略論隨機性 註1

徐瀝泉

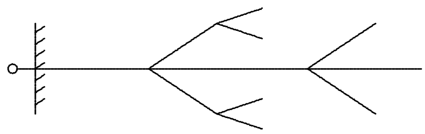
1. 話說隨機性

俗話說, 有緣千里來相會, 無緣相見不相認。緣者, 機遇也。機會出現了, 碰到了機會, 碰到了好機會、好事情就說交好運; 反之, 就說倒霉了。其實, 在日常生活中碰到好事也罷, 碰到壞事也罷, 都是交替出現的。帶有很多偶然性。偶然性即隨機性, 具有偶然性的事件, 叫做偶然事件或隨機事件。偶然性或偶然事件的反面就是所謂的必然性或必然事件, 一般說來:

必然事件就是在條件 C 下一定會發生或一定不會發生的事件; 而隨機事件則是在條件 C 下可能發生也可能不發生的事件。

事物發展是多層次的, 必然與偶然交互作用。

例如, 植物的種子札根於某地某處 (第1層次) 默默地度過一段時間後, 在一定條件下破土而出 (進入第2層次), 這時它只有一根主幹, 過了一段時間, 在某時刻又分成幾支, 它分叉的時間和支數都是隨機的 (3層), 每一支又平靜地生長 (4層), 再分叉 (5層), 如此等等 (如圖一)。



圖一

其實, 一個人一生的經歷又何嘗不是如此。嬰兒呱呱墜地, 他的降生充滿了偶然性 (1層); 他平靜地度過童年 (2層); 到了十七、八歲, 站在人生的十字路口 (分叉點), 在升學和就業之間進行隨機地選擇 (3層); 跨過這一步, 他可以相當穩定地學習和工作一段時間 (4層), 學業 (事業) 有成又站到一個分叉點上, 比如晉級、提升等等 (5層); 一般說來, 他也要經歷戀愛、結婚、生育這些階段 (5層或6層上的分叉), 俗話說, 千里姻緣一線牽, 夫妻的結合就有不少偶然的因素; 直到某一偶然的時刻在某個偶然的地點, 出於某種偶然的原因, 必然結束他那偶然的生命 (最後一個層次)註2。劇本「何文秀」(越劇)"算命"一場中一段唱詞, 生動而又曲折地道出了何文秀21歲前的坎坷歷程, 他唱道: 時辰八字排分

註1: 1999年作者在無錫市高中青年骨幹教師研修班上的專題講座。
註2: 見參考文獻 [1]。

明, 文秀要算自己命, 別人的命兒不會算, 自己的命兒算得準 ..., 一周兩歲娘懷抱, 三周四歲離娘身, 五歲六歲無關口, 七歲八歲上學門, 九歲十歲有文昌關, 十一十二倒安寧, 十二算到十七歲, 十七歲上有災星, 十七歲命犯天狗星, 無風起浪波濤生, 朝中奸臣來殘害, 害他全家一滿門, 只有此命能逃生, 他是窮途落魄去飄零, 可比瞎子過竹橋, 破船過江險萬分, 幸得紅鸞喜星照, 路逢淑女私贈銀, 男無聘金爲表記, 女無媒證自成親, 十七算到十八歲, 十八歲又逢大難星, 牢獄之災飛來禍, 人命官司加在身, 命犯小人暗相害, 受屈含冤命難存, 幸虧又逢貴人星, 貴人相救得重生, 十八過去十九春, 獨占青龍交好運, 今年正當二十一, 金榜得中做公卿, 目下夫妻可相會, 冤案昭雪得歡慶 ......。

邱吉爾說: "一個人活得愈長, 他就愈認識到一切取決於機會。任何人, 哪怕只要回顧一下10年前的經歷, 他就會看到某些本身毫不重要的細小事件, 實際上都左右了他的全部命運和前程。" 同註2 他所說的所謂細小事件, 大都集中在那些分叉點上, 我們中間哪個人沒有這個切身的體會呢?

