3D立體變變變 (The Variety of Polyhedra)

彭君智

摘要:「正多面體只有五種」這個出乎意料的事實不但沒有削減古希臘學者對於立體世界的好奇, 反倒創造出更富變化的「半正多面體」。箇中戲法爲何? 且讓咱們來探尋、玩味一番。

有幸拜讀平斯先生關於多面體的一篇文章「柏拉圖的地面」(數播22卷第4期), 恰與近年指導的科展作品有所契合 (註一), 乃將相關的研究內容與結果整理和大家分享, 野人獻曝, 尚祈各位讀者不吝指教。

零. 認識多邊形

在生活週遭看得到、叫得出來的正多邊形以正三角形、正方形和正六邊形居多, 如商品包裝、地磚、蜂窩等, 而正八邊形在廟宇的窗櫺設計或八卦中也比比皆是, 至於正五邊形則較爲少見, 反倒是五角星形不難見到, 繼而從國徽上也可一窺12星形。若從圓內接多邊形的觀點視之, 則鐘錶上12個時辰的刻度可得正12邊形, 依此類推: 分針刻度可得正60邊形、兩個量角器可得正360邊形 (註二)。

雖說不是任意的正多邊形皆爲大家所熟識, 但是「正多邊形有無限多個」卻是衆所皆知的事實, 不過這「無限多個」到底該怎麼畫? 其實, 只稍利用國中所學的「角平分線作圖」與「圓內接多邊形」的概念即可畫出無限多個「邊數成等比數列」的正多邊形, 例如從正六邊形可依序得出 12, 24, 48, 96, 192, ..., 無巧不成書, 此法正是魏晉時期數學家劉徽求圓周率所用的逼近概念之一(另一概念爲內切圓), 因此, 有時候我們也將「圓」看作是廣義的「正無限多邊形」。

壹. 認識多面體

已知「平面上有長、有寬的正多邊形有無限多個」, 試問「立體空間的正多面體有幾個?」原以爲「加了高」的變化應更加豐富, 怎知結果卻僅僅只有五種, 稱之爲「意外」, 不知讀者是否也有同感?

歷史上爲了對付這位「不速之客」, 曾經發生過這麼一段插曲: 刻卜勒(Kepler 1571-1630德) 搬出「天意說」: 爲什麼會從無限多個正多邊形一下子就跳到少得可憐的五個

正多面體? 而且不多不少就是五個? 原來, 天上的行星剛剛好也只有五顆(人類對於天文的觀察與認識, 一直要到伽利略 (Calileo, 1564-1642, 義) 發明望遠鏡之後, 才眞正大開眼界), 因此, 行星間運行的規則便與這五個正多面體對應(註三), 沒錯, 上帝就是這樣安排的。此一假設雖與後來觀察、計算的結果不合, 卻也強調了這個意外的重要(另有一說法: 若將地球也納入行星行列則得6顆行星, 而這個「6」(一週的工作日) 正好是上帝創造出來的第一個「完全數」, 所以多一個不行, 少一個也不成, 就是剛剛好五個)。

莞爾之餘不妨深思: 究竟怎樣的立體 (需具備哪些條件) 才得以叫做正多面體? 回答問題之前, 先回來推敲平面的情況: 二度空間的正多邊形皆滿足「等角、等邊」兩個點和線的條件, 因此推廣到三度空間的正多面體時, 應具備點、線、面三個「等角、等邊、等形」的條件, 我們將之歸納成「二維條件」與「三維條件」:

(一) 二維條件: 由數個全等的正多邊形組成。

(二) 三維條件: 每個頂點的立體角 (註四) 皆全等。

滿足這些要求的凸多面體即稱爲正多面體 (regular polyhedra), 也通稱爲柏拉圖立體(The Platonic Solids), 其廬山眞面目如下:

(1) 一個立體角可用三片正三角形組成三角錐 (圖1-1), 也可用四片正三角形拼組四角錐 (圖1-2) 或是五片正三角形組合五角錐 (圖1-3), 再分別依多面體的條件繼續推演拼湊, 即可得正四面體 ($\boxed{\text{四}}$ 圖1-4)、正八面體 ($\boxed{\text{八}}$ 圖1-5) 和正二十面體 ($\boxed{\text{二十}}$ 圖1-6), 而六片以上的正三角形恰成平面的正六邊形 (圖1-7) 或重疊, 所以無法再組成多面體。

