的理論創作過程時說, 他很早就知道 $\boldsymbol{A}$ 的非阿貝爾規範轉換關係, 卻因爲理所當然地沿用 Maxwell 理論裡 $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{A}$ 的定義, 所以一直得不出好的結果。直到他與 Mills 合作才發現了 $\boldsymbol{F}$ 的正確表現式。

古典 Yang-Mills 方程式是一個非線性偏微分方程式, 比起線性的 Maxwell 方程式困難太多了。然而數學家卻能從 Yang-Mills 方程式的研究中發現很多美妙的新數學。不過古典 Yang-Mills 理論並不是物理學家在意的東西, 物理學家想要知道的是量子 Yang-Mills 理論的性質, 想知道此量子理論是不是能夠描述某些自然的現象。和量子 Maxwell 理論一樣, 我們在這裡必須將量子 Yang-Mills 理論中矩陣場 A_μ 看成是一個矩陣場算符。經過了十餘年的努力, 物理學家方才認知量子 Yang-Mills 理論難度之高。原因之一是傳統量子場論的工具如微擾法 (費曼圖法) 不能夠解決 Yang-Mills 理論的核心問題。

1954年二月楊振寧應 Oppenheimer 之邀在普林斯頓高等研究院演講他與 Mills 的工作, 物理大師 Pauli 也在座。楊回憶說, 演講開始不久, 他才在黑板上寫下:

$$(\partial_\mu - I\varepsilon B_\mu)\Psi,$$

Pauli 馬上就問:「B_μ 場的質量是什麼? 」(楊振寧的 B_μ 上文中的規範場 A_μ。由於現在 A_μ 已成爲代表規範場的標準符號, 所以我一開始就沒有使用 B_μ 而用 A_μ。Ψ 代表質子與中子, 我們在此毋須進一步理解 Ψ 的意義, 因爲它和我們的主題沒有關係)。楊振寧回答不知道, 然後就繼續講下去。但過不久 Pauli 又再問同一個問題, 楊就約略說這是一個很複雜的問題, 他們研究過但沒得到什麼

明確的答案。Pauli 說那不成爲藉口。楊受到這麼強烈的指責, 一時不知說什麼, 只想到坐下來。場面就凝重下來。還好 Oppenheimer 出來打圓場說我們應讓楊繼續講, 楊才接續下去。一直到終場, Pauli 沒有再問任何問題。

Pauli 會有此一問, 顯然是有備而來。原來, 他早已想過把規範對稱推廣到非阿貝爾群, 而且有了初步的結果, 只是沒有發表而已。而且 Pauli 很清楚如果非阿貝爾群規範理論要有實際的用途, 必須要能回答B_μ (A_μ) 場的質量爲何。爲什麼這是一個難題呢? 第一, 在 Yang-Mills Lagrangian $\boldsymbol{L}_{YM}$ 中並沒有一項"$m^2 \mathrm{tr} A_\mu A^\mu$"這種一般認爲是代表 A_μ 場質量的項。因爲這樣的質量項破壞了 $\boldsymbol{L}_{YM}$ 的規範不變性。所以膚淺地看, 我們可能以爲 A_μ 場不帶質量。第二, 從微擾的角度看, A_μ 場 (粒子) 與光子非常類似, 只是 A_μ 與 A_μ 會有交互作用。也就是說 $\boldsymbol{L}_{YM}$ 除了包括有類似出現在 Maxwell 理論中的 dA 的平方項之外, 還有 A_μ 的三次方項與 A_μ 的四次方項出現。這些 A_μ 的高次項代表 A_μ 之間的交互作用。因爲這些交互作用非常複雜, A_μ 場有可能因爲交互作用而變成帶質量的重粒子, 所以楊不敢輕易下定論。第三, 當時實驗並沒有發現不帶質量而且能夠與自身 (及質子中子) 交互作用的向量粒子 (場)。第四, 物理量 (observable) 必須是規範不變量。在 Maxwell 理論中, A_μ 雖不是不變量, 但還好 $F_{\mu v}$ 是不變量, 使得理論的結構比較單純。然而在 Yang-Mills 理論中, A_μ 與 $F_{\mu v}$ 皆不是規範不變量, 當然也就不是物理量, 從而使得在理論中何爲物理量的問題變得非常複雜。所以 Pauli 的問法是不是問得恰當也還有斟酌的餘地。總之對於 A_μ 場的質量問題, 可以有各式各樣的角度去預想答案, 但是沒有任何人可以明確地說個所以然來。楊振寧自己說儘管質量的問題未解, 但是規範場的概念太「美」了, 還是應當把這個點子發表出來。

