# 規範場論及微分幾何

邵錦昌

## 一. 敘論

場論及微分幾何分別是物理和數學中的兩門重要的學科。場論肇始於馬克士威爾的電磁學 (我們姑且不論牛頓的重力理論), 如今已是解釋基本粒子的最有力的工具。這兩門學科在歷史上雖然是各自發展, 但是現在大家已了解, 事實上它們卻是同一件事情的一體兩面。然而這種認知過程卻是相當曲折, 前後歷經了將近百年的時間, 並且經過歷史上最聰明的頭腦的努力才達成的。在本文中我們來看一下這段發展的過程, 並且來瞭解它們的內涵及密切關係。

## 二. 高斯、黎曼及嘉當的微分幾何:

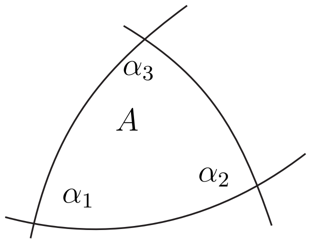
微分幾何在尤拉 (Euler) 及孟日 (Monge) 的手上固然已經有了很多的發展, 但是眞正決定性的結果則無疑的是在高斯 (Gauss) 1827年的那篇“曲面概論”論文上建立的。高斯引進了一種全新的概念, 那就是把曲面本身視爲一個空間, 而不僅是三度空間中的附屬品, 他賦予曲面自己的座標 $x_1$, $x_2$, 並引進第一基本量:

$$ds^2 = E(x_1,x_2)dx_1^2 + 2F(x_1,x_2)dx_1dx_2 + G(x_1,x_2)dx_2^2 \qquad (1)$$

來描述曲面上的弧長元素, 從而曲面上的距離和角度都可由 $E$、$F$ 和 $G$ 三個函數來決定, 他把這些僅與 $E$、$F$ 和 $G$ 有關的幾何性質稱之爲曲面的內在性質。

高斯下一個重要的貢獻則是關於曲面曲率的研究。高斯先是經由曲面的法線在三度空間的變動來定義曲率 $K$, 然而出乎他意外的是, 他發現曲率僅用 $E$、$F$ 和 $G$ 三個量就可以完全的表示出來, 因此曲率是一種曲面的內在性質, 而與它所存在的三度空間無關。這個結果, 充分的顯示了曲率在幾何學裡的中心地位, 高斯很得意地稱之爲“theorema egregium”—最漂亮的定理。高斯還證明了一個關於曲率和測地線所圍成的三角形的有名定理。他證明了曲面上一個由測地線所圍成的三角形的內角和, 並不像在平面上一樣等於 $\pi$, 而是由下面的公式來表述:

$$\iint_A K dA = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi \qquad (2)$$




而當曲率的積分範圍擴充到整個曲面時, 右邊的積分值又等於曲面的拓撲量— 尤拉示性數 (Euler Characteristic)。這個漂亮的定理現在一般稱之爲高斯-伯涅特 (Gauss-Bonner) 定理, 它是第一個將曲面上的局部量 (曲率) 與大域量 (示性數) 連繫在一起的定理, 而它更進一步的推廣, 則更是幾何學發展的關鍵。

同時, 高斯也是非歐幾何學的創始人之一。非歐幾何學的建立, 是希臘時代以來在空間觀念上最重大及革命性的一步, 而高斯除了認淸非歐幾何在邏輯上的合理性外, 他還實地測量三座山峰所形成的三角形的內角和, 來判定我們的空間是否眞屬於非歐的空間。雖然由於那個三角形實在是太小了, 因而沒有得到有意義的結果, 然而高斯的確是歷史上認知到幾何學即是眞實物理學的第一個人。

衆所周知的, 高斯也在物理領域電磁學上做過巨大的貢獻, 但是超凡如高斯者, 可能也想像不到, 這其實也是一種幾何學, 而且是比他的曲面論更簡單的幾何學。

高斯的工作很快的就被他的偉大的繼承者黎曼 (Riemann) 所推廣, 他在1854年面對哥庭根大學教授團 (高斯也在座) 作了一次資格審核演講, 演講的題目名爲“幾何學基礎所依據的假設”。黎曼在這篇劃時代的論文中將高斯的曲面論推廣到 $n$ 維流形上。他將 $n$ 維流形的每個點賦予 $n$ 個座標 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 而兩個極靠近點間的距離平方設定爲:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) dx_i dx_j \tag{3}$$