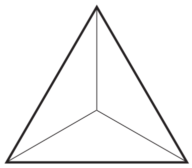


圖 1-1

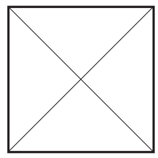


圖 1-2

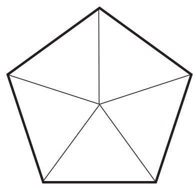


圖 1-3

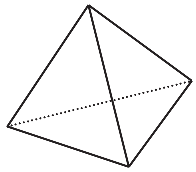


圖 1-4

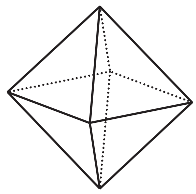


圖 1-5

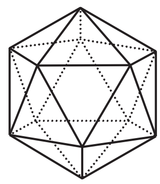


圖 1-6

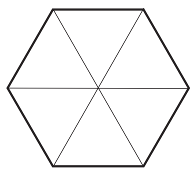


圖 1-7

(2) 若改以正方形來組合立體角 (三片), 可得正六面體 (即正立方體 $\boxed{\text{六}}$ 圖1-8), 四片以上的正方形恰成平面的大正方形 (圖1-9) 或重疊, 故無法組成立體。

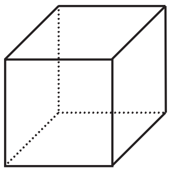


圖 1-8

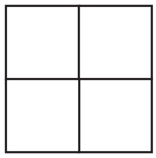


圖 1-9

(3) 使用正五邊形來組合立體角時 (三片), 可得正十二面體 ($\boxed{\text{十二}}$ 圖1-10), 四片以上的正五邊形產生重疊 (圖1-11), 故無法組成立體。

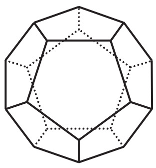


圖 1-10

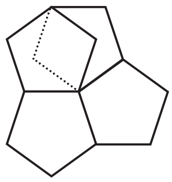


圖 1-11

(4) 當使用其他正多邊形來組合立體角時 (三片以上), 皆產生平面 (圖1-12) 或重疊, 所以無法組成新的多面體。(註五)

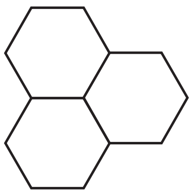


圖 1-12

邂逅: 日常生活中「肉粽」和「立體茶包」的造形爲 $\boxed{\text{四}}$;「骰子」和「方糖」的造形爲 $\boxed{\text{六}}$;「洗衣球」爲 $\boxed{\text{八}}$ 的變形;「古銅錢串成的龍珠」爲 $\boxed{\text{十二}}$ 的變化; 台中科博館的招牌上有個 $\boxed{\text{二十}}$, 至於新型建築的鋼棚結構中, 則有 $\boxed{\text{四}}$ 與 $\boxed{\text{八}}$ 並存(如台北大安公園的音樂台設計)。

貳. 多面體的演化

正多面體只有五種的 「天意」 似乎無法滿足大家對於立體世界的好奇, 於是古希臘數學家便將二維中的「等形」條件放寬: 把「數個全等的正多邊形」改成「數種同邊長的正多邊形」, 於是又變化出13個規則的半正多面體 (semi-regular polyhedra), 也通稱爲阿基米得立體(The Archimedean Solids)。以下由正多面體出發, 利用切割、變形的幾何方法來探尋其中的奧秘 (註六)。

(一) 截角: 截去多面體的立體角

說明: 依適當比例將正多面體的立體角截去時, 可使被截面與截面皆爲正多邊形 (註七)。以下分別用符號 $\boxed{X\cdot\text{一}}$ 、$\boxed{X\cdot\text{二}}$ 表示「立體 X 截去小角錐」與「立體 X 截去大角錐」。

(1) 從 $\boxed{\text{四}}$ 的四個頂點截去小三角錐可得 $\boxed{\text{四}\cdot\text{一}}$ (圖2-1); 截去大三角錐可得 $\boxed{\text{四}\cdot\text{二}}$ (圖2-2)。

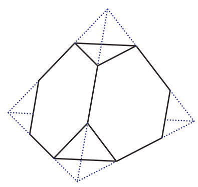


圖 2-1

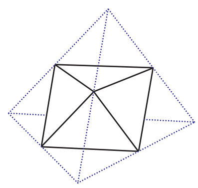


圖 2-2

(2) 從 $\boxed{\text{六}}$ 的八個頂點截去小三角錐可得 $\boxed{\text{六}\cdot\text{一}}$ (圖2-3); 截去大三角錐可得 $\boxed{\text{六}\cdot\text{二}}$ (圖2-4)。

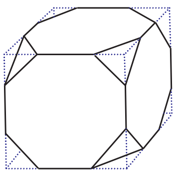
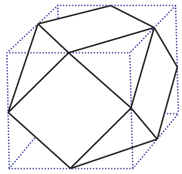



圖 2-3　圖 2-4

(3) 從$\boxed{\text{八}}$的六個頂點截去小四角錐可得 $\boxed{\text{八}\cdot\text{一}}$ (圖2-5); 截去大四角錐可得 $\boxed{\text{八}\cdot\text{二}}$ (圖2-6)。

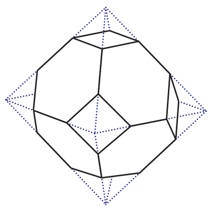
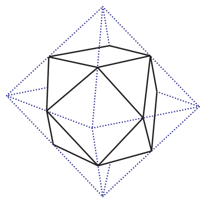



