用圖解證明公式

李政豐 · 顏貽隆 · 陳蘭香 · 王淑霞 · 陳明峰

一. 前言

國立交通大學應數系 infomath 的一群高中數學教師, 從八十七年九月以來, 一直爲虛擬高中數學館的網路數學課程, 用盡心思, 期望能編寫出一套視覺化、互動式, 且能涵蓋課本、參考書及聯考試題的高中數學新課程。

任何創新的手法, 能簡化抽象觀念, 或運用多媒體技術在網頁上呈現的教材, 都是我們企圖要掌握的工作目標, 寄望在整合課文、圖形、動畫、影像及題庫的課程教材中, 能帶給全國高中學生一個生動、有趣, 能自己動手操作實驗的多樣化的學習環境。在這個共同理想的帶動下, 若有任何新的創意與看法, 都會在每星期三下午的聚會中, 提出來作充分的研討或說明。

八十八年五月, 陳明峰老師帶來一份台北市西松高中教師會所提供的「proof without words」的四個圖形, 幾天之內, 這種圖解公式的概念在 infomath 中傳播開來。首先由陳明峰老師在網路中搜尋出 Mathematics Magazine 中的十四個圖形, 負責三角函數軟體組的顏貽隆老師、陳蘭香老師, 則綜合整理出課本的十幾個以圖爲證的圖解公式, 王淑霞老師提出 $\sin 2\theta$ 的圖形, 陳明峰老師提出 $\tan\frac{\theta}{2}$ 的圖形, 李政豐老師提出二倍角、三倍角與和差化積公式的圖形。於是, 另類的教學方法, 即將融入網路數學課程之中。在此先提供有關三角函數的部分內容, 讓高中老師和同學共同分享, 期使它能拋磚引玉, 讓漂亮的「proof without words」也能在中等學校數學課程中生根、茁壯, 乃至於開花結果。

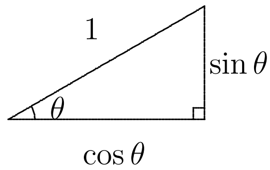
二. 本文

下面是由李政豐老師、顏貽隆老師整理出來, 經由黃大原老師指導、修正的十九個圖解公式的內容:

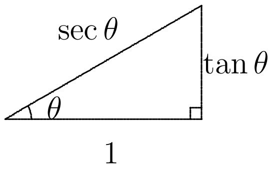
圖解平方關係

說明: 由銳角三角函數的定義及畢氏定理得到:

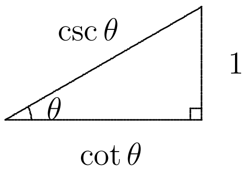
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$



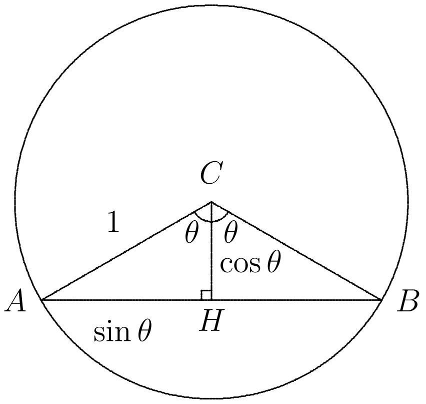
$$1+\tan^2\theta = sec^2\theta$$



$$1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$$



圖解二倍角公式 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\ \cos\theta$



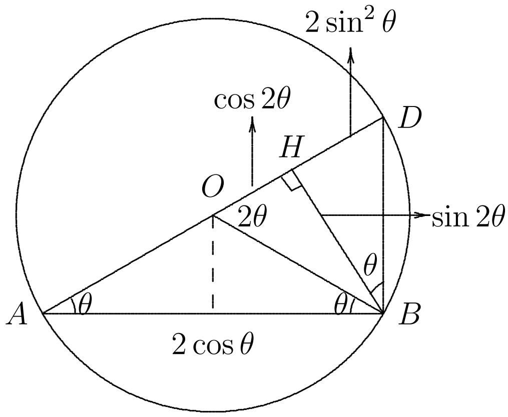
說明: ΔACB 的面積$=\frac{1}{2}(1)(1)\sin 2\theta = \frac{1}{2}(AB)(CH) = \frac{1}{2}(2\sin\theta)(\cos\theta)$ 得到 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