地球的起源和地球上生物的變遷, 也是如此。每個國家的歷史也都有著許多分叉點, 這中間可以作許多假設。例如, 假設鴻門宴上項羽殺了劉邦, 會是個什麼樣子, 還會有漢朝和「三國演義」嗎? ...... 假設康熙帝時, 中國就能全面對外開放, 當時中國是世界上的三強 (與歐洲、俄羅斯) 之一。這是中國歷史上錯過的一次最大機遇。順便說一句, 數學家、微積分發明者之一的萊伯尼茲就在中、俄、歐之間做了不少聯絡工作, 給沙皇與康熙皇帝寫了許多信, 他致力於三強聯合發展科學, 造福人類。康熙帝不僅文治武功還擅長數學與機械。[註3]

事物發展過程的一般法則是, 必然性與偶然性相互交替出現和交替作用。它處於兩個分叉點之間時, 其發展相對說來比較穩定, 這時必然性起主導作用, 但也不排除有次要的隨機因素和次要的分叉點存在。因爲誰也不能保證不會發生突變事件, 即偶然性的突變或小概率事件, 所謂小概率事件, 一般說來是不可能出現的。正是由於人們相信和承認"小概率事件的不可能性原理", 才能大膽地進行工作和學習。不然, 誰還敢出門, 誰還敢乘車? 話又說回來, 你躲在家裡, 在街上步行, 在花園散步就絕對安全了? 飛來橫禍的事也屢見不鮮。"小概率事件一旦出現"它會給人帶來不可思議的結果與後果。它可能給人帶來重大災難, 也可能使人倖免於難。

據說, 在美國發生這樣的一件事。有15人將參加某晚7:15時的排練, 但由於這15人因各種不同的原因而全部遲到了, 而且都在7:25時之後到來。而在那晚的排練室裡被人放了定時炸彈, 7:25正時爆炸, 全都倖免於難。

1998年中國大陸抗洪救災期間, 一隊救災的戰士因過橋橋突然倒塌, 幾十名戰士全部遇難。這是小概率事件, 但恰有一名因繫鞋帶沒有迅速跟上隊伍上橋而倖免於難。更是小概率事件。

註3: 李迪, 康熙帝與數學, "數學教育·數學史·數學文化史·信息科學"國際研討會論文集, 1998.4 於北京。

彭加來 (Poincaré) 說過“最大的機遇莫過於一個偉人的誕生” [同註2]。因爲天才和偉人的誕生會造福於人類。牛頓就是這樣的偉人之一, 堪稱科學之父。他一生爲科學獻身而終生未娶, 被英女皇封爲爵士。當然, 偉人的誕生除了機遇之外還需要其他條件, 比如至少說還要天才和勤奮。這裡我們只討論“機遇”。由於某個人的誕生是一系列隨機事件的復合: 別的不說, 單論父母、祖父母、外祖父母,...... 的結合, 前面我們說過夫妻結合本身就是這一復合。「白蛇傳」中的開頭, 在那桃紅柳綠的陽春三月, 老艄公在西湖中搖著小船, 載著許仙、白娘子和小青妹3人, 邊劃邊唱道:“最愛西湖三月天, 斜風細雨送游船, 十世哟修來同船渡, 百世修來共枕眠, 共枕眠。”就道出了這一事實。所以某個特定的人要成爲偉人, 可能性是很小的, 甚至是極小的。屬於小概率事件。但儘管如此, 各個時代仍然偉人輩出, 這是什麼原因呢? 一個人成功的概率雖然極小, 但幾十億人中總有佼佼者。這就是所謂的必然寓於偶然之中。我們把偉人的出現權作一次隨機試驗的實現。

