微分方程與物理學

鄭國順

一. 前言

在各類數學的系統結構中, 都有一些運算, 譬如說, 在正整數的運算中, 有乘法, 有加法, 給兩個正整數 a 及 b, 我們很容易算出來 $a+b$ 及 $a\cdot b$, 但這些運算的"逆"運算, 有時候就非常困難, 譬如說已知 c, 求 a 及 b, 使 $a+b=c$ 或 $a\cdot b=c$, 這些逆運算就要比原來的運算困難許多, 更一般地說, 設 $P_n(x)$ 是一個 n 次多項式, 若 x 給定, 算 $P_n(x)$ 的值, 這是比較簡單的運算, 但是若給定 $P_n(x)$ 的值要求 x, 這就困難許多了, 不過數學就是因爲這樣的變化而精采, 而吸引人。

在有了微積分之後, 給定一個足夠圓滑的函數 $f(x)$, 我們可以算 $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$, 而這些函數 f 的各階導函數, 可能滿足某一個關係式, 如$f'(x)+f(x)=0$, 現在把情況倒轉, 問是否可以找到函數 f, 使它滿足 $f'(x)+f(x)=0$, 這一類的問題就是稱爲微分方程, 當變數是一維時, 稱爲常微分方程式, 當變數是二維以上時, 就稱爲偏微分方程式。由此可以知道, 微分方程式, 就是一種廣義的"微分逆運算", 就像求 $P_n(x)=0$ 的根一般, 是"乘法及加法的逆運算"。

有這一層的認識, 就知道, 微分方程是數學上非常有趣的問題, 不只這樣, 它有兩個重要的特徵, 首先, 它一定是相當有用的工具, 其次, 過於一般的方程式, 往往是無從下手。因此, 一些與應用相關的方程式類型, 就變成是探討微分方程式優先選擇的題材。

物理學是探討自然界各種現象的科學, 從觀察實驗, 歸納出一些規律, 再用理論模型試圖解釋並預測, 若這些預測經實驗證實, 那麼這個理論模型就暫時被接受, 而用來解釋並預測相關的現象, 這是大部份物理學發展所走的路徑, 而自然界的一些現象, 譬如物體的運動, 熱的傳導以及波動的傳遞等等, 都與速率、速度、變化率等相關, 因此, 微分方程式這個工具, 在理論物理的模型中, 佔的比重與份量, 是其他工具所不能比擬的, 而這篇文章, 主要的是介紹幾個重要的微分方程式, 它們在物理學發展的過程中, 佔據重要的位置, 可以這樣說, 今天科學之所以如此發達, 這些方程式扮演不可或缺的角色。

雖然明知道微分方程式在物理學中必定非常重要, 但是親眼目睹微分方程式解釋物

理現象的效率如此驚人, 也不免對心弦產生極爲強烈的振動。

二、物理學中幾組重要方程式

1. 牛頓 (Newton) 的運動方程式:

對於物體運動現象的觀察及記錄, 是人類一直進行的工作, 尤其是對天體運行的觀測更是不曾間斷, 丹麥天文學家, Tycho Brahe(1546-1601), 對地球相對於太陽的運動, 做長時間的測量及記錄, Kepler(1571-1630) 經過十餘年的分析, 得到有名的 Kepler 三大定律, Newton(1642-1727) 透過微積分, 提出他的物體運動三大定律, 其中第二運動定律就是

$$\vec{F}=m\vec{a},$$

這裡 m 表示該物體的質量, $\vec{a}$ 表示該物體的加速度, 若物體的位置向量是 $\vec{r}(t)$, 那麼 $\frac{d}{dt}\vec{r}(t)=\dot{\vec{r}}(t)$ 就是物體的速度, 而 $\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}(t)$ $=\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t)=\ddot{\vec{r}}(t)=\vec{a}(t)$ 就稱爲物體的加速度, 而 $\vec{F}$ 是物體所受的力。