(一) 圖解餘弦二倍角公式

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

(二) 正切函數的半角公式

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$



(一) 說明: (AD) 是直徑, $\angle ABD$ 是直角, (BH) 垂直 (AD)。$\angle DBH + \angle HBA = \angle HBA + \angle HAB = 90°$, 故 $\angle DBH = \angle HAB = \theta$。

$(OH) = \cos 2\theta$

$(OH) = (AH) - (AO) = (AB)\cos\theta - 1$

$\quad = (2\cos\theta)\cos\theta - 1 = 2\cos^2\theta - 1$

$(OH) = (OD) - (HD) = 1 - (DB)\sin\theta$

$\quad = 1 - ((AD)\sin\theta)\sin\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

得到 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

(二) 說明: 在直角三角形 AHB 中

$$\tan\theta = \frac{(HB)}{(AH)} = \frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

在直角三角形 BHD 中

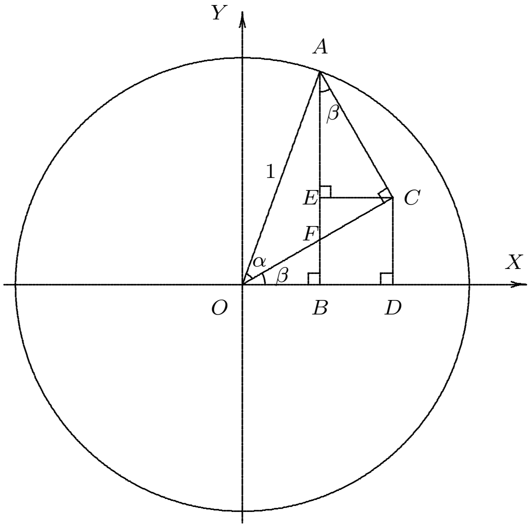
$$\tan\theta = \frac{(HD)}{(HB)} = \frac{1-(OH)}{(HB)} = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

得到 $\tan\theta = \frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ 或是 $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

圖解和角公式

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$



說明: ΔOBF 與 ΔACF 相似, $\angle FOB = \angle FAC = \beta$

1、$\sin(\alpha+\beta) = \overline{AB}$

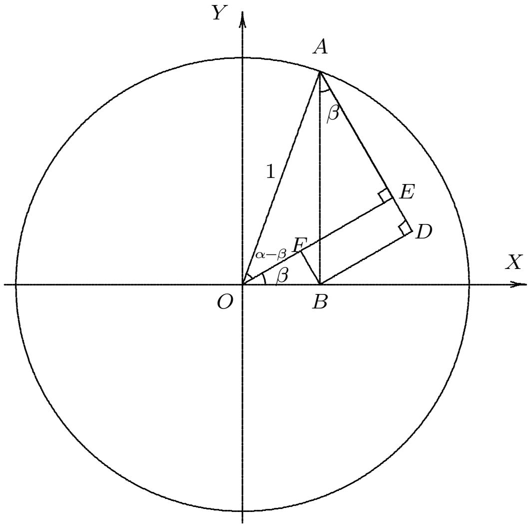
$$= \overline{AE} + \overline{EB}$$
$$= \overline{AE} + \overline{CD}$$
$$= \overline{AC}\cos\beta + \overline{OC}\sin\beta$$
$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