假設該試驗中出現的小概率事件 A 的概率爲 ε, 不論 $\varepsilon>0$ 多麼小, 如果把它獨立重複試驗下去, 那麼 A 遲早會出現1次, 從而也必然出現任意多次。這是因爲第1次試驗中不出現 A 的機率爲 $1-\varepsilon$, 那麼, 連續經過 n 次試驗後, 不出現 A 的概率爲 $(1-\varepsilon)^n$, 因而前 n 次試驗中 A 至少出現一次的概率就是$1-(1-\varepsilon)^n$, 當 $n\to\infty$ 時, $(1-\varepsilon)^n\to 0$, 故 A 必然出現1次。A 出現之後把下次試驗再當作第一次。如此循環往復, A 必然出現任意多次。而獨立地重復試驗 n 次與 n 個相互獨立事件同時試驗一次是等價的。故而千百萬人之中出一個天才人物的事也就屢見不鮮了。

“文革”期間, 林彪說, 像毛澤東這樣的偉人全世界幾百年, 中國幾千年出現一個。爾後遭到毛的批駁, 當然毛澤東不是從概率的角度而是從事實出發予以批駁的。他說, 世界幾百年, 馬、恩, 列、斯不都是同時代的人嗎?

我們用上述方法可以推測“地球以外存在生命”的概率。

宇宙太大, 只考慮銀河系, 其實銀河系也不小, 該系中恆星的顆數就約爲 3×10^{11}, 其中有條件居住生物的行星約爲 65×10^7 顆[同註2]。由此設在這些行星中每顆有生命的概率不小於 ε; 於是每顆無生命的概率不大於 $1-\varepsilon$。那麼, 65×10^7 顆行星都無生命之概率不大於 $(1-\varepsilon)^{65\times 10^7}$, 於是至少有一顆行星上有生命的概率不小於 $1-(1-\varepsilon)^{65\times 10^7}$, 不管 $\varepsilon>0$ 多麼小, 而最後一個數字充份地接近1。因此, 我們有充份的信心和把握, 認爲除地球外還存在著有生命的星球。

2. 概率論古今

數學史上最早被認爲具有與運用概率論思想的數學家, 是意大利科學家伽利略 (1564-1642), 據說他在研究測量中的誤差時就運用了概率論思想。

當然, 毫無疑問, 推動科學發展的直接動力是社會實踐, 但有人認爲概率論卻起源於

對賭博的研究。17世紀, 一位法國賭徒名曰梅爾 (Mere), 他認爲擲一粒骰子4次至少出現一個6點的可能性 $(1-(\frac{5}{6})^4=.517)$, 要比擲兩粒骰子24次中至少出現一對6點的可能性 $(1-(\frac{35}{36})^{24}=.4914)$ 更大些。就此, 他請教法國當時的大數學家帕斯卡 (Pascal, 1623-1662)。Pascal 把他的研究結果告訴了費馬 (Fermat, 1601-1665), 爾後這兩位大師爲此專門進行了信件交往, 這些書信, 據說被認爲是數學史上最早的概率論文獻。鍾開萊先生在“概率和 Doob”一文中指出:“數學概率從 Fermat 和 Pascal 的信件往來開始, 這兩位比與 Leibniz 一起發明微積分的 Newton 都更老。”[註4]

之後, 荷蘭數學家、 物理學家惠更斯 (Huygens, 1629-1695) 於1657年發表了“論賭博中的計算”, 被認爲是概率論初創時期的第一篇論文。

概率論一出世就表現出了它強大的生命力。英國科學家、天文物理物家、哈雷 (Halley) 曾於1693年根據死亡率來計算壽命的保險費。

瑞士數學家雅各布·貝努利 (Jacob Bernoulli, 1654-1705) 第1次使用母函數這一工具研究了獨立重複試驗, 構建了“Bernoulli 概型 $b(k;\ n,\ p)$; 並明確提出了概率論中最重要的定律之一“大數定律”。他去世之後的1713年, 巴塞爾出版了他的名著「猜度術」, 這被認爲是數學史上概率論的第一本專著。