圖 2-5　圖 2-6

(4) 從 $\boxed{\text{十二}}$ 的二十個頂點截去小三角錐可得 $\boxed{\text{十二}\cdot\text{一}}$ (圖2-7); 截去大三角錐可得 $\boxed{\text{十二}\cdot\text{二}}$ (圖2-8)。

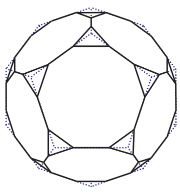
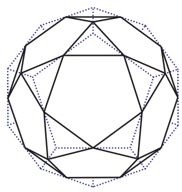



圖 2-7　圖 2-8

(5) 從 $\boxed{\text{二十}}$ 的十二個頂點截去小五角錐可得 $\boxed{\text{二十}\cdot\text{一}}$ (圖2-9); 截去大五角錐可得 $\boxed{\text{二十}\cdot\text{二}}$ (圖2-10)。

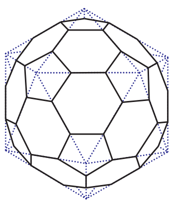
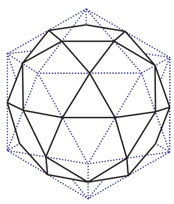



圖 2-9　圖 2-10

探索: 仔細觀察截角後的十個立體, 哪幾個立體符合阿基米得立體的條件? 又哪幾個立體是相同的? (註八)

(二) 截角和變形:

立體截角後再將截面伸縮、變形為正多邊形。

說明: 將對偶重複的立體 $\boxed{\text{六}\cdot\text{二}}$ 與 $\boxed{\text{十二}\cdot\text{二}}$ 繼續截角。以 $\boxed{\text{六}\cdot\text{二}}$ 為例, 若依正三角形的 $1:1:1$ 切割得正六邊形, 但是這個比例對正方形的 $1:\sqrt{2}:1$ 而言, 卻無法切出正八邊形, 反之亦然, 所以相鄰不同的兩面無法同時切成正多邊形; 當切在中點時, 截面卻是個長方形, 不是正方形。為求符合阿基米得立體的條件, 故將各截面邊長「拉伸、變形」為正多邊形。以下分別用符號 $\boxed{X\cdot 1}$、$\boxed{X\cdot 2}$ 表示「立體 X 截小角錐和變形」、「立體 X 截大角錐和變形」。

(1) 截去 $\boxed{\text{六}\cdot\text{二}}$ 的十二個頂點可得 $\boxed{\text{六}\cdot\text{二}\cdot 1}$ (圖2-11) 以及 $\boxed{\text{六}\cdot\text{二}\cdot 2}$ (圖2-12)。

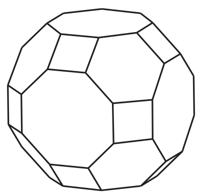
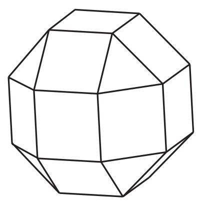



圖 2-11　圖 2-12

(2) 截去 $\boxed{\text{十二}\cdot\text{二}}$ 的三十個頂點可得 $\boxed{\text{十二}\cdot\text{二}\cdot 1}$ (圖2-13) 以及 $\boxed{\text{十二}\cdot\text{二}\cdot 2}$ (圖2-14)。

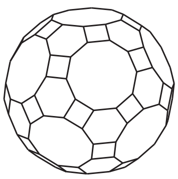


圖 2-13

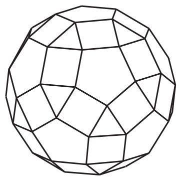


圖 2-14

(三) 正方形變形:

取定正方形一條對角線, 再將正方形依此對角線分割、變形爲兩個正三角形。

說明: 將$\boxed{\text{六 · 二 · 2}}$和$\boxed{\text{十二 · 二 · 2}}$中屬於「截面」的正方形依對角線分割。以$\boxed{\text{六 · 二 · 2}}$爲例 (黑色的正方形屬於「被截面」), 由於對角線可有順逆時針兩種不同取法 (圖 2-15), 故得不全等但類似的同態體 (homomorphism): 兩立體如左右手般相互鏡對稱 (圖 2-16), 但不重合。以下用符號$\boxed{\text{X □}}$表示「立體 X 正方形變形」。

