

幾何與物理的迷思

蔡宜洵

幾何與物理的發展，歷史上分分合合。值此新世紀元年，目前的情況又是如何。本文旨在用回顧個人經驗的方式與一般讀者分享一些看法。

數學與物理在許多人的學習經驗裡，似乎是彼此獨立的課題，只除了物理計算裡有些數學式子。一直到我唸高中，仍感覺如此。期間曾聽說相對論要利用到微分幾何，但又聽說懂相對論者全世界寥寥無幾，因此只當成特例。當然微積分之於物理學是很重要的，不過這似乎來得自然得多（在學過微積分與物理之後），因此不意外。下面一件事也顯示數學與物理的關聯性是有些陌生的。我在大二時，翻閱了一本書：「數學物理的方法」，它是由大數學家希爾伯特（Hilbert）與庫朗（Courant）合寫的巨著。此書的書名提示“數學物理”（mathematical physics）似乎是一科目，就像數學、物理、化學...一樣，但是我不確定，因此問了某位教授。他回答，“數學物理”只是作者所用的書名而已，不具有其它的意義...。聽了之後，有些失望，但也沒再多問。

在大學期間（1979-1983），個人感覺數學與物理的鴻溝似乎越來越大，除了量子力學與算子理論，相對論與幾何，再也感覺不出二者會有何互相影響。可是若翻閱當時的數

學書籍：微分拓樸（differential topology）、代數幾何（algebraic geometry）、數論、多複變...等等，令人不禁納悶，這麼龐大的數學，難道就只能存在於數學家的想像裡嗎？

關於這點，我的學長姚鴻澤教授（我國傑出數學家，美國2000年麥克阿瑟天才獎得主）當時也與我談到了類似的困惑。他表示數學上研究了低維，就要研究高維；研究了具體的，就轉向抽象的（推廣）。常常低維的，具體的，我們還可認為其有趣，有意義，但是再走下去的意義呢...？他問道，變成爲了求解問題而解問題，那我們何不去解歐氏幾何的證明題（那也困難得很呀！）來一較高下算了。關於這項質疑或類似的，現在如果有學生問我，我仍然難以回答。但是很奇妙的，歷史的發展卻爲這些困惑打開了窗口。

1983-1985期間有次我國院士丘成桐先生訪台演講，最後十分鐘他提了數學與物理的關係。其中他提到了 KdV 方程與代數幾何，大意是說代數幾何的知識可用來幫助解決 KdV 方程；反之對 KdV 方程的了解也可提供代數幾何的若干研究方向。說實話，我當時聽了有些驚奇，也是第一次知道當代的純數學竟然還有跨出本身領域外的用途。（註：KdV方程是19世紀發現的，用以了解孤立水波的物理現象）

在這段期間，也聽說了英國數學家 Donaldson 研究高能物理上楊-米爾斯 (Yang-Mills) 方程 (Yang 是楊振寧) 的對偶解，並應用之於微分拓樸上，而得到驚人的數學結論 (也因此獲 1986 年 Fields 獎)。我記得當時還剛進入哥倫比亞大學數學系當研究生，我們幾位研究生常辯論楊-米爾斯方程是否可有純數學上的動機而自然導出？辯論了半天，還是沒有結果，有些人只好承認這個方程從數學的發展上看，算是真正新的發明 (發現)。(註：可是若限制在複變幾何上，則此方程竟等價於一個純代數幾何上很早就研究過的理論“穩定向量叢”)。

我在哥大當研究生 (1985-1989)，還有兩件事印象深刻。1986 年春，哥大莫毅明教授的幾何特論，在課程進行到一半時，有一天帶點突然地，莫教授說要談微分幾何上摩斯理論 (Morse theory) 的一個新證明。接著就在黑板上寫下，E. Witten 這個名字。一位哥大物理系的博士班生，忙著問「是物理學家 Witten 嗎？」從此，我們幾位做複變微分幾何 (complex differential geometry) 的學生開始認識 Witten。這是因為 Witten 的工作「超對稱與摩斯理論」的想法被法國數學家 Demailly 加以發展，幫助解決一些純粹複變幾何的問題。(Witten 此工作還有其它發展，例如 Floer 等人的工作，在此省略)

另外一件事是有關於物理上的超弦理論 (Superstring Theory)。哥大的榮譽教授 Lipman Bers (當時已退休) 曾是黎曼面理論 (Riemann Surface) 的領導學者之一。超弦理論在 80 年代中期後的發展用到許多黎

曼面理論的知識，因此在哥大也多少會討論一些。在數學系裡，Phong 教授與物理系的 D'Hoker 教授合作寫了不少論文，也送給我們其中一些研究生看。論文所用的語言，既理論物理卻又純數學，嚇了一些研究生，我還記得其中有一位說到「這還要唸十年書後，才看得懂！」