繼而, 法國數學家棣美弗 (A. de Moivre) 對此又作了巨大推進。他於1718年發表了「機遇原理」(Doctrine of chances), 提出了概率乘法法則、正態分布和正態分布律的概念, 並證明了二項分布的極限分布就是正態分布 $.b(k;n,p)\sim N(a,\sigma)$。

經過了上述數學家的努力, 使概率論眞正成爲一個數學分支。雅各布·貝努利的侄兒丹尼爾· 貝努利 (1700-1782) 把概率論應用於接種牛痘的研究, 消除了人類在接種牛痘初期所產生的恐懼心理, 他作了大量的抽樣統計後推斷出接種牛痘之後人類的平均壽命將延長3年。

這裡要提及法國數學家蒲豐 (Buffon) 對概率論也作出了重要貢獻。他第1次用投擲均勻硬幣的試驗, 驗證了頻率的穩定性 (試驗4040次中出現正面的次數2048), 於1777年發表了「偶然性的算術試驗」, 著名的 Buffon 投針問題不僅開創了幾何概率的先河, 並且饒有興趣地用偶然性的方法來計算圓周率 π 達到任意精確度的近似值, 其重要意義是向人們指出了偶然性與必然性之間, 隨機性數學與經典數學之間也並不存在著不可逾越的鴻溝 (unspannable abyss)。正如恩格斯在「費爾巴哈與德國古典哲學的終結」一書中所指出的 “那斷然被認爲是必然的東西, 是由種種純粹的偶然性構成, 而被認爲是偶然的東西, 則是一種必然性隱藏在裡面的形式。”

衆所周知, 歐拉 (Euler, 1707-1783, 瑞士) 是18世紀最傑出的數學家之一。他以每年800頁的速度撰寫創造性論文。歐拉全集有74卷, 其中分析學、代數學和數論約占40%, 幾何學約占18%, 物理學和力學占20%, 天文學占11%, 彈道學和航海學

註4: 陳培德譯, 概率和 Doob, 數學譯林, 1999, 4, P.274。

占3%, 其他8%。他將概率廣泛應用於人口統計、保險等領域, 撰有“關於死亡率和人類增長問題的研究”,“關於孤兒保險”等論著。

又一位法國數學家普阿松 (Poisson 1781-1840) 則將概率應用於射擊的各種問題, 撰有“打靶概率研究報告”, 提出了著名的普阿松分布 $b(k;n,p) \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \sim P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$。這裡順便提及, 產生普阿松公布的機制中要用到一條分析引理: i.e., $\forall x, y > 0$, 若f 單調或連續, 且$f(x)f(y) = f(x+y)$則 $f(x) = a^x$。這就是我們熟悉的冪函數。

例如, 若隨機事件滿足: (i) 過程的平穩性 (即它的概率規率不隨時間的推移而改變); (ii) 獨立增量性 (無後效性, 在互不相交的時間區間內過程進行的相互獨立性); (iii) 普通性 (在同一時間瞬間出現有2次或2次以上實際上是不可能的)。則這些隨機變量皆服從普阿松分布:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(其中 t 爲時間間隔, k 爲在區間 $[t_0, t_0 + t]$ 內事件出現的次數)。證略 (詳見, 復旦大學編, 概率論, 第一册, 高等教育出版社, 1979年4月第一版, p.97-100), 請看其初始值

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

的由來:

$\forall \triangle t > 0$, 考慮 $[0, t + \triangle t]$ 中事件出現 k 次的概率 $P_k(t + \triangle t)$, 由上假設及全概公式

$$P_k(t+\triangle t) = P_k(t)P_0(\triangle t) + P_{k-1}(t)P_1(\triangle t) + \cdots + P_0(t)P_k(\triangle t), > 0$$

特別地 $P_0(t + \triangle t) = P_0(t)P_0(\triangle t)$

而 $P_0(t+\triangle t) - P_0(t) = P_0(t)(P_0(\triangle t) - 1) < 0$ (即 $P_0(t)$ 單調下降)。