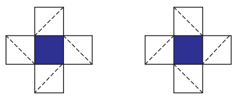


圖 2-15

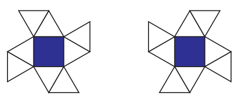


圖 2-16

(1) 從$\boxed{\text{六 · 二 · 2}}$可得$\boxed{\text{六 · 二 · 2 □}}$(圖 2-17)。

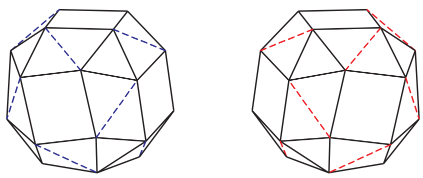


圖 2-17

(2) 從$\boxed{\text{十二 · 二 · 2}}$可得$\boxed{\text{十二 · 二 · 2 □}}$(圖 2-18)。

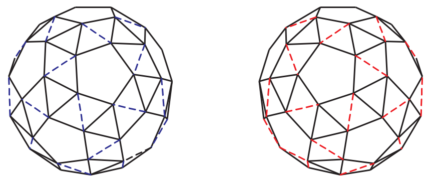


圖 2-18

邂逅: 生活中$\boxed{\text{六 · 一}}$、$\boxed{\text{六 · 二}}$和$\boxed{\text{六 · 二 · 2}}$多飾於廟堂的欄柱或燈罩; $\boxed{\text{二十· 一}}$、$\boxed{\text{二十 · 二}}$、$\boxed{\text{十二·二· 2}}$、$\boxed{\text{十二·二· 2□}}$可於新、舊型的足球設計中發現。

參. 推廣與研究

(一) 利用「截角、變形與正方形變形」這三種變化, 可由五種柏拉圖立體變化出十三種阿基米得立體。若將這套遊戲規則繼續玩下去(看到頂點就切、看到正方形就變), 能否變出第十四個阿基米得立體? (幾經嘗試, 雖無功而返, 卻也意外收穫!) 截角之後未變形的立體造型請參考「柏拉圖的地面」一文的附圖, 而爲求滿足多面體的條件, 這些立體皆須再變形:

(1) 變形之後多數立體匯集於頂點的角度和皆 $\geq 360°$, 故無法製成立體, 例如 $= 360°$ 的$\boxed{\text{四 · 一 · 1}}$或 $> 360°$ 的$\boxed{\text{八 · 一 · 1}}$。

(2) 少部分立體變形之後匯集於頂點的角度和 $< 360°$, 的確可以組成立體, 可惜發生意外 (所以阿基米得立體還是十三個):

a. 新立體與規定不合, 如: $\boxed{\text{六 □}}$ = 菱形六面體 (相鄰的兩個三角形恰好共平面, 變成一個菱形, 圖 3-1)(註九)。

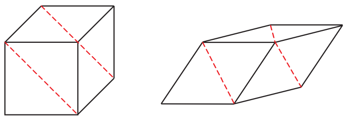


圖 3-1

b. 新立體已出現在多面體中, 如: $\boxed{\text{六 · 二 □}}$ = $\boxed{\text{二十}}$。

c. 新立體包含曲面, 如: $\boxed{\text{四 · 一 ·2}}$。(請讀者嘗試圖 3-2)

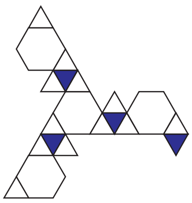


圖 3-2

(二) 若把平面視爲球面的局部 (如水平面與海平面的關係), 或是想像將整個地球 (三維) 均勻鋪滿地磚 (二維), 則可將「正多邊形鋪滿平面」視爲「廣義的多面球體」(立體角 = 360°), 如此可得三個「正球體」, 稱爲柏拉圖球體, 分別以符號 $\boxed{\text{III}}$ (圖 3-3)、$\boxed{\text{IV}}$ (圖 3-4)、$\boxed{\text{VI}}$ (圖 3-5) 表示, 仿「變身術」(將各分點相連即爲「廣義的截角」) 也可再變化出八個「半正球體」, 稱爲阿基米得球體。(註十)

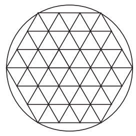


圖 3-3

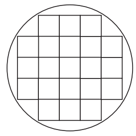


圖 3-4

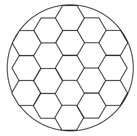


圖 3-5

(1) 從 $\boxed{\text{III}}$ 截小角得 $\boxed{\text{III · 一}}$ (圖 3-6); 截大角得 $\boxed{\text{III · 二}}$ (圖 3-7)。

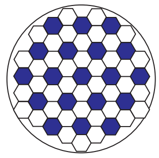


圖 3-6

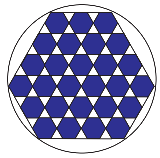


圖 3-7

(2) 從 $\boxed{\text{IV}}$ 截小角得 $\boxed{\text{IV · 一}}$ (圖 3-8); 截大角得 $\boxed{\text{IV · 二}}$ (圖 3-9); 再將 $\boxed{\text{IV}}$ 正方形變形得 $\boxed{\text{IV □/1}}$ (圖 3-10)、$\boxed{\text{IV □/2}}$ (圖 3-11)、$\boxed{\text{IV □/3}}$ (圖 3-12)。

