淺談場量子化與低維拓樸

鄭日新

隨著量子力學的發展, 量子化後的物理系統恆爲精密的實驗所支持, 而描述量子系統的“新”數學在某種意義下也推廣了舊有的數學。本文嘗試介紹若干低維拓樸理論與某些場量子化理論的關聯, 而“新”的精細拓樸不變量常可理解爲有關場算子的 n-“point” 相關 (correlation) 函數。我們將提到因爲這個看法而導致研究方法改變的一個例子: 即 Donaldson 四維微分結構不變量的研究因 Seiberg-Witten 場論的看法主方程由瞬息子 (instanton) 方程轉到較易處理的某種單極 (monopole) 方程 (現在叫 Seiberg-Witten 方程), 另外也提一個量子場論思想對原拓樸問題思考方式影響的例子: 即某種精細的三維觸結構拓樸不變量的定義。

1. 從量子化談起

對一個物理系統的描述, 須要知道什麼是它的態 (state), 什麼是可觀測的物理量 (observable)。一般描述量子物理系統中的態是用所謂 Hilbert space的數學語言, 而物理量則爲作用其上的算子。當我們對某物理態 $|\phi >$ 去測量某物理量 O 時, 我們量到的是 O 的某個固有値 (eigenvalue) λ_n, 這裡 $O|\phi_n >= \lambda_n|\phi_n >$, 而量到 λ_n 的機率是 $|\langle\phi_n|O|\phi\rangle|^2$。我們現在看一個點粒子的量子力學, 其 Hamiltonian H (代表能量) 爲

$$H = -(\hbar^2/2m)\nabla^2 + V(x).$$

這裡 ∇^2 爲 Laplacian 算子, $V(x)$ 爲位能函數。($\hbar$ 表 Planck 常數, m 表粒子質量) 令 $x(0)$ 表位置算子, 即其固有値表粒子位置, 在通常用波函數 ϕ 表達態時, $(x(0)\phi)(y) = y\phi(y)$ (一維時, 以下同)。令時間 t 時的位置算子 $x(t) = \exp(iHt)x(0)\exp(-iHt)$。調整 H (加一常數) 使其最小固有値爲 0, 對應的固有向量 $|0>$ 稱爲此系統的基態 (ground state)。取 $t_1 > t_2 > \cdots > t_n$, $\langle 0|x(t_1)\cdots x(t_n)|0\rangle$ 或簡單表爲 $\langle x(t_1)\cdots x(t_n)\rangle$ 是極重要的物理量, 所謂的 n-point 相關函數。在量子場論中此等量 (見後述) 有直接的物理意義, 它們包含了所有的物理預測。它們也叫 Green 函數, 可驗證 2-point 相關函數在某些情況確爲一般方程意義下的 Green 函數。此 n-point 相關函數有 Lagrangian 描述, 即用 Feynman 路徑積分來表示。對應的 Lagrangian $L = (1/2)m(dx/dt)^2 - V(x)$, 作用量 $S(x(\cdot))$ 爲 L 對時間的積分。我們有如

下的公式:

$$\begin{aligned}&\langle x(t_1)\cdots x(t_n)\rangle\\ =&N\int[Dx]x(t_1)\cdots x(t_n)\exp((\frac{i}{\hbar})S(x)).\end{aligned}$$

這裡 N 是一個正規化 (normalization) 常數。注意我們用 $x(t)$ 表時間 t 時路徑 x 之位置, 也表量子化後相關之算子如前述。積分把所有路徑 $x(\cdot)$ 積掉了, 剩下的是參數 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的函數。當物理系統由“場” (field) 來描述 (如電磁場, 重力場等), 它定義域中的空間座標可視爲標示某粒子的參數, 量子化後, 場變成場算子 (field operator), 而其定義域中的空時座標仍爲參數。一個常提的例子是 Klein-Gordon 場 φ, 它的作用量 $S(\varphi) = (1/2)\int d^4x\ \{D_\mu\varphi D^\mu\varphi - m^2\varphi^2\}$。這裡 D_μ 依序 $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ 表時空的微分, 而 D^μ 依序等於 $D_0, -D_1, -D_2, -D_3$。我們有類似點粒子的 n-point 相關函數如下:

$$\begin{aligned}&\langle\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\rangle\\ =&N\int[D\varphi]\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\exp((\frac{i}{\hbar})S(\varphi)).\end{aligned}$$

這裡 $x_1, \cdots, x_n$ 表 n 個時空點, 而如前 $\varphi(x)$ 在左式中表量子場 (場算子)。透過 Feynman 積分的操作可得

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle = \hbar\delta^4(x_1 - x_2).$$

即 $(1/\hbar)\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle$ 爲古典運動方程 $(D_\mu D^\mu + m^2)\varphi(x) = 0$ 即所謂 Klein-Gordon 方程的 Green 函數。我們在後文中將發現許多拓樸不變量均可理解爲某種量子場論的相關函數。