故由上述分析引理 $P_0(t) = a^t \because a \in (0, 1)$ 故存在 λ, 使

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}(\lambda > 0)$$

而拉普拉斯 (P. S. Laplace, 1749-1827, 法) 是使概率論走向嚴密、系統和科學的最卓越的創造者之一, 他於1812年在巴黎出版了「分析概率」(或「概率的分析理論」), “並以此書獻給拿破侖[同註2], 拿破侖鐘情於數學和數學家, 據說曾聘任他爲財政部長, 當然他當不好財政部長, 很快就被解聘了。如果說數學家都能勝任財政部長, 那麼在今天, 概率統計專家去“炒股”, 都會成爲超級富翁了。

拉氏的誤差理論和最小二乘法, 經德國數學家高斯 (1777-1855) 的努力, 正式奠定了其理論基礎。拉普拉斯說過, 概率無非是把人們的常識化爲計算而已。古典概型的計算公式就是由他給出的, 其操作性極強。

17、18世紀到19世紀的前半葉, 可以說是概率論的形成時期。

19世紀後半葉起, 概率論才有了更大的長足的發展。前蘇聯的幾位數學家對近代概率論都作出了重大貢獻。車貝曉夫 (Chebyshev, 1821-1894) 是概率論大數定律的創建者之一。著名的車氏不等式爲此奠定了理論基礎。他的學生馬爾可夫 (Markov, 1856-1922) 是 “馬爾可夫過程”、“馬爾可夫鏈”等這些隨機過程的創始人; 另一位學生李雅普諾夫 (Lyapunov, 1857-1918) 是中心極限定理和特徵函數的奠基者之一。

前蘇聯數學家柯爾莫戈洛夫 (Kolmogorov, 1903-1987) 以勒貝格 (Lebesgue, 法) 測度論爲基礎, 給出了概率論的公理化體系。把概率論正式變成了一個嚴謹的數學分支。現代意義上的概率論臻於完善。Lebesgue 測度以無窮區間覆蓋點集, 一反先求積分後求測度的做法, 而是先定義測度後定義積分; 求積分時又採取劃分值域而不是定義域, 突破了黎曼積分的局限性。它是泛函分析、概率論、抽象積分論、抽象調和分析的理論基礎。

概率論於19世紀末傳入中國, 第一本譯著是由華蘅芳 (1839-1902) 在英國傳教士付蘭雅 (J. Fryer, 1839-1928) 的幫助下, 於1896年譯出的「決疑數學」。因此, 我國對概率論的學習與研究起始於本世紀初。

現代概率論主要研究無窮多個隨機變量的集合, 即隨機過程。例如, 若以 ξ_t 表示某地某次大地震後餘震的情況, 則 $\{\xi_t\}$ 構成一隨機過程, $t=1,2,\ldots$。隨機過程又可分爲馬爾可夫過程、平穩過程、鞅 (Martingale)、正態過程、點過程等。隨機過程與其他學科交叉應用又產生了隨機微分方程、過程統計、數論中的概率方法、現代幾何概率、計算概率等等新分支。至於研究方向, 除了上述極限定理外, 近幾十年主要由法國學派開創了隨機過程的一般理論, 鞅的現代理論和隨機場、點過程、馬爾可夫過程和位勢論等。

由於偶然性無時不有, 無處不在, 故概率論的應用也幾乎伸展到所有領域。

經濟建設中, 用於合理設計和最優化。如在橋梁設計時, 必須考慮河流最大洪水量的分布。又如用來進行氣象、地震、病蟲害及人口預測預報等。產品的設計、質量控制 (如日本的田口方法)、抽樣檢查、以及經濟學、排隊論、運籌學等領域的應用。

自然科學中, 最典型的是統計力學。量子力學非用概率論不可。許多卓越的物理學家都曾用過概率論的思想和方法 (如愛因斯坦研究布朗運動)。生物學中的群體遺傳, 群體增長, 疾病傳染 (在古典概型中 G. Polya 就運用模球模型來描述細菌傳染)。“化學中的反應動力學, 高分子的統計性質; 天文學中銀河亮度起伏及星系的空間結構等。”同註2