這個常微分方程式, 開啓了物理學中有關力學發展三百年的基業, 而它的試金石, 就是拿來建造模型解釋 Kepler 的天文三大定律, Newton 提出萬有引力, 兩個質量爲 m_1 及 m_2 的物體, 它們之間有互相的吸引力, 它的方向是在兩物體的連線上, 而它的大小與 m_1, m_2 成正比, 與距離平方成反比。在這些假設條件之下, 設太陽質量爲M而地球質量爲m, 以太陽爲原點, 地球相對於太陽的位置向量爲 $\vec{r}(t)$, 則地球滿足的運動方程式就可寫成

$$m\ddot{\vec{r}}(t)=-G\frac{mM}{r^3}\vec{r}(t),$$

這裡 G 是一個常數。讓人驚異的是這個微分方程式的解, 恰可以解釋 Kepler 的三大定律, 同時也與 Brahe 的記錄一致, 這個大成就確定了牛頓運動定律及萬有引力定律在物理學發展上的地位。

2. Maxwell 電磁理論方程式

科學家經過長期的觀察知道物質可以帶有電荷, 而且電荷有兩種, 正電荷及負電荷, 電荷之間有相互的作用力, 設兩帶電體相距 $\vec{r}_{12}$, 帶有電荷 (有正負號) q_1 及 q_2, Coulomb 定律告訴我們, 這兩個電荷之間的相互作用力是

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}=\vec{F}_1=-\vec{F}_2,$$

此處 $\vec{r}_{12}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$, 而 $\vec{F}_1$ 爲 q_1 所受之力, $\vec{F}_2$ 爲 q_2 所受之力, 因此, 若 q_1, q_2 同號, 則 q_1 及 q_2 受到排斥力, 若 q_1, q_2 異號, 則 q_1 及 q_2 受到互相吸引的力。由此, 而我們可以有 q_2 在 $\vec{r}_1$ 這點所產生的電場定義爲

$$\vec{E}(\vec{r}_1)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_{12}^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}},$$

那麼 q_1 所受的力就是 $q_1\vec{E}(\vec{r}_1)$, 這個觀念讓我們可以擴充到很多電荷的分佈, 而有

$$\vec{E}(\vec{r}_1)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int\int\frac{\rho(\vec{r})(\vec{r}_1-\vec{r})}{|\vec{r}_1-\vec{r}|^3}d^3r,$$

此處 ρ 是電荷密度。若在 $\vec{r}_1$ 有帶 q_1 電荷的物體, 那麼

$$\vec{F}_1=q_1\vec{E}(r_1)$$

就是 q_1 所受的力。

經過一些數學運算後, 這樣子的 $\vec{E}$ 可以滿足

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0},\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=0,$$

這裡, $\vec{E}=(E_1,E_2,E_3)$, $\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$, 因此,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=&\frac{\rho E_1}{\partial x}+\frac{\partial E_2}{\partial y}+\frac{\partial E_3}{\partial z},\ \text{而}\\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=&\Big(\frac{\partial E_3}{\partial y}-\frac{\partial E_2}{\partial z},\frac{\partial E_1}{\partial z}-\frac{\partial E_3}{\partial x},\\ &\frac{\partial E_2}{\partial x}-\frac{\partial E_1}{\partial y}\Big).\end{aligned}$$

同樣的, 雖然自然界中沒找到磁荷, 但是電流會產生磁場, 而磁場對運動中的電荷會有作用力, 這種作用力稱爲 Lorentz force, Ampere 定律告訴我們電流對運動質點 (帶有電荷) 的作用力, 就像 Coulomb 定律一般, 我們可以引進來磁場 $\vec{B}$, 而 $q\vec{v}\times\vec{B}$ 就是電荷 q 所受的力, 經過一番努力, $\vec{B}$ 滿足

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{B}&=0\\ c^2\vec{\nabla}\times\vec{B}&=\frac{\vec{j}}{\epsilon_0},\end{aligned}$$

這裡 $\vec{j}$ 是電流密度, $\vec{j}$ 不隨時間改變。

Maxwell 綜合所有已知的定律, 寫下有名的方程式

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}&=\frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \vec{\nabla}\times\vec{E}&=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ c^2\vec{\nabla}\times\vec{B}&=\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{\vec{j}}{\epsilon_0},\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}&=0\end{aligned}$$

所有電磁學相關的東西都可從此方程出發而得到, 這方程式中, $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ 這一項是 Maxwell 在完成這方程式時加進去的, 這一項非常重要, 有了它, 這些方程式才算完整, 有了它, 電荷不滅,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$$