不誇張地說, 二十世紀下半葉粒子物理的主要成就在於回答了 Pauli 問題。這個成就有兩個層面。其一是人們找到了一個方法, 也就是 Higgs 機制, 可以在不破壞規範不變性的情況下, 讓 A_μ 粒子帶有質量。這些 A_μ 粒子出現在弱交互作用中, 稱爲 W 粒子與 Z 粒子。1999年諾貝爾物理獎由 't Hooft 與 Veltman 獲得, 他們的貢獻就是證明 Higgs 機制與 Yang-Mills 理論結合後不會改變純 Yang-Mills 理論可重整化 (renormalizable) 的性質。(Higgs 機制與 Clay 問題沒有太大關係, 所以在此我不深入討論。) 其二, 在1973年人們 ('t Hooft、Gross、Wilczek、Politzer) 發現純 Yang-Mills 場的一個出人意料之外的特性, 那就是代表 Yang-Mills 場交互作用強度的 g 這個量 (常稱爲耦合常數) 在粒子相距越近時越小, 而越遠時越大。這個性質稱爲「漸近自由」(Asymptotic Freedom)。在我們所熟悉的電磁交互作用中, 粒子距離越小相互作用越強, 越遠則越弱。而 Yang-Mills 場的這項特性剛好與此相反, 所以出乎所有人意料之外。

「漸近自由」雖然奇怪, 但物理學家馬上看出它恰好可以用來解決另一個粒子物理長

久以來的謎題, 亦即「夸克局限」(quark confinement) 之謎。物理學家很早就知道很多粒子 (例如質子) 是由更小更基本的夸克所組成的。但是無論由多高的能量都無法從質子中拉 (解放) 出一個夸克, 也就是說實驗上從未找到過「自由」(free) 夸克。如果夸克與夸克間的作用力是由 Yang-Mills 場來傳遞, 則由於「漸近自由」, 夸克會無法脫離彼此而去, 因爲當它們彼此距離越遠, 綁著它們的力也就越大, 所以自由夸克無法存在。這樣一個合併有夸克場與 Yang-Mills 場的理論叫做量子色動力學 (Quantum Chromodynamics, 簡稱 QCD)。物理學家都相信 QCD 是描述強交互作用的正確理論。不過他們還未能嚴格證明「夸克局限」這個基本現象。因爲當交互作用變強時, 微擾法就不適用, 而物理學家也沒有其他可靠的非微擾法可用。

讓我們回到不包括夸克的純 Yang-Mills 理論。「漸近自由」意味著單一個 A_μ 粒子就類似夸克, 沒法自由獨立地存在。物理學家猜測能夠獨立穩定存在的粒子是某種 A_μ 的組合態 (collective state) 或束縛態 (bound state), 這種粒子有時被稱爲膠球 (glue ball), 因爲 A_μ 場被稱爲膠子 (gluon) 場。膠球才是量子 Yang-Mills 理論的激發態, 而且它的質量不爲零。我得強調古典 Yang-Mills 理論中唯一的參數 g 不帶因次 (dimension), 所以是一個在尺度變換 (scale transformation) 之下不變的理論。然而量子 Yang-Mills 理論具有 mass gap, 這個最低激發態的質量破壞了尺度不變性 (scale invariance)。這樣 mass gap 的產生純然是一個量子效應, 這現象常被稱爲「因次遞變」(dimensional transmutation)。

要嚴格證明 mass gap 存在, 當然必須要同時能夠證明量子 Yang-Mills 理論是一個在數學上可以成立的理論。爲什麼我們要擔心量子 Yang-Mills 理論之存在性呢? 因爲量子場論基本上是一個有無窮多維自由度的量子力學問題, 所以就有很多數學分析的問題要解決, 目前只有在一些簡單 (或低維) 的場論中, 才能嚴格地處理這些分析問題。有許多人嘗試用重整化群 (renormalization group) 的觀點來嚴格地建立量子 Yang-Mills 理論, 不過還未能成功。

在這篇短文中, 我只能非常簡略地介紹量子 Yang-Mills 理論中有趣的 mass gap 問題。可能有人會覺得我對問題的說明從數學角度看, 不夠精確。然而給這個問題一個非常清楚的數學敍述, 應該就是答案的一部分。不知道有否讀者能夠有一兩個出色的點子可以幫助解決這個物理學家非常關心的難題。

—本文作者任教於台灣大學物理系—