Donaldson 理論及超弦理論的刺激對我們研究生確有一些影響。我們幾位較談得來的同學還利用暑假時間報告量子力學與場論。但是後來因為還有研究工作要做，大家都很忙，尚未持續很久，就結束了。

在 80 年代這段期間，我個人的看法是，幾何與數學物理之間雖然有豐碩的影響及成果，但是似乎還未形成一個較具體的大研究方向或領域。現在回顧起來，當時所涉及的物理觀念較偏重在古典場論上，量子場的想法尚未真正與數學相融。再加上超弦理論也還正在發展之中而已，因此彼此的影響有所限制，但到了九十年代後，開始有很大的轉變了。

在 1991 年春美國約翰霍浦金斯大學 (John Hopkins) 所舉辦的一個大型研討會上，我又一次聽到了丘成桐先生的演講，是關於鏡對稱 (Mirror symmetry) 的數學猜測。這個根源自超弦理論的大膽猜測自提出到現在已將近十年，問題尚未完全解決。(國內對此問題研究最深入者為中央研究院的阮希石先生。) 根據丘教授的說法，當物理學家們第一次這樣提出時，他無法相信會是真的。可是慢慢當一些間接證據顯示出來，以及一些特例被檢驗出來之後，便很難不去正視物理所預言的鏡對稱及其推論。

在1995年美國數學學會所舉辦的為期三週的大型研討會上，Witten受邀作一系列的專題演講。期間我發覺數學家似乎比較認真聽講了。原因之一，必然是才出現未幾的Seiberg-Witten理論相當程度的解決了Donaldson理論所還未能解決的問題。因此Witten的演講著重於介紹超對稱(Supersymmetry)的觀念給數學家(超對稱是Seiberg-Witten理論的物理語言之一)。Witten並在演講裡鄭重地宣稱量子規範場論將是下一世紀(21世紀)的數學課題之一，雖然在20世紀它還不算是。這句評論顯然在演講後引起許多聽眾私下討論。

我於1996-1997在英國劍橋大學訪問，當時正是超弦理論所謂的「對偶性」(duality)發展得很熱門的階段。位於劍橋的牛頓數學科學研究所(Newton Institute for Mathematical Sciences)也舉辦許多的活動來探討此對偶性。對偶性的研究提出一些新的純數學問題。著名的英國數學家Atiyah在某個研討會上開場白提到希望年輕的數學家大膽的向這些數學問題挑戰...，物理學家Osborn(一位曾研究超對稱的名學者)接著語帶保留地說這恐怕是巨大的挑戰喔...，Atiyah則再回應說確實是巨大的挑戰，但我們也有最好的頭腦在這裡...。我相信在座的年輕英國數學家與學子必深受到一番激勵。

寫到這裡，再對照19世紀法國大數學家潘伽略(Poincare)的說法「若我們希望預見數學的未來，則適當的途徑是我們要了解科學的歷史與現在的狀況」。從當代幾何的發展來看，這恐怕是潘伽略所樂見的吧。(本文以數學的觀點為主，數學的發展對物理或其它科學的影響或應用，在此省略，見註三)

註一. 物理學上的超弦理論在物理上的價值一直有極端正反的評價，本文所提主要是指此理論所涉及到的數學，或引起的新的數學問題。

註二. 對偶性(duality)或譯為二元性，是一個很深奧的現象(或預測)。利用對偶性的相關理論可提出代數幾何上很深刻的新的問題，並且此物理所預測的答案，往往與數學上的證明結果一致。只是對偶性的數學本質是什麼，仍難以了解。用俗語來說對偶性，則作者不妨提「遠在天邊，近在眼前」，這句成語。有些相同的事情，用不同的角度看起來會如此不同，遙遠。這是怎樣發生的?「文章本天成，妙手偶得之」，似是目前的寫照，卻也是刺激後續發展，人類探索未知的動力。

註三. 數學幫助理論物理進步的例子，幾何方面有：

1. 英國的霍金(Hawking)/潘羅斯(Penrose)運用微分拓撲於黑洞理論；
2. 丘成桐/孫理查(R. Schoen)證明了廣義相對論正質量猜測；
3. 丘成桐的卡拉比-丘空間(Calabi-Yau space)以及研究愛因斯坦方程的解。根據作者的了解，上述第三項成就目前理論物理仍難有任何物理上有說服力的論證可解釋，這是數學很實質的貢獻之一。

註四. 我國年輕數學家劉艾克教授，現任教於美國加州大學柏克萊分校，在弦理論對偶性的幾何問題上，有重要的貢獻。我國物理學家們對此類問題也有許多成果及貢獻，但是物理非筆者本行，暫不談論。