2、$\cos(\alpha+\beta) = \overline{OB}$

$$= \overline{OD} - \overline{BD}$$
$$= \overline{OD} - \overline{EC}$$
$$= \overline{OC}\cos\beta - \overline{AC}\sin\beta$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

圖解正弦、餘弦的差角公式

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$



說明: $\angle AOB = (\alpha-\beta)+\beta = \alpha$

1、$\sin(\alpha-\beta) = \overline{AE}$

$$= \overline{AD} - \overline{ED}$$
$$= \overline{AD} - \overline{BF}$$
$$= \overline{AB}\cdot\cos\beta - \overline{OB}\sin\beta$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

2、$\cos(\alpha-\beta) = \overline{OE}$

$$= \overline{OF} + \overline{FE}$$
$$= \overline{OF} + \overline{BD}$$
$$= \overline{OB}\cos\beta + \overline{AB}\sin\beta$$
$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

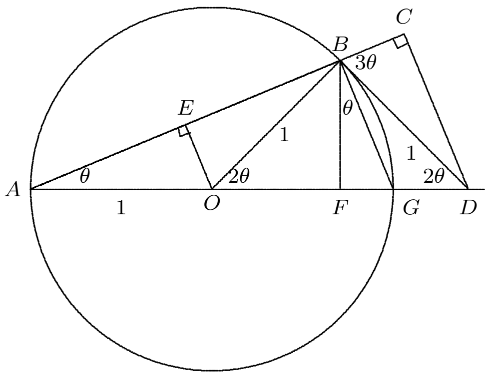
圖解正弦、餘弦的二倍角、三倍角公式

1、$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos$

2、$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

3、$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

4、$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$



說明:

1、$\sin 2\theta = \overline{BF} = \overline{AB}\sin\theta$

$= 2\overline{AE}\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

2、$\cos 2\theta = \overline{OF} = \overline{AF} - \overline{AO} = \overline{AB}\cos\theta - 1$

$= 2\overline{AE}\cos\theta - 1 = 2\cos^2\theta - 1$

($\overline{AG}$是直徑, $\angle ABG = 90$度)

$\cos 2\theta = \overline{OF} = \overline{OG} - \overline{FG} = 1 - \overline{BG}\sin\theta$

$= 1 - (\overline{AG}\sin\theta)\sin\theta$

$= 1 - 2\sin^2\theta$

取 $\overline{BD} = 1$

3、$\sin 3\theta = \overline{CD}$

$= (\overline{AO} + \overline{OF} + \overline{FD})\sin\theta$

$= (1 + 2\cos 2\theta)\sin\theta$

($\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ 代入)

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

4、$\cos 3\theta = \overline{BC}$

$= \overline{AC} - \overline{AB}$

$= (\overline{AO} + \overline{OF} + \overline{FD})\cos\theta - 2\overline{AE}$

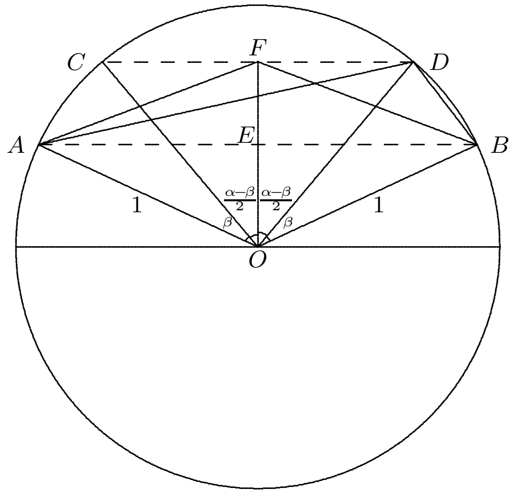
$= (1 + 2\cos 2\theta)\cos\theta - 2\cos\theta$

($\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ 代入)

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

和差化積公式 (1)

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$



說明:　如圖所示圓　O　的半徑爲 1, $\angle AOE = \beta + \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\angle AOD = \beta + \frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha$