2. 拓樸不變量與相關函數

首先給一物理系統後, 我們會觀察它有什麼對稱性, 然後導出相關守恆量, 叫 current 及 charge。數學上來說, 即對所關切之動力學變數 (dynamical variable) φ 給一 Lagrangian(density) $L(\varphi, D_\mu\varphi)$ 及作用量 $S(\varphi) = \int d^4xL(\varphi, D_\mu\varphi)$。其相關 Euler-Lagrange 方程的解叫做古典場 (classical field)。假如 $\delta\varphi$ 表某對稱作用於 φ 的一階變量, 則沿古典場 φ 計算 $\delta S(\varphi) = 0$ 可得

$$D_\mu j^\mu = 0,\ j^\mu = \delta\varphi\{DL/D(D_\mu\varphi)\}.$$

這裡 D 表偏微分。j^μ 即由此對稱產生的 current 或 current 向量。定義在時間 t 的 charge $Q(t) = \int d^3xj^0(t, x)$。由散度定理容易驗證 $dQ(t)/dt = 0$, 即是說 charge $Q(t)$ 守恆。注意在電磁場的情況, $U(1)$ 對稱給出的 (j^μ), $\mu = 1, 2, 3$, 叫電流密度, 而 Q 就是通常所稱的電荷。一般 (含時空對稱) 來說, 時空平移對應的 current 叫能動量張量 (energy-momentum tensor), 空間旋轉對應的 current 叫角動量, $U(1)$ 規範轉換對應的 current 叫電流 (電荷) 如前述。$SU(2)$ 規範轉換對應的 current 叫 isospin 等等。

雖然沿古典場 $D_\mu j^\mu(x) = 0$, 但量子化後的 current 未必守恆, 即是說 $D_\mu\langle j^\mu(x)\rangle$ 可能不爲零。若此情況發生, 我們說有 (quantum)anomaly, 而此非零量 $D_\mu\langle j^\mu(x)\rangle$ 也叫 anomaly。拓樸上有名的例子是 Dirac 算子的指標 (index)。考慮一個閉 n 維流形 M, 其上有度量、規範場及無質量的費米子 (fermion) ϕ, 度量及規範場決定

了 Dirac 算子 D, 規範對稱給出了所謂 chiral current $j_5^\mu(x) = \phi^*(x)\gamma_5\gamma^\mu\phi(x)$。這裡 γ_5, γ^μ 是通常的 Dirac γ 矩陣。沿古典 Dirac 場 $\phi : D\phi = 0$, 易知 $\nabla_\mu j_5^\mu(x) = 0$。這裡 ∇_μ 是含規範場的協變 (covariant) 微分。但量子化後 $D_\mu\langle j_5^\mu(x)\rangle$ 不一定爲零, 事實上可算出它的積分等於兩倍 Dirac 算子的指標, 記爲 Index D:

$$IndexD = (1/2)\int d^n x D_\mu\langle j_5^\mu(x)\rangle.$$

我們叫 $D_\mu\langle j_5^\mu(x)\rangle$ chiral anomaly。(對更多細節有興趣的讀者, 可參考 [3])

接著我們談三維拓樸中的紐結 (knot) 理論。有一個著名的 (定向) 鏈結 (link)(若干個紐結相扣在一起) 不變量叫 Jones 多項式, 記爲 $V_K(t)$($t^{1/2}$ 的 Laurent 多項式), 這裡 K 表一鏈結。設若 K 由 n 個紐結 $K_1, K_2, \cdots, K_n$ 相扣在一起, 可考慮規範場繞紐結 K_j 的環移值, 記爲 $A(K_j)$, 一般叫做 Wilson loop。在八零年代末期, Witten 考慮 $A(K_j)$ 在 Chern-Simons 規範場論下的期望值, 發現 Jones 多項式 $V_K(t)$ 可理解爲下列 n-“point”(n-“knot”) 相關函數:

$$\begin{aligned}&\langle A(K_1)\cdots A(K_n)\rangle\\ =&\int[DA]e^{(ik/4\pi)CS(A)}A(K_1)\cdots A(K_n)\end{aligned}$$

(乘以 $t^{w(K)/4}, w(K)$ 爲所謂 writhe 數)。這裡 $t = \exp(-2\pi i/(k+2))$。而 Chern-Simons 作用量 $CS(A) = \int tr(AdA - (2/3)iA^3)$。([4])

另外值得一提的是物理學家 Ashtekar, Rovelli和 Smolin 等利用 Wilson loop $A(K) \equiv \langle K|A\rangle$ 來研究重力的量子化。描述重力的度量被表爲某種規範場 A。量子化後的波函數 $\phi(A)$ 透過幾何型的 Fourier 轉換: $\phi^\wedge(K) = \int dA\phi(A)\langle K|A\rangle$ (叫 loop 轉換) 可用一紐結不變量 $\phi^\wedge$ 來取代, 這就是量子重力的一個態 (state)。而紐結的等價性對應於度量的微分同胚 (diffeomorphism constraint)。