才成立。

在 $\rho=0, \vec{j}=0$ 時, 我們可以得到

$$\Box\vec{E}=0,\ \Box\vec{B}=0,$$

此處$\Box=\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})$, 這就是電磁波滿足的方程式。在 Hertz 實驗之前, Maxwell 就以他的方程式預言電磁波的存在, 並把電磁波所滿足的方程式都含在他的方程式中了。讓人驚異的是, 在相對論發表之後人們發現, Maxwell 方程式與相對論是相容的。

3. Schrödinger 方程式

二十世紀前三十年, 是量子物理從出生到成熟的時代, 量子物理讓人們從概念上做革命性的改變, 在微觀的物理世界中, 質點的位置與動量是沒辦法同時精確測度的, 譬如說, 一個質量爲 m 的質點, 要描述這質點的狀態, 我們需要有一個波函數 $\psi(\vec{r},t)$, ψ 是一個 Hilbert 空間的元素, 那麼, 在狀態 ψ 之下, 質點的位置及動量是

$$\begin{aligned}<\vec{r}>&=<\psi|\vec{r}|\psi>\\ &=\int\int\int\psi^*(\vec{r},t)\vec{r}\psi(\vec{r},t)d^3r\\ <\vec{p}>&=<\psi|\vec{p}|\psi>\\ &=\int\int\int\psi^*(\vec{r},t)(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi(\vec{r},t))d^3r\end{aligned}$$

ψ 是複函數, ψ^* 是 ψ 的複共軛。

狀態函數 ψ 到底如何隨時間改變而改變呢? 這問題的解答就是 Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} + V(\vec{r}))\psi(\vec{r},t),$$

這裡 $\hbar$ 是 Planck 常數除以 2π, 在這方程式中, 虛數單位出現其中, 這是讓人覺得不可思議的, 方程式及解釋確定後, 量子物理的發展, 一日千里, 可以說是二十世紀最重要的發現之一。

4. Einstein 方程式

二十世紀之初, Einstein 發表特殊相對論, 解決了當時物理實驗上一些予盾, 一九一五年, Einstein 發表一般相對論, Einstein 認爲時空是一個有曲度的連續體, 而時空曲度的改變是因能量-動量的分佈而來, 因此, Einstein 寫下他的方程式

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{C^4}\theta^{\mu\nu}$$
$$\mu,\nu = 1,2,3,4$$

這裡 C 是光速, G 是動力常數, $\theta^{\mu\nu}$ 就是能-動量張量, 而 $R^{\mu\nu}$ 是 Ricci 曲率, $R = g_{\mu\nu}R^{\mu,\nu}$ 是純量曲率, $g_{\mu\nu}$ 就是時空的 metric, 即 $ds^2 = \sum g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\mu$。而

$$\begin{aligned}
\Gamma^\alpha_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}[\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}],\\
R^\alpha_{\beta\mu\nu} &= \partial_\mu\Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\varepsilon\mu}\Gamma^\varepsilon_{\beta\nu}\\
&\quad -\Gamma^\alpha_{\varepsilon\nu}\Gamma^\varepsilon_{\beta\mu},\\
R^{\mu\nu} &= g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}R^\varepsilon_{\beta\varepsilon\nu},\ g^{\mu\nu} = [g_{\mu\nu}]^{-1},
\end{aligned}$$

Einstein方程式, 大部份是憑空而來, 可謂神來之筆, 但是往後的發展是天文物理的主要理論, 而它的複雜度比起前幾個方程式, 簡直不可同日而語。

5. Dirac 方程式

Dirac方程式是描述自旋爲 $\frac{1}{2}$ 的粒子波滿足的方程式, 雖然當時有些蛛絲馬跡, 但大部份仍然是神來之筆。Dirac 方程式爲

$$(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} - m)\psi = 0,\ \mu = 0,1,2,3$$

此處 $i = \sqrt{-1}$, m 爲常數, ψ 爲4個分量之波函數, $x_0 = t$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, 且

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

這個方程式一舉解決了很多有關電子性質的問題, 也讓量子電動力學的發展成爲可能。

由以上五個方程式所描述的物理現象, 可以知道微分方程是個多麼有效率的工具, 有時有效率到讓人驚心動魄。

—本文作者任教於國立中正大學數學系—