# 射影平面六講 — 第三講

王九逵

在第一講中我們提到過, 希望在射影平面中不把無限遠直線特殊化。引入射影座標系是達到這目標的一個方法。在引入射影座標系的觀念以前, 我們先介紹 Kronecker 的 delta 記號: Kronecker 的寫法是

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

式中 $i$, $j$ 爲整數。我們要用到的是三個向量

$$\delta_i=(\delta_{i0},\delta_{i1},\delta_{i2}),\qquad i=0,1,2.$$

在齊次座標下, $\delta_0$ 表示原點, $\delta_1$ 和 $\delta_2$ 分別表示 $x$ 軸和 $y$ 軸上的無限遠點。我們也要用到另一個向量: $\upsilon=(1,1,1)$。

定理: 設 $E_0$, $E_1$, $E_2$ 及 $I$ 爲 $\mathbb{P}$ 中的四點。則有一 $3\times 3$ 滿秩 (non-singular) 實方陣 $E$, 使 $\delta_0E$, $\delta_1E$, $\delta_2E$ 和 $\upsilon E$ 分別爲 $E_0$, $E_1$, $E_2$ 和 $I$ 的座標向量的充要條件是這四點中的任意三點都不共線。此時方陣 $E$ 除常數因子外是一意確定的。

證明: 設 $E$ 爲一滿秩方陣, 則其列向量 $\varepsilon_0=\delta_0E$, $\varepsilon_1=\delta_1E$, $\varepsilon_2=\delta_2E$ 線性無關。顯然此時 $\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2=\upsilon E$ 和上三向量中的任意兩個也線性無關。所以 $E_0$, $E_1$, $E_2$ 和 $I$ 四點中任意三點均不共線。

反之, 設 $E_0$, $E_1$, $E_2$ 和 $I$ 四點中任意三點均不共線。假定它們的座標向量爲 $\varepsilon_0$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ 及 $\iota$。則 $\iota$ 可以表成 $\varepsilon_0$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ 的線性組合, 其中係數均不爲 0。將係數吸入向量中, 我們不失一般性可以假定 $\iota=\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2$。令

$$E=\begin{pmatrix}\varepsilon_0\\ \varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}.$$

則 $E$ 爲滿秩方陣, 且

$$\delta_0E=\varepsilon_0,\ \delta_1E=\varepsilon_1,\ \delta_2E=\varepsilon_1,\ \varepsilon E=\iota.$$

現設 $\widetilde{E}$ 爲另一滿足定理條件的方陣。則因 $\delta_0\widetilde{E}$ 也是 $E_0$ 的齊次座標, 所以有一常數 $\lambda_0$ 使 $\delta_0\widetilde{E}=\lambda_0\delta_0E$。同理也有二常數 $\lambda_1$, $\lambda_2$ 使 $\delta_1\widetilde{E}=\lambda_1\delta_1E$, $\delta_2\widetilde{E}=\lambda_2\delta_2E$, 及一常數 $\lambda$ 使 $\upsilon\widetilde{E}=\lambda\upsilon E$。因 $\upsilon=\delta_0+\delta_1+\delta_2$, 故有

$$(\lambda_0\delta_0+\lambda_1\delta_1+\lambda_2\delta_2)E=\lambda(\delta_0+\delta_1+\delta_2)E.$$

因 $E$ 爲可逆方陣, 所以 $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda$。又因 $\delta_i\widetilde{E}$ 爲 $\widetilde{E}$ 的各列, 於是我們得到了 $\widetilde{E}=\lambda E$。

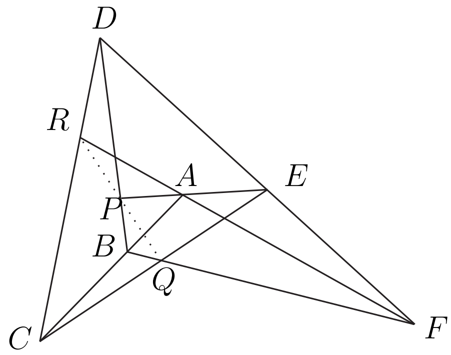
設 $E_0$, $E_1$, $E_2$, $I$ 及 $E$ 爲上定理中之向量及方陣。對每個向量 $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, 令 $X$ 爲以 $\xi E$ 爲齊次座標的點, 而稱 $\xi$ 爲 $X$ 在 射影座標系 (projective coordinate system) $(E_0, E_1, E_2, I)$ 下的射影座標。$\xi$ 叫作它在本座標系下的 (射影) 座標向量 (projective coordinate vector)。$E_0$, $E_1$, $E_2$ 叫本座標系的 基點 (base points), $I$ 叫它的 單位點 (unit point)。

齊次座標是一種特殊的射影座標, 其中 $E$ 爲單位方陣。此時三基點分別表示原點及兩座標軸上的無限遠點, 而單位點決定在座標軸上的單位長度。一般的射影座標使上述的諸觀念不再特殊化了: 每點都可以是原點或無限遠點, 每種長度都可以是單位長。射影幾何學是打破平行和長度觀念的幾何學。