流形上所有的幾何量都可以由 $g_{ij}$ 的組合來表示。黎曼最大的成就是將高斯曲率由二維推廣到 $n$ 維的流形上, 一般稱之爲黎曼曲率張量, 形狀相當複雜。爲了要寫出它的樣子, 我們必須透過所謂克利斯多夫符號 $\Gamma$ (Christoffel symbol):

$$\Gamma^l_{ki} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} g^{jl}(\partial_i g_{kj} + \partial_k g_{ji} - \partial_j g_{ki}) \tag{4}$$

而黎曼曲率張量則爲:

$$R^l_{ijk} = \partial_k \Gamma^l_{ij} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{nk}\Gamma^n_{ij} - \Gamma^l_{nj}\Gamma^n_{ik} \tag{5}$$

這個式子表示了與黎曼曲率張量有直接關係的並不是 $g_{ij}$, 而是克利斯多夫符號 $\Gamma^l_{ki}$。克利斯多夫符號還有另一重要的用途: 如果我們把黎曼流形上的一個向量函數 $v_i$ 對於座標 $x_j$ 求導數, 所得的 $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ 並不是性質很好的量, 必須要作下列的組合:

$$D_j v_i = \partial_j v_i - \Gamma^l_{ij} v_l \tag{6}$$

才是有用的量, 這個導數叫做協變導數 (Covariant derivative)。經由協變導數, 黎曼曲率張量還符合所謂畢安其恆等式 (Bianchi identity):

$$D_m R^l_{ijk} + D_j R^l_{ikm} + D_k R^l_{imj} = 0 \tag{7}$$

這些都是曲率張量的重要性質。黎曼除了發明彎曲空間的概念, 並解釋如何計算曲率外,

他其實也認眞的考慮過整個的宇宙模型或許不是普通的歐幾理得空間, 而是屬於一種「常數正曲率」的球形空間。不過他這個觀念實在超越他的時代太遠了, 而且必需用到的場論觀念也還未成熟, 因此還得再等半個世紀另一個天才誕生之後才能完成這項工作。

微分幾何下一個飛躍是由嘉當 (E. Cartan) 帶領的, 他引進了所謂活動標架 (moving frame) 及外微分形式 (exterior differential form) 的技巧使黎曼幾何中繁複的計算簡化不少。不過更重要的是他拓展了微分幾何的範疇, 他在活動標架之間介紹進所謂嘉當聯絡 (Carton Connection), 這是一個類似克利斯多夫符號的幾何量, 但是它不一定要與長度度量有任何關係。因此嘉當的幾何空間不必要有長度及角度的觀念, 但是仍然可以有曲率及平行位移等觀念。因此嘉當推廣了空間的觀念, 而黎曼空間是它的一個特例。這樣的觀點最後由愛禮曼在1950年推廣到纖維叢 (fiber bundle) 的聯絡論上。纖維叢的理論我們可以簡述如下: 所謂黎曼幾何可以看成是在底空間的每一點上黏上一個切空間 (tangent space), 而不同點上的切空間之間則利用克利斯多夫符號所定義的協變導數來作聯繫。而纖維叢理論是在底空間的每一點上黏上別的我們有興趣向量空間, 而愛禮曼則能成功的定義"聯絡", 將不同點上的向量空間聯繫起來, 從而討論一種新的幾何學。在這種架構底下, 黎曼幾何可以叫做"切叢"(tangent bundle) 上的聯絡論, 而克利斯多夫符號就是切空間之間的聯絡。至此微分幾何的最後面貌就告完成了。

## 三. 馬克士威爾、愛因斯坦及楊振寧的規範場論:

場的觀念最先是由法拉第提出用來描述電磁現象的, 不過法拉第的數學能力不夠, 沒能建立一個精確的定量理論。完成電與磁二者的最後統合是馬克士威爾, 他綜合了前人觀察的結果, 在1864年用下面四個簡單 (看起來) 的方程式:

$$div\,\overrightarrow{E} = \rho \tag{8}$$

$$curl\,\overrightarrow{B} - \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \overrightarrow{j} \tag{9}$$

$$curl\,\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = 0 \tag{10}$$

$$div\,\overrightarrow{B} = 0 \tag{11}$$

就將所有的電磁現象一網打盡。這四個方程式中, 第一個方程式是庫倫定律, 描述靜電現象。第三個方程式是法拉第-亨利 (Faraday-Henry) 定律, 描述磁場的變化可以產生電場。第四個方程式則是單純的指出磁單荷的不存在。第二個方程式是畢奧-薩伐爾-安培定律, 用來描述電流可以產生磁場。而其中神來之筆的是 $\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ 那一項; 這一項叫做位移電流, 最先並不是在實驗中發現的, 而純粹是馬克士威爾爲了數學上的一致性加上去的。不過如此一來電磁的波動性質就出現了, 而馬克士威爾也預言了光就是一種電磁波。不僅是在解釋物理現象上, 馬克士威爾方程式有驚人的威力, 它們在數學結構上更有很神妙的性質。首先愛因斯坦及閔可夫斯基