談過了 n-point 相關函數中“point”是一維 (紐結) 的情形後, 現在談“point”是上同調類 (可用閉曲線、 曲面等代表)。有名的一個例子是辛流形上同調的量子積 ((small)quantum product), 記爲 $a * b$, 其中 a, b 爲上同調內的元素。$a * b$ 的定義包含了相關仿全純 (pseudoholomorphic) 曲線的計數。由上同調的一組基底可定出一內積, 表爲 $g(\cdot,\cdot)$。另一方面, 令$O(a)$, $O(b)$ 等表某一非線性 (twisted) σ-模型相關的算子, 量子積可用此模型的 3-point 相關函數來理解, 其關係如下:

$$g(a * b, c) = \langle O(a)O(b)O(c)\rangle.$$

辛流形的上同調帶著 $*$ 的乘法, 一般叫量子上同調 (quantum cohomology)。(對更多細節有興趣的讀者, 可參看 [1])

3. 量子場論對拓樸的衝擊

迄今衝擊最大的例子首推 Seiberg-Witten 理論對四維流形研究的影響。在九四年前人們用所謂 Donaldson 不變量來瞭解四維流形的微分結構, 其定義牽涉到瞬息子 (instanton) 模空間的緊緻化, 技術上頗費手脚。令 X 表一閉四維流形, $\sum_1, \cdots, \sum_n$ 表

代表 X 第二下同調類的曲面。相關的 Donaldson 不變量記為 D_X $(\sum_1, \cdots, \sum_n)$。九零年代初期 Seiberg 和 Witten 研究所謂$N = 2$超對稱 Yang-Mills 理論。Witten 看出了某些與 BRST 對稱有關的算子, 記為 $O(\sum_1)$, $\cdots, O(\sum_n)$。而 Donaldson 不變量可理解為這些算子的相關函數:

$$\begin{aligned} &D_X(\textstyle\sum_1, \cdots, \sum_n) \\ &= \langle \exp O(\textstyle\sum_1) \cdots \exp O(\sum_n)\rangle. \end{aligned}$$

這裡 n-"point"相關函數的"point"是曲面 $\sum_j$。因為有關場論的真空 (或基態) 由一複參數 u 所描述。期望值的積分也要對 u 做。又因為總積分獨立於 X 上度量的選取, 令 $g_t = tg$。然後看當 $t \to 0$ 及 $t \to \infty$ 積分對 u 分佈的變化。Witten發現當 $t \to 0$ 主要貢獻來自 $u = 0$, 這裡用瞬息子方程的解空間計算, 即與原來 Donaldson 不變量的定義一致。當 $t \to \infty$ 主要貢獻來自 $u = \pm\Lambda^2$, 這裡應用"某單極方程" 的解空間計算。這個單極方程就是後來所謂的 Seiberg-Witten 方程。用這個方程所定的不變量比原來 Donaldson 不變量在技術上容易掌握多了, 卻有與 Donaldson 不變量相同的功用。因此九四年後, 整個研究方向就被 Seiberg-Witten 理論所主導了。

我們再提一個量子場論思想對原拓樸問題思考方式影響的例子。給一閉觸 (contact) 三維流形, 我們看與觸結構相關的向量場的週期軌跡線。想經由軌跡線的適當計數得到觸結構不變量 (contact invariant)。第一個想法當然是透過仿全純曲線連繫軌跡線而定義邊界算子 D (boundary operator), 進而有同調群 (Floer type), 這就是一個觸結構不變量。但在檢驗 $D^2 = 0$ 時, 須要強的條件, 這使得應用時大打折扣。情況持續若干年, 直到有人看出 D 應理解為某種場論中的 BRST 轉換 δ_B, 而 δ_B 作用在相關的 (算子) 代數上。所以應納入週期軌跡線作為生成元的代數結構。此一想法的改變使 $D^2 = 0$ 自然成立, 無須任何條件。而所定出的觸同調代數 (contact homology algebra) 即 δ_B 的 BRST 同調。如果視相關的 BRST charge 為 Hamiltonian, 則此觸同調代數可理解為系統的"真實"基態全體。(對更多細節有興趣的讀者, 可參看 [2])

參考文獻

1. D. Cox and S. Katz, *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 68.
2. Y. Eliashberg, A. Givental and H. Hofer, *Introduction to Symplectic Field Theory*, Math. SG/0010059.
3. D. Friedan and P. Windey, *Supersymmetric Derivation of the Atiyah-Singer Index and the Chiral Anomaly*, Nuclear Physics B235[FS11](1984), 395-416.
4. L. Kauffman, *Knots and Physics*, World Scientific Pub. (1991).
5. E. Witten, *Monopoles and 4-manifolds*, Math. Res. Letters 1 (1994), 764-796.

—本文作者任職於中央研究院數學研究所—