設 $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ 爲 $\mathbb{P}$ 中直線 $l$ 的齊次座標, 又設 $\xi$ 爲點 $X$ 在射影座標系 $(E_0, E_1, E_2, I)$ 中的射影座標。則直線 $l$ 通過點 $X$ 的充要條件是 $\lambda \cdot (\xi E) = (\lambda E') \cdot \xi = 0$, 式中 $E'$ 是 $E$ 的 轉置矩陣 (transpose)。我們稱 $\lambda E'$ 爲直線 $l$ 在射影座標系 $(E_0, E_1, E_2, I)$ 下的 射影 (線) 座標。

公元4世紀, Alexandria 的 Pappus 證明了一個射影幾何的定理, 我們將利用射影座標系的方法證明它:

定理 (Pappus): 設 $A, B, C$ 爲 $\mathbb{P}$ 中共線的三點, $D$, $E$, $F$ 爲 $\mathbb{P}$ 中共線的另三點。再設直線 $AE$ 和 $DB$交於 $P$, $BF$ 和 $CE$ 交於 $Q$, $AF$ 和 $DC$ 交於 $R$。則 $P$, $Q$ 和 $R$ 三點共線。

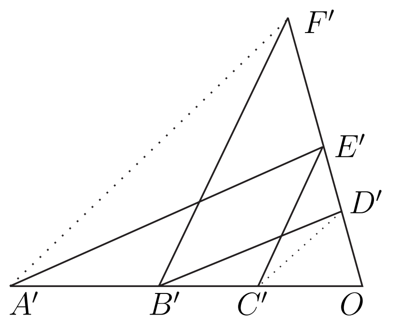



圖一

證明: 令直線 $ABC$ 和直線 $DEF$ 的交點爲 $O$。若 $O$, $P$, $Q$, $R$ 四點共線, 則定理已成立。否則不失一般性, 我們可以假定 $O$, $P$, $Q$ 不共線。從 $OP$, $OQ$, $PQ$ 三直線以外選一點 $I$。(讀者可試著證明 $I$ 一定存在)。然後我們建立射影座標系 $(O, P, Q, I)$。

若一點在本座標系內的射影座標爲 $\xi$, 我們用 $X'$ 表示 $\mathbb{P}$ 中以 $\xi$ 爲齊次座標的點。若三點 $X, Y$, $Z$ 共線, 則三點 $X'$, $Y'$, $Z'$ 也共線, 反之若三點 $X'$, $Y'$, $Z'$ 共線, 則三點 $X$, $Y$, $Z$ 也共線。於是我們可以把 Pappus 定理翻譯成下形:

在 $\mathbb{R}^2$ 中設 $A'$, $B'$, $C'$ 三點共線, $D'$, $E'$, $F'$ 三點也共線。假定 $A'E'$ 和 $D'B'$ 二直線平行, $B'F'$ 和 $C'E'$ 二直線也平行。則 $A'F'$和 $D'C'$ 二直線一定也平行。




圖二

利用平面幾何, 此事非常容易證明。令 $O$ 表示 $A'B'C'$ 和 $D'E'F'$ 二直線的交點。從定理的條件乃得

$$OA' : OB' = OE' : OD' \qquad 且$$
$$OB' : OC' = OF' : OE'.$$

因此

$$OA' : OC' = OF' : OD'.$$

所以 $A'F'$ 和 $D'C'$ 二直線平行。

讀者請試寫出 Pappus 定理的對偶定理。

一個值得做的習題是不用射影座標直接證明 Pappus 定理。另外一個值得做的習題是利用射影座標的方法給 Desargues 定理做一個新的證明。

不但在射影平面 $\mathbb{P}$ 上可以引入射影座標, 在 $\mathbb{P}$ 中的一條直線 $l$ 上也可以做同樣的事。令 $E_0$, $E_1$ 和 $I$ 爲 $l$ 上的三點。我們可以分別選擇其齊次座標 $\varepsilon_0$, $\varepsilon_1$ 及 $\iota$ 使 $\iota = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$。令 $E_0$, $E_1$ 和 $I$ 爲 $l$ 上的三點。我們可以分別選擇其齊次座標 $\varepsilon_0$, $\varepsilon_1$ 及 $\iota$ 使 $\iota = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$。令

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix}.$$

$E$ 是一個 $2 \times 3$ 矩陣, 而 $(1,0)E$, $(0,1)E$ 和 $(1,1)E$ 分別爲$E_0$, $E_1$ 和 $I$ 的齊次座標。仿照前面的討論, 若 $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, 令 $X \in l$ 爲以 $\xi E$ 爲齊次座標的點。我們稱 $\xi$ 爲 $X$ 在線射影座標系$(E_0, E_1, I)$ 中的射影座標。$E_0$ 和 $E_1$ 叫這座標系的基點, $I$ 叫它的單位點。直觀上講, 這個線射影座標系賦予 $E_0$ 以原點的地位, 賦予 $E_1$ 以直線$l$ 上的無限遠點的地位, 而 $I$ 產生直線 $l$ 上的單位。

—本文作者爲國立中央大學數學系退休教授—