數播信箱

李怡嚴來函

編者先生:

剛收到90年3月出版的「數學傳播季刊」, 看到 p.82-86有石厚高先生所寫的「祖沖之計算圓周率之謎」一文, 提到需要計算數萬邊的圓內接正多邊形; 而一部份開方根需要準確到數萬位小數點。現代有電腦, 以及能夠處理許多位小數的 Mathematica 軟體工具, 當然沒有問題。可是我想也許不需要這樣麻煩。石先生的大文內給出由單位圓內接正 n 邊形的邊長 $s(n)$ 求內接正 $2n$ 邊形之邊長時之遞迴公式:

$$s(2n)^2 = 2-[4-s(n)^2]^{0.5}. \qquad (1)$$

如果用 $t(n)$ 來代表單位圓外切正 n 邊形的邊長, 則容易看出:

$$[4-s(n)^2][4+t(n)^2] = 16. \qquad (2)$$

$t(n)$ 可以用來求 π 的上限。可是我想, 總有人會嘗試去取 $s(n)$ 與 $t(n)$ 的平均, 看是否可得較好的結果。在嘗試多次以後, 也許會發現, 取較偏重 $s(n)$ 的平均會更好。其實最好是取 $[2\times s(n)+t(n)]/3$。本來這就相當於消去 sin 與 tan 三角函數指數級數的三次方項。我不敢期望古人會發現這一點, 可是祇要有人想到嘗試各種平均值, 則比較 n 邊形與 $2n$ 邊形的結果, 不難由試誤得出上述的組合 (即使不了解原因)。用了這樣的組合, 不難將多邊形的邊數, 與小數點的位數需求大量減少。我用老式的 Turbo-Basic 軟體的 Double Precision 程式試了一下。由正四邊形開始, 程式是:

```
10 DEFDBL A-C: DIM  A(5), B(5), C(5)
20 A(1)=2-2^.5
30 A(2)=2-(2+2^.5)^.5
40 A(3)=2-(2+(2+2^.5)^.5)^.5
50 A(4)=2-(2+(2+(2+2^.5)^.5)^.5)^.5
60 A(5)=2-(2+(2+(2+(2+
   2^.5)^.5)^.5)^.5)^.5
70 FOR N=1 TO 5:
   B(N)=(16/(4-A(N)))-4:
   C(N)=2^(N+1)*(2*A(N)^.5+B(N)^.5)/3
80 M=2^(N+2):
   LPRINT M;"Sides - pi=";
   C(N):NEXT N:END
```

結果是:

```
8   Sides - pi= 3.145547805608732
16  Sides - pi= 3.141829394196878
32  Sides - pi= 3.141607296173712
64  Sides - pi= 3.141593566385137
128 Sides - pi= 3.141592710602667
```

在上面的程式中, 我沒有用遞迴式去算 A(N); 如此我可以利用 Turbo-Basic 計算時較 Double Precision 多兩個小數點位的特點。不過無論如

何, 所有開方的準確度不會超過十八位。可以看到結果有多好! 由正六邊形開始程式是:

```
10 DEFDBL A-C: DIM  A(5), B(5), C(5)
20 A(1)=2-3^.5
30 A(2)=2-(2+3^.5)^.5
40 A(3)=2-(2+(2+3^.5)^.5)^.5
50 A(4)=2-(2+(2+(2+3^.5)^.5)^.5)^.5
60 A(5)=2-(2+(2+(2+(2+
   3^.5)^.5)^.5)^.5)^.5
70 FOR N=1 TO 5:
   B(N)=(16/(4-A(N)))-4 :
   C(N)=2^N*(2*A(N)^.5+B(N)^.5)
80 M=3*2^(N+1):
   LPRINT M; "Sides - Pi=";
   C(N):NEXT N:END
```

結果是:

```
12  Sides - pi= 3.142349130544657
24  Sides - pi= 3.141639056219992
48  Sides - pi= 3.14159554040839
96  Sides - pi= 3.141592833808796
192 Sides - pi= 3.141592664850249
```

阿幾米得其實已經算過正九十六邊形的周長。可惜他沒有發現上述這種三分之二與三分之一的組合方式, 不然, 他的結果會準很多。祖沖之是否發現了? 我沒有可供判斷的資料。可是如果他眞的發現了, 我也不會很驚訝。

我希望提出這個可能性供石先生參考。最後, 我想引一段書來表達我的感想。在錢大昕「十駕齋養新錄」卷第十七, 竹汀先生有一段筆記:「古之九數, 圓周率三, 圓徑率一。... 祖沖之更開密率; ... 指要精密, 算氏之最者也。... 用以步天, 宜若確乎不可易矣。予族子江寧教授唐 (號溉亭) 獨疑之: 謂「圓周曲線也, 圓徑直線也; 以各等邊線用句股法取其弦遞析之, 愈析愈細, 終無合爲一線之理。則所謂密率者, 猶未密也! 今試以木製大圓輪, 其徑一丈, 以長竹篾刻尺寸分秒度之, 得實周三丈一尺六寸有奇; 乃知沖之密率猶失之弱。蓋以直求曲, 勢必不能密合; 非算之不精, 於理有未盡也。」昨元和李生銳 (字尚之) 告予云:「秦九韶「數學九章」卷三, 環田三積問術: 以圓徑自乘進位爲實, 開平方得周。設徑一億, 依術推之, 得周三億一千六百二十二萬七千七百六十六奇。」與溉亭之說合。則古人已有

先覺者。」錢大昕並非算學專家 (雖然在考據中常插入步算過程), 他的誤解可以瞭解; 可是乾嘉時「談天三友」之一的李銳應該知道得更清楚: 不可能用十的開方根表示圓周率。否則用一個句一股三的直角三角形, 取其弦長就得圓周率! 照理李銳應已有足夠的極限知識了, 除非他引秦九韶是爲了迎合錢大昕。

李怡嚴4/13/2001

國立清華大學退休教授

石厚高覆函

敬啓者:

謝謝編輯部轉來李怡嚴教授看了拙著「祖沖之計算圓周率之謎」的迴應。作者是得不到掌聲的, 李教授把拙文看的這麼仔細, 又設計電腦程式作驗證, 實感榮幸。有興趣的讀者可以對照拙文與李教授來函, 當然可以感受到後者的作法非常高明, 至於祖沖之有沒有想到, 那就不是芸芸衆生能知道的了。

此致

數播編輯部 順頌

編祺

石厚高啓 90.5.28