(Minkowski) 發現經由下面的對應:

$$F_{\mu v}=\begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

電磁場 $\overrightarrow{E}$ 和 $\overrightarrow{B}$ 可以看成爲四維時空 $(x^0,x^1,x^2,x^3)$ 中的四維張量 $F_{\mu,\nu}$, 而馬克士威爾方程式則可以寫爲更簡潔的形式:

$$\sum_{\mu=0}^{3}\partial_\mu F^{\mu\nu}=j^\nu \tag{13}$$

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}+\partial_\lambda F_{\mu\nu}=0 \tag{14}$$

其中 $j^\nu=(\overrightarrow{j},\rho)$ 是電流密度及電荷密度。第 (14) 式是電磁學中的畢安其恆等式, 不過樣子比黎曼幾何中的簡單多了。由畢安其恆等式我們看出 $F_{\mu\nu}$ 可以表爲:

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{15}$$

的樣子, 其中 $A_\mu$ 叫做電磁位勢。比較一下黎曼幾何中的量, $A_\mu$ 就好像克利斯多夫符號, 而電磁場 $F_{\mu\nu}$ 就好像黎曼曲率張量, 不過關係當然簡單很多。(15) 中隱藏了一個極重要的性質, 那就是如果我們將 $A_\mu$ 作如下的轉換:

$$A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\partial_\mu\phi(x) \tag{16}$$

很容易看得出來 $F_{\mu\nu}$ 不變。由於電磁場 $F_{\mu\nu}$ 才是可量測的物理量, 因此轉換 (16) 是電磁場的對稱性, 叫做規範轉換。如果我們在引入另一物理場 $\phi$, 並考慮下面的轉換:

$$\psi(x)\to e^{i\phi(x)}\psi(x) \tag{17}$$

則很容易證明組合 $\partial_\mu\psi-iA_\mu\psi$ 在 (16) 及 (17) 轉換之下也做如 (17) 式的轉換:

$$\partial_\mu\psi-iA_\mu\psi\to e^{i\phi(x)}(\partial_\mu\psi-iA_\mu\psi) \tag{18}$$

組合 $\partial_\mu\psi-iA_\mu\psi$ 也是一種協變導數, 它提供了物理場 $\phi$ 及電磁位勢 $A$ 作用的方式。轉換 (17) 非常簡單, 它純粹只是乘上一個絕對值等於 1 的函數而已, 因此稱爲 $U(1)$ 轉換。所以會考慮 $U(1)$ 轉換的動機是: $\phi$ 場的絕對值 $|\phi|$ 才是可測的物理量, 因此 (17) 式是 $\phi$ 場的一個對稱性。最先認識到規範轉換 (16) 及 $U(1)$ 轉換 (17) 重要性的是韋爾 (Weyl, 1918), 但是它們卻有非常不尋常的推廣, 可以把所有的關節聯繫在一起。

不過在進一步討論這個推廣以前, 我們必須要來看一下另一個重要的發現, 那就是愛因斯坦在1915年所建立的重力場論或叫做廣義相對論。由於愛因斯坦過人的洞察力, 他發現在一輛加速進行的火車中, 一個人會感受到像重力一樣的吸引力。因此他提出了所謂"等效原則", 認爲重力應該是一種時空現象, 可以用幾何的方法來處理, 重力是時空彎曲之後的一種物理表現。在這種認知之後, 他馬上就體會到他所需要的數學工具早就由黎曼替他準備好了, 而他也將高斯及黎曼在六、七十年前的臆測給具體化了。1917年愛丁頓爵士利用了一次日蝕的機會, 觀察到廣義相對論所預言的光線彎曲, 一時轟動了整個世界。從此重力場是幾何的說法也就爲世人所接受, 我們生存的空間一種黎曼空間, 其彎曲情況則由物質分佈來決定。愛因斯坦可以說是歷史上第一個確實的認識到物理學就是幾何學的人, 因此他下一個雄心壯志就是想將電磁學也能幾何化, 以完成統一場論的鴻圖