在先進技術和國防中的應用, 現代自動控制需要利用隨機微分方程來描述狀態的轉移。也應用在通訊技術中的濾波理論和一般的數學信息論等。在核反應堆中, 利用隨機模型研究中子的減速過程。二次大戰後, 產生了一門新興的軍事運籌學, “隨機搜索”、“射擊模擬”等都是它的重要研究課題, 以此解答有關諸如導彈彈落點的目標命中率、殺傷區域殺傷率等問題。

中國著名數學家王梓坤教授 (中科院院士) 曾成功地運用概率論對地震預報的研究。

3. 概率論的公理化定義

3.1 事件 σ-代數, 假設 Ω 是一抽象點集, $\mathcal{F}$ 是 Ω 中一些子集的集合。稱 $\mathcal{F}$ 爲 Ω 中 $-\sigma$-代數, 如果它滿足下列性質:

(i) $\Omega\in\mathcal{F}$;

(ii) 若 $A\in\mathcal{F}$, 則 $\bar{A}\in\mathcal{F}$, 其中 $\bar{A}=\Omega\backslash A$;

(iii) $\forall A_i\in\mathcal{F}$, $i=1,2,\ldots,n,\ldots$可數, 則 $\cup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{F}$.

那麼, 稱 Ω 為基本事件空間; 稱 Ω 的每一個點 ω 為基本事件; 稱 $\mathcal{F}$ 為事件 σ-代數, 稱 $\mathcal{F}$ 的每一個元素 A 為隨機事件 (簡稱事件或可測集); 稱 $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ 為可測空間。

3.2 概率與概率空間　設 $P(A)$, $A \in \mathcal{F}$, 是定義在 Ω 中 σ-代數 $\mathcal{F}$ 上的實值集函數。稱為 $P(A)$ 為 $\mathcal{F}$ 上概率測度 (簡稱為概率), 如果它滿足下列條件:

(i) 非負性: $\forall A \in \mathcal{F}$, 有 $0 \leq P(A) \leq 1$;
(ii) 規範 (一) 性: $P(\Omega) = 1$;
(iii) 完全 (可列) 可加性: $\forall A \in \mathcal{F}(m = 1, 2, \ldots,$ 可數), 若 $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, 則 $P(\cup_{m=1}^{\infty} Am) = \sum_{m=1}^{\infty} P(Am)$。

基本事件空間、事件 σ-代數 $\mathcal{F}$ 和定義在 $\mathcal{F}$ 上的概率測度 P, 這三元數組的全體 $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ 叫做概率空間。

4. 兩個最簡型

下面我們用上述公理化體系來定義或重新解釋古典概型和幾何概率, 給它們賦予現代意義。

4.1 古典概型的公理化定義

假設 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, $\mathcal{F}$ 由 Ω 的一切子集構成 (它含有 $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ 個元素); $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\forall A \in \mathcal{F}$, 定義

$$P(A) = \sum_{i \in A} P(\{\omega_i\}) = \frac{k}{n}$$

其中 k 是 A 所含的基本事件數。這樣稱 $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ 為古典型隨機試驗的概率空間。

4.2 幾何型概率的公理化定義

假設 Ω 是 m 維空間 R^m 中一有界區域, $L(\Omega)$ 是它的 m 維體積; $\mathcal{F}$ 是 Ω 的一切可以用 m 維體積來度量的子集的集合 (即全體 Lebesgue 可測集的集合); $\forall A \in \mathcal{F}$, 令

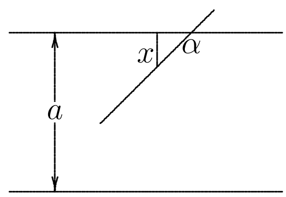
$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}$$