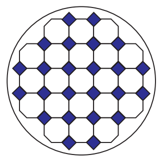


圖 3-8

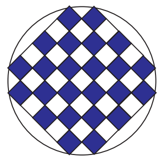


圖 3-9

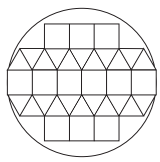


圖 3-10

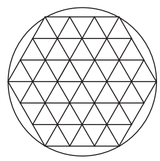


圖 3-11

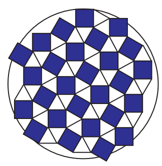


圖 3-12

(3) 從 $\boxed{\text{VI}}$ 截小角得 $\boxed{\text{VI · 一}}$(圖3-13); 截大角得 $\boxed{\text{VI · 二}}$(圖3-14); 再將 $\boxed{\text{VI · 二}}$ 截小角、變形得 $\boxed{\text{IV · 二 · 1}}$(圖 3-15); 截大角、變形得 $\boxed{\text{IV · 二 · 2}}$(圖3-16); 最後正方形變形得 $\boxed{\text{IV · 二 · 2 □}}$(圖3-17)。

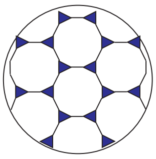


圖 3-13

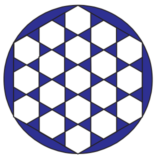


圖 3-14

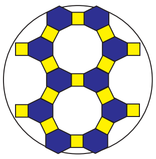


圖 3-15

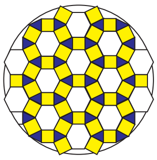


圖 3-16

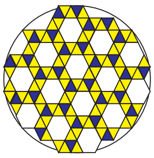


圖 3-17

肆. 窮則變、變則通

本文利用截角、變形, 從五種柏拉圖立體變出整套阿基米得立體, 將此變身術延續下去, 雖找不出第十四種規則的立體, 卻陰錯陽差地把柏拉圖五大家族給結合在一起, 形成「族譜」關係。而更令人意外的是: 將變身術推廣、應用到平面的球體時, 竟也得出11種完整的結果。因此對多面體而言, 變身術這套爲了「湊答案」(找尋十三個阿基米得立體)而創的遊戲規則也算是切得漂亮、變得成功、玩得有價值。

伍. 問題與挑戰

(一) 若將「正的直角柱」(圖5-1) 側邊的矩形改爲正方形得「方柱」(圖5-2), 另把方柱的正方形變形可得「反角台」(anti-prism 圖5-3), 則兩大系列無限多個立體都滿足阿基米得立體的條件, 何以沒有並列於其中?

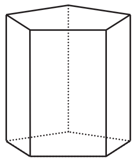


圖 5-1

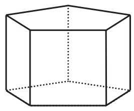


圖 5-2

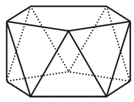


圖 5-3

(二) 若將立體 $\boxed{\text{六 · 二 · 2}}$ 沿「赤道」如魔術方塊般旋轉 45° (圖 5-4), 則新立體可否列爲第十四個阿基米得立體?(註十一)

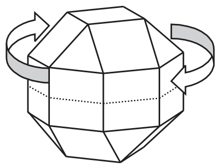


圖 5-4

(三) 柏拉圖球體與阿基米得球體的點、 線、面的數量雖屬無限多, 但彼此存著正比關係, 故仍能套用尤拉公式計算(註十二), 但結果卻等於0, 與一般凸體的示性數 2 不同, 卻與甜甜圈等凹體的示性數 0 相同。如果說 0 是平面而非球面

的示性數, 是否意味著「從平面到球體」的推廣不當? 還是須考量「臆想點」(imaginary point 無窮遠點) 等問題? (有請讀者指點迷津)

陸. 附註

註一: 台北市第32屆中小學科學展覽國中組數學科「3D 立體世界探堪之旅」, 作者: 李明泓、胡伯宇、張紘聞、劉隆穎。

註二: 若再利用不同的單位刻度作分點, 還可得到邊數為其正因數的正多邊形: 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180,。有空不仿多留意「汽車輪胎的鋼圈設計」, 保證有許多意想不到的新發現。

註三:「上帝是否運用數學來排行星?」讀者可從下表的數據查證:

多 面 體	四	八	六	十二	二十
外接球半徑	0.612	0.707	0.866	0.951	1.401
稜切球半徑	0.354	0.500	0.707	0.809	1.309
內切球半徑	0.204	0.428	0.500	0.756	1.114
行 星	水星	金星	火星	木星	土星
軌道半徑	0.387	0.723	1.523	5.203	9.555

表中數據乃將「多面體的稜長」和「地球的公轉半徑」定為1計算所得, 若改定其它數據為1 (如以正多邊形外接圓或內切圓半徑為1), 勢必產生劇烈變動, 或許刻卜勒還有一線生機! 另提供高斯的「行星級數」做參考: 4(水星)、7(金星)、10(地球)、16(火星)、28(小 行 星)、52(木 星)、100(土星)。

註四: 一個立體角至少需由三個面組成, 而匯集於立體角頂點的各多邊形 (各面) 的內角總和必須$<360°$。當$\geq 360°$ 時 (即共平面或重疊), 無法組成立體角, 若硬是要組成三維立體, 則會產生曲面凹體。