大業。不過很不幸的這卻是窮他後半生精力所未能完成的事。

正確的發展是建立在楊振寧和密爾斯(Mills)1954年所發表的論文上。他們的出發點是如下的考慮: 質子和中子除了在電荷有無及壽命長短不同外, 它們其他的性質幾乎完全一樣。因此海森堡 (Heisenberg) 認爲這兩種粒子可以看成是同一種粒子的兩種表態, 而引進了一個二維的同位旋空間, 把質子場及中子場看成是這個空間的兩個分量 $\begin{pmatrix}\psi_n\\ \psi_p\end{pmatrix}$, 而任何適當的物理理論在質子及中子的角色調換之下應該不變。但是場是時空的函數, 因此場論是一種局部性的理論, 所以楊振寧及密爾斯便認爲, 如果這個對稱成立的話, 不同地方的人對於中子及質子的認定未必須要一樣。因此楊振寧及密爾斯認爲眞正的同位旋對稱應該是:

$$\begin{pmatrix}\psi_n(x)\\ \psi_p(x)\end{pmatrix} \to e^{iw(x)}\begin{pmatrix}\psi_n(x)\\ \psi_p(x)\end{pmatrix}. \qquad (19)$$

這個式子與電磁學中的轉換 (17) 非常相似, 但是卻有一個極大的不同, 那就是現在 $\omega(x)$ 是一個二階矩陣函數, 而不是單純的函數了。與電磁學時的情況一樣, 我們需要協變導數來建立適當的物理量, 因此也就需要引進類似電磁位勢的楊-密爾斯位勢 $A_\mu$, 只不過現在它也必須是一個矩陣, 而它的規範轉換則需如下規定:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) \to\ & e^{iw(x)}A_\mu(x)e^{-iw(x)} \\ & +(\partial_\mu e^{iw(x)})e^{-iw(x)} \qquad (20)\end{aligned}$$

如此與 (19) 配合之後才能使協變導數 $\partial_\mu\psi$ $-iA_\mu\psi$ 具有良好的轉換性質。下一步所需完成的工作就是找出在規範轉換 (20) 下變換性質良好的楊-密爾斯場, 他們的結果是:

$$F_{\mu\nu} = \partial_r A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] \qquad (21)$$

這個結果最值得注意的是, 與電磁場比較起來它多出了一項不尋常的 $[A_\mu, A_\nu]$ 項。$[A, B]$ 的意思是 $AB - BA$ , 它的來源是來自於二階矩陣乘法的非交換性; 用更精確的話來說, 楊振寧及密爾斯將規範轉換由可交換的 $U(1)$ 群推廣到不可交換的 $SU(2)$ 群。但是如果我們將楊-密爾斯場 (21) 與黎曼曲率張量 (5) 比較的話, 則又會發現它們之間驚人的相似了。然則楊-密爾斯理論也是一種幾何學嗎?

不像廣義相對論就是黎曼幾何那樣明顯, 楊振寧足足花了將近二十年的時間, 在與幾何學家西蒙斯長期討論之下才找到了答案。現在一切都很淸楚了, 由於每個時空點上的同位旋空間不必看成是一樣, 所以每個時空點都可以有其各自的同位旋空間, 物理空間事實上是一個向量叢, 而規範位勢 $A_\mu$ 則是其上的聯絡。另一方面, 七 O 年代的物理學家們也成功的利用規範場解釋了電弱及強作用, 因此和重力理論一樣, 所有的基本作用都是幾何的。當楊振寧在1975年瞭解了規範場正是向量叢上的聯絡時, 他是深受感動的, 他也相信如果愛因斯坦知道此事也會感到高興, 因爲愛因斯坦曾多次強調, 基本場就其本性而言必須是幾何的。大概最令楊振寧意外的是, 纖維叢理論是他的世交摯友—中國當代幾何學大師陳省身的畢生功業。他們二人交情非淺, 但卻不知道對方早已在自己的領域上作過了決定性的貢獻。因此後來楊振寧對陳省身說「這確實令人激動和費解, 你們數學

家憑空想像出了這些概念。」但陳省身當即反駁道「不, 不, 這些概念不是憑空想像出來的, 而是自然的, 眞實的。」這正是「衆裡尋它千百度, 驀然回首, 那人卻在燈火闌珊處」。最後我們以楊先生的一首詩作爲本文的結束:

贊陳氏類

(原載 (七十年代), 1983年2月)

天衣豈無縫　匠心剪接成
渾然歸一體　廣連妙絕倫
造化愛幾何　四力纖維能
千古寸心事　歐高黎嘉陳

## 參考文獻


1. M.Kline原著, 林炎全、洪萬生、楊康景松譯, “數學史”, 九章出版社。
2. R. Osserman 原著, 葉李華、李國偉譯, “宇宙的詩篇”, 天下文化。
3. 楊振寧著, “讀書教學再十年”, 時報文化。


—本文作者任教於交通大學應用數學系—