1、四邊形 $OAFB$ 的面積

$= \frac{1}{2}(\overline{AB})(\overline{OF})$

$= (\overline{AE})(\overline{OF})$

$= \sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

2、四邊形 $OAFB$ 的面積

$= \Delta OAB$的面積 $+\Delta FAB$ 的面積

$= \Delta OAB$的面積 $+\Delta DAB$ 的面積

$=$ 四邊形 $OADB$ 的面積

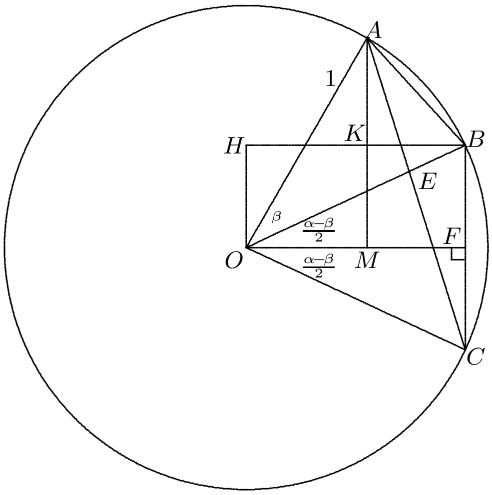
$= \Delta OAD$的面積 $+\Delta ODB$ 的面積

$= \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\beta$

故 $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

圖解和差化積公式 (2)

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$



說明: 圓 O 的半徑為1, $\angle AOC=\beta+\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}=\alpha$, $\angle AOM=\beta+\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\frac{1}{2}\sin\alpha=\Delta OAC$的面積

$=\Delta OAE$的面積 $+\ \Delta EOC$的面積

$\frac{1}{2}\sin\beta=\Delta OAB$的面積

$=\Delta OAE$的面積 $+\ \Delta AEB$的面積

$\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin\beta$

$=(\Delta OAE$面積 $+\ \Delta EOC$面積$)$

$-(\Delta OAE$面積 $+\ \Delta AEB$面積$)$

$=\Delta EOC$面積 $-\ \Delta AEB$面積

(消去 ΔOAE 面積)

$=(\Delta EOC$面積 $+\ \Delta BEC$面積$)$

$-(\Delta AEB$面積 $+\ \Delta BEC$面積$)$

(兩邊加 ΔBEC 面積)

$=\Delta OBC$面積 $-\ \Delta ABC$面積

$=$ 矩形$HOFB$面積$-$矩形$KMFB$面積

(因為三角形的底BC, 是矩形寬的兩倍, 但兩者高相同)

$=$ 矩形 $HOMK$ 面積

$=(OM)(KM)$

$=(OM)(BF)\qquad(KM=BF)$

$=\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

$(\angle AOM=\frac{\alpha+\beta}{2},\angle BOF=\frac{\alpha-\beta}{2})$

故 $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

三. 結語

傳統的公式證明, 嚴謹而周全, 是數學教育中最重要的基礎。用圖解證明, 由於條件有所限制, 無法呈現所有條件的圖形, 這當然是它的缺點, 但是簡明易懂, 藉著視覺化的感受及簡單的數學概念, 常能讓學生留下深刻的印象, 對於數學公式的具體化, 有很大的幫助。在最近的課堂上, 嘗試用這種教法 (高三社會組恰好教到這一部分), 同學與老師的互動也明顯的增加了, 有些同學對於這種證明有很驚訝的反應, 這是所有數學教師所樂於見到的一件事。

四. 參考資料

1. Mathematics Magazine, Proof without words.
2. 張景中, 面積關係幫您解題, 九章出版社。

—本文作者李政豐任教於國立竹南高中, 顏貽隆任教於國立新竹科學園區實驗中學, 陳蘭香任教於國立竹南高中, 王淑霞任教於國立新竹女中, 陳明峰任教於台北市立華江高中—