註五:「正多面體有而且只有五個」於焉成立。為免贅述, 文後指稱立體 X 時, 皆以 $\boxed{\text{X}}$ 方形符號替代。

註六: 多面體的數量與種類, 一般均以代數假設法配合尤拉公式討論(詳見「正多面體的故事」一文), 此幾何切割概念源自一般對偶定理的圖解, 本文將此法再延伸(試圖尋求第十四個阿基米得立體), 巧與英文命名有異曲同工之妙:「truncated-」即是「截角」; 而「rhombic-」意指「菱形、等長」, 與「截角、變形」相同;「snub-」象形「獅鼻」(圖6-1), 同本文的「正方形變形」。

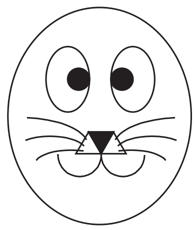


圖 6-1

註七: 正多面體各由正三角形、正方形與正五邊形所組成, 當被截面各邊分別依「1 : 1 : 1」、「1 : $\sqrt{2}$: 1」及「1 : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$: 1」的比例截角時, 可得正六邊形 (圖6-2)、正八邊形 (圖6-3) 及正十邊形 (圖6-4); 若是截取中點可得正三角形 (圖6-5)、正方形 (圖6-6)

和正五邊形 (圖6-7), 而因爲對稱的關係, 截面亦同時被截成正多邊形, 故符合阿基米得立體的二維條件。

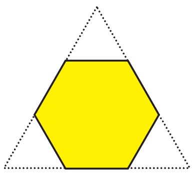


圖 6-2

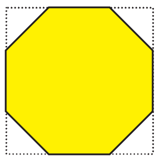


圖 6-3

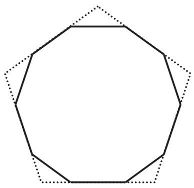


圖 6-4

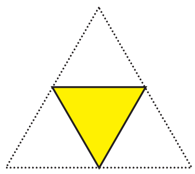


圖 6-5

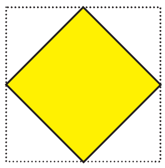


圖 6-6

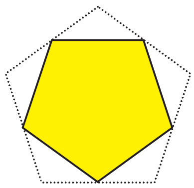


圖 6-7

註八: 十個截角立體除了 $\boxed{\text{四}\cdot\text{二}}=\boxed{\text{八}}$ 以外, 餘皆符合阿基米得立體的條件, 其中 $\boxed{\text{十二}\cdot\text{二}}=\boxed{\text{二十}\cdot\text{二}}$、$\boxed{\text{六}\cdot\text{二}}=\boxed{\text{八}\cdot\text{二}}$ 爲對偶現象。以下從尤拉公式 $(V-E+F=2)$ 利用 V 與 F 的加法交換率來窺探「對偶」之美:

(1) $\because V_4=F_4 \quad \therefore V_4-E_4+F_4=F_4-E_4+V_4$ 因此 $\boxed{\text{四}}$ 自對偶。

(2) $\because V_6=F_8,\ E_6=E_8,\ F_6=V_8$

$\therefore V_6-E_6+F_6=F_6-E_6+V_6$

$=V_8-E_8+F_8$

因此 $\boxed{\text{六}}$ 與 $\boxed{\text{八}}$ 互爲對偶立體。

(3) $\because V_{12}=F_{20},\ E_{12}=E_{20},$

$F_{12}=V_{20}$

$\therefore V_{12}-E_{12}+F_{12}$

$=F_{12}-E_{12}+V_{12}$

$=V_{20}-E_{20}+F_{20}$

因此 $\boxed{\text{十二}}$ 與 $\boxed{\text{二十}}$ 互爲對偶立體。

註九: $\boxed{\text{六}}$ 的正方形變形尚有兩種變化: 一個像寶石般的三角十二面體(deltahedron); 另一個可看成是一個 $\boxed{\text{八}}$ 和兩個 $\boxed{\text{四}}$ 的組合凹體(其中有8個正三角形共平面)。(請讀者嘗試)。

註十: 正多邊形均勻鋪滿平面的情形與種類共有11種 (詳見「鋪路石的排列法」一文)。柏拉圖球體在變身的過程中也出現對偶的重複現象:

(1) $\boxed{\text{III}\cdot\ \text{一}}=\boxed{\text{VI}}$ 、$\boxed{\text{III}\cdot\ \text{二}}=\boxed{\text{VI}\cdot\ \text{二}}$。

(2) $\boxed{\text{IV}\square/2}=\boxed{\text{III}}$ (可有多種方法切割)。 其中 $\boxed{\text{IV}\ \square/1}$ 與 $\boxed{\text{IV}\square/2}$ 的同態球體皆各自與原球體相同 (鏡射後全等), 而 $\boxed{\text{IV}\ \square/3}$ (看成是 $\boxed{\text{IV}\cdot\ \text{二}\square}$ 會較容易) 的同態球體 (圖6-8) 須再旋轉 30° 才會重合, 只有 $\boxed{\text{VI}\cdot\text{二}\cdot\ 2\ \square}$ 的同態球體不同 (圖6-9)。至於推廣與研究 (一) 中繼續截角、變形所產生的 $\boxed{\text{四}\cdot\text{一}\cdot 1}$ 的立體角雖然也等於 360°, 卻因