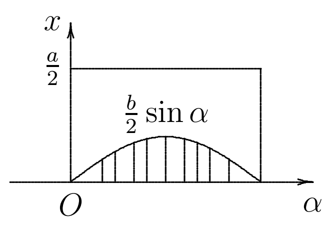
其中 $L(A)$ 是 A 的 m 維體積, 不難驗證 $P(A)$ 是定義在 σ-代數 $\mathcal{F}$ 上的概率測度。我們稱 $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ 為對應於幾何型隨機試驗的概率空間。

4.3 Buffon 投針問題、會面問題和分配問題

4.3.1.　平面上有一簇平行線, 每 2 條之間相距 a 單位。向此平面任投一長度為 $b(b < a)$ 的針, 試求此針與任一平行線相交的機率。

解: 如圖, 設該針中點到最近的一條平行線的距離為 x, 它與平行線的交角為 α。





顯然, 針與平行線相交的充分且必要的件是 $x \leq \frac{b}{2}\sin\alpha$ (1) 且 $x \in [0, \frac{a}{2}]$, $\alpha \in$

$[0,\pi]$ (2) 則所求概率就是滿足關係式 (1) 的面積 (圖中影陰部分) 與長爲 π 寬爲 $\frac{a}{2}$ 的長方形的面積之比,

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{\frac{1}{2}\int_0^\pi b\sin\alpha d\alpha}{\frac{1}{2}a\pi}=\frac{2b}{\pi a}$$

由於最後的結果與 π 有關, 故以此可計算 π 值, $\pi=2Pb/a$(其中 P 可用頻率代替)。

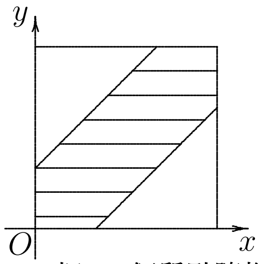
4.3.2 兩人相約7點到8點在某地會面, 先到者等候20分鐘即可離去, 試求兩人會面的概率。

解: 以 x,y 分別表示兩人到達時刻, 則會面的充要條件爲

$$|x-y|\le 20, \text{且 } x\in[0,60], y\in[0,60]$$

這也是一個幾何概率問題 (如圖)

$$P=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}$$



4.3.3 把 n 個質點隨機地分配到 $N(n\le N)$ 個盒子中去。假設每個質點分到各個盒中是等可能的。試就有返回有序、有返回無序、無返回有序、無返回無序4種不同的分配方式計算下列事件之概率:

a. $A=\{$ 某指定的 n 個盒中各有一個質點 $\}$;

b. $B=\{$ 恰有 n 個盒中各有一個質點 $\}$。

解: 以 $P_i(i=1,2,3,4)$ 分別記有放回有序、無序, 不放回有序、無序這4種抽樣方式下上述事件的概率。則顯然

$$P_1(A)=\frac{n!}{N^n},\quad P_1(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}$$

$\sim$ Maxwell-Boltzmann 統計

$$P_2(A)=\frac{C_n^n}{C_{N+n-1}^n},\quad P_2(B)=\frac{C_N^n\cdot C_n^n}{C_{N+n-1}^n}$$

$\sim$ Boze-Einstein 統計

$$P_3(A)=\frac{n!}{A_N^n},\quad P_3(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{A_N^n}=1$$

$\sim$ Firmi-Dirac 統計

$$P_4(A)=\frac{C_n^n}{C_N^n},\quad P_4(B)=\frac{C_N^n\cdot C_n^n}{C_N^n}=1$$

$\sim$ Firmi-Dirac 統計

參考文獻

1. 王梓坤著, 科學發現縱橫談, 北京師大出版社, 1997年7月第3次印刷。
2. 張素亮主編, 數學史簡編, 內蒙古大學出版社, 1990年6月。
3. 周概容編, 概率論與數理統計, 高等教育出版社, 1987年8月第4次印刷。

—本文作者任職於中國無錫市教研中心—