V、E、F 的數量有限而無法「推廣」並列於阿基米得球體的行列。

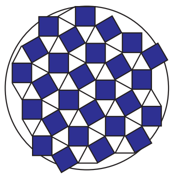


圖 6-8

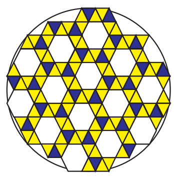


圖 6-9

註十一: 阿基米得立體的定義是否應更嚴密? 例如「頂點要共球面」、「要滿足點、線、面的對稱」...等, 驗證的結果卻發現 $\boxed{\text{六}\cdot\text{二}\cdot 2\square}$ 、 $\boxed{\text{十二}\cdot\ \text{二}\cdot 2\square}$ 完全不合點、線、面的對稱, 反倒是有疑問的立體全都滿足新條件。有些書本 (Convex figures and polyhedra) 認定該立體為第 14 個阿基米得立體, 而有的書籍(POLYHEDRA) 卻否定該立體 (pseudo Archimedean solid), 因為該立體不滿足「高度的對稱性」(不同於點、線、面的對稱, 而是指視覺上的對稱: 站在各頂點所見的立體皆要相同), 至於「方柱」或「反角台」則見與柏拉圖立體、阿基米得立體並列為uniform polyhedra。 筆者倒是有個奇想: 不管是阿基米得立體還是柏拉圖立體, 應該都只是後世研究者一種「功成不居」的敬稱(就好比「倉頡造字」一樣), 後世陸續有新的研究和見解出爐, 所以其數量(見人見智的第14個與已經肯定的5個) 應無須太過拘泥吧!

註十二: 在此以函數 $e(X) = V_X - E_X + F_X$ 表示立體 X 的尤拉示性數

(1) 計算 $\boxed{\text{III}}$ 無限多個 V、E、F的正比關係:

設 $F_{\text{III}} = n$ 則可得 $3n$ 個 V 與 $3n$ 個 E,

$\because$ 每一個 V 重複6次而每一個 E 重複2次,

$\therefore V_{\text{III}} = \frac{3}{6}n = \frac{1}{2}n$; $E_{\text{III}} = \frac{3}{2}n$

因此 $e\left(\boxed{\text{III}}\right) = \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}n + n = 0 \neq 2$

(探索: 如果 V_{III} 和 E_{III} 長得像 $\frac{3}{2}n$ 和 $\frac{1}{2}n$, 那麼 F_{III} 是否必為偶數? 提示: 觀察 $\boxed{\text{III}}$ 與 $\boxed{\text{VI}}$ 的表象關係即可迎刃而解。)

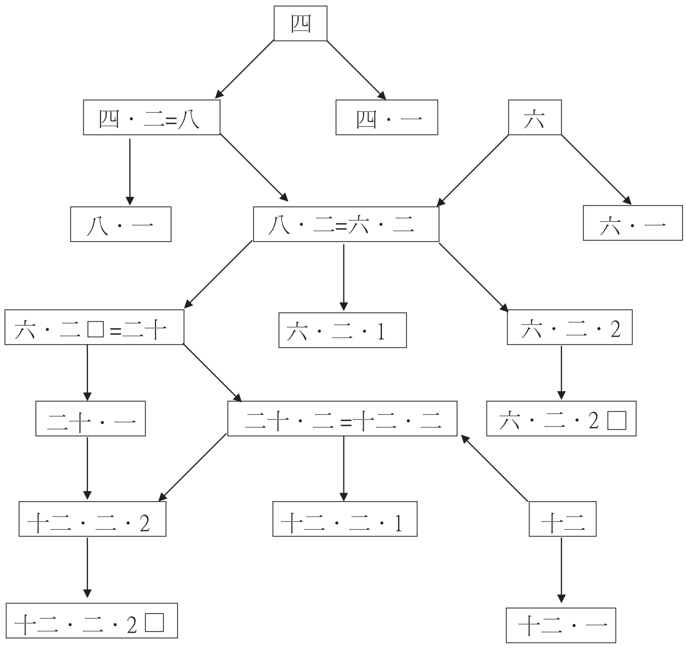
(2) 計算 $\boxed{\text{IV}\cdot\text{一}}$ 無限多個 V、E、F 的正比關係:

由於 $\boxed{\text{IV}\cdot\text{一}}$ 有正方形與正八邊形兩種, 故一開始不宜直接假設 $F_{\text{IV}\cdot-}$, 不妨利用 $\boxed{\text{IV}}$ 與 $\boxed{\text{IV}\cdot\text{一}}$ 的截角關係, 先設正八邊形 (即 F_{IV}) 有 n 個, 由此可得正方形 (即 V_{IV}) 有 n 個, 因此得到 $8n + 4n$ 個 V 與 $8n + 4n$ 個 E, $\because$ 每一個 V 重複3次而每一個 E 重複2次, $\therefore V_{\text{IV}\cdot-} = \frac{12}{3}n = 4n$; $E_{\text{IV}\cdot-} = \frac{12}{2}n = 6n$; $F_{\text{IV}\cdot-} = n + n = 2n$ 因此 $e\left(\boxed{\text{IV}\cdot\text{一}}\right) = 4n - 6n + 2n = 0 \neq 2$。

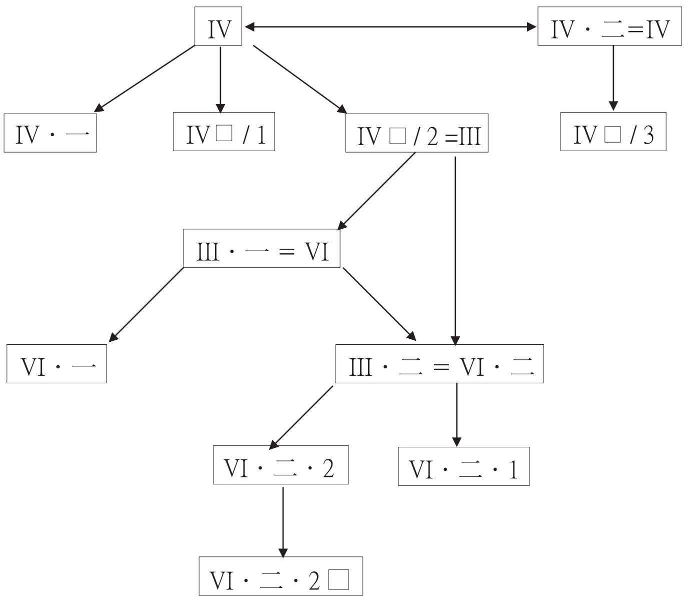
柒. 附件

(一) 多面體與球體族譜演化過程。

(1) 多面體家族:



(2) 球體家族:



(二) 多面體與球體 V、E、F 一覽表 (n趨近於無窮)。

多面體	V	E	F	多面體、球體	V	E	F
四	4	6	4	四·一	12	18	8
六	8	12	6	六·一	24	36	14
八	6	12	8	八·一	24	36	14
十二	20	30	12	十二·一	60	90	32
二十	12	30	20	二十·一	60	90	32
六·二	12	24	14	十二·二	30	60	32
六·二·1	48	72	26	十二· 二 ·1	120	180	62
六·二·2	24	48	26	十二· 二 · 2	60	120	62
六·二·2□	24	60	38	十二· 二 ·2□	60	150	92
IV	n	$2n$	n	VI· 一	$6n$	$9n$	$3n$
IV·一	$4n$	$6n$	$2n$	VI· 二	$3n$	$6n$	$3n$
IV□	$2n$	$5n$	$3n$	VI· 二·1	$12n$	$18n$	$6n$
III	$\frac{1}{2}n$	$\frac{3}{2}n$	n	VI·二· 2	$6n$	$12n$	$6n$
VI	$2n$	$3n$	n	VI·二·2□	$6n$	$15n$	$9n$

(三) 阿基米得立體符號及英文名稱一覽表:

四·一 = truncated tetrahedron
六·一 = truncated hexahedron (cube)
八·一 = truncated octahedron
十二·一 = truncated dodecahedron
二十·一 = truncated icosahedron
六·二 = 八·二 = cuboctahedron
十二·二 = 二十·二 = icosidodecahedron
六·二·1 = rhombitruncated cuboctahedron
六·二·2 = rhombicuboctahedron
六·二·2 □ = snub cube
十二·二·1 = rhombitruncated icosidondecahedron
十二·二·2 = rhombicosidomdecahedron
十二·二·2 □ = snub dodecahedron

參考文獻

1. 國立台灣師範大學科學教育中心, 高中基礎數學統合 (上册): 多面體與尤拉公式, 第七版, 台北, 國立編譯館, 68 ~ 83, 80年8月。
2. 溫亦剛, 中學數學基礎百科全書: 立體幾何, 第三版, 台北, 九鼎出版社, 230 ~ 253, 77年5月。
3. 陳棋銘, 數學的學校: 正多面體的故事、鋪路石的排列法譯本, 新竹, 大夏出版社, 55 ~ 63, 75 ~ 83, 75年5月。
4. 蔡志強、孫文先, 數學立體模型製作, 台北, 九章出版社, 88年8月。
5. 平斯, 柏拉圖的地面,「數學傳播季刊」22卷, 第4期, 59 ~ 64, 87年12月。
6. 符之琪, 數學千面人 — 曲面的示性數「科學月刊」, 22卷第10期, 766 ~ 770, 80年10月。
7. P. Cromwell POLYHEDRA Cambridge University Press, 51~86, 1997。

—本文作者任教於景興國中—