

# 結 (2)

Louis H. Kauffman 著 · 謝春忠 譯

## 第四節： 鍾氏多項式 (Jones polynomial)

我們下一個主題介紹一個迥異於前述的「模」或亞歷山大多項式的結與鏈結的不變量。這是 Vaughan Jones 在 1984 年 [4] 發現的結與鏈結的多項式不變量。通常以  $V_k(t)$  代表鍾氏不變量，這是一個以  $t^{1/2}$  及  $t^{-1/2}$  為變數的多項式。我們說  $V_k(t)$  是  $t^{1/2}$  的 Laurent 多項式。表面上看來，鍾氏多項式僅只是結與鏈結的另一個多項式不變量，與亞歷山大多項式有點相似。但我前面說它有不同性質，其中自有深意，不過須要費些工夫來說明其中的不同。一些背景敘述將有助於了解。

亞歷山大多項式發現於 1920 年代，直到 1984 除了亞歷山大多項式的簡單推廣之外，沒有人找到其他的結鏈結多項式不變量。而鍾氏發現的這一個新的結鏈結的多項式不變量有其不同凡響的性質。亞氏多項式不能分辨結與其鏡相，而令結理論學家興奮的是鍾氏多項式對於許多結可以辦到這點，其後更多的性質顯現出來，鍾氏多項式成為證明交錯鏈結 (alternating links) 的性質的主要

工具，這是有一個世紀之久的懸案。有興趣的讀者可參考 [8], [11], [12], [13], [14]。

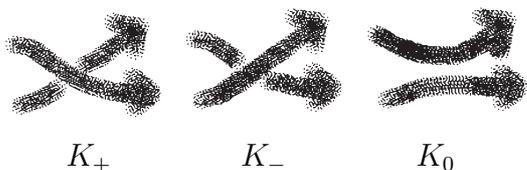
事實上，鍾氏多項式與好些數學物理中的主題密切關聯，有趣的是鍾氏多項式比其他結理論中的不變量 (當然扣數除外) 更易定義與證明其性質。本節將專注於鍾氏多項式的性質，其與物理的關係則留待以後的章節。

下面是鍾氏多項式的一組公設。當初鍾氏多項式並不是以這些公設的形式被發現的。這個形式是類似於 John H. Conway [2], [6], [7] 研究亞歷山大多項式所發現的架構。我從這些公設入手，因為它們容易掌握多項式並可做一些計算。

### 鍾氏多項式的公設

- (1) 若二個有向鏈結  $K, K'$  是同倫 (ambient isotopic)，則它們的鍾氏多項式是相等的，即  $V_K(t) = V_{K'}(t)$ 。
- (2) 若  $U$  是無結的閉曲線則  $V_U(t) = 1$ 。
- (3) 若三有向鏈結  $K_+, K_-, K_0$  除了在圖二十所示的局部部分之外都相等，則它們的鍾氏多項式有如下的關係：

$$t^{-1}V_{K_+}(t) = tV_{K_-}(t) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{K_0}(t).$$



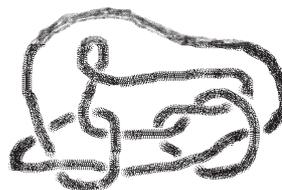
圖二十

以上這些公設可由 Jones 原先定義的不變量導出。Jones 是經由研究 Von Neumann algebras [3] (與量子論、統計力學有直接關聯,代數的一支)開始,止於辮子 (braids), 結與鏈結, 因此而發現此一不變量。鍾氏多項式與 Conway-Alexander 多項式在風格上卻迥然不同。即使二者可用相似的方式來公設化, 然而事實上, 這個在公設化上的相似性指向一個共同的推廣 (如 Homfly ( $P_t$ ) 多項式) 和其他的推廣 (如 Kauffman 多項式) [10], 然後再進一步及於與統計力學有關的推廣, 見 [1], [5], [9]。

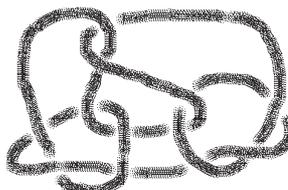
到目前為止, 還沒有人找到一個封閉的非平凡結 (即真正打了“結”的結), 其鍾氏多項式為 1, 所以我們有下面的猜測。

猜測: 一個單一的封閉非平凡結其  $V_K(t)$  不為 1。

雖然鍾氏多項式可能檢測一個結是否為非平凡結 (是否確實打結), 但它並不是具有完全的分別“結”的功能。存在不相等價的一對結而有相同的鍾氏多項式。見圖二十一。這兩個結叫做 Kinoshita-Terasaka 結與 Conway 結, 他們有相同的鍾氏多項式但不同的拓樸性質, 順帶一提, 這二個結恰巧也是亞歷山大多項式不能檢測是否“打結”的非平凡結。



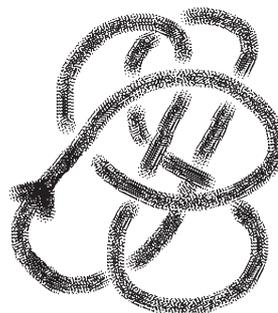
conway 結



Kinoshita-Terasaka 結

圖二十一

讓我們用這些公設實際計算一下三葉結的鍾氏多項式吧。為此有個有用的工具——線團樹 (skein tree)。線團樹是紀錄一個結或鏈結的線圖中經過“跨越”或改變跨越過程中的所有結與鏈結。樹上的每個“節點”代表一個結或鏈結, 距原有結或鏈結最遠的代表未打結的結或鏈結。任意結或鏈結存在如此的“解結”或“解鏈結”的程序是由於以下的事實: 任一結或鏈結的線圖都能經由一系列“改變跨越” (Crossing switches) 而成為不打結或無連結的線圖。見圖二十二。

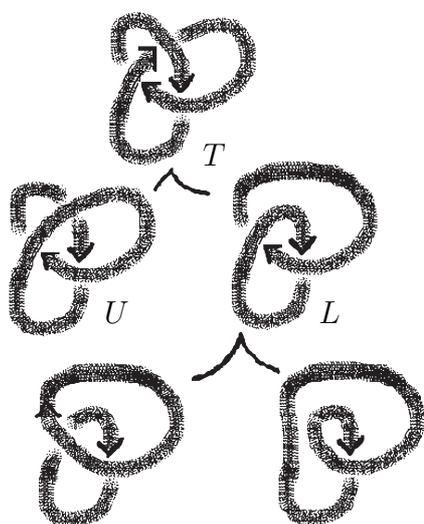


標準的未打“結”的結

圖二十二

在圖二十二中我們展示出一個標準的不打結的線圖。這圖的畫法是由圖中箭頭處開始，沿著線圖凡遇跨越處先畫“上跨越”再畫“下跨越”：這是可能的最簡單的結線圖畫法，因為無須做任何的更正，當你要跨過線圖中存在的線時只須穿過它的下面。標準的不打結線圖永遠是不打結的，試著用手沿著圖二十二走一遭，立即可知。

利用標準的不打結線圖存在的事實，我們可以藉由一個給定的線圖  $K$  與標準不打結線圖在平面上經相同投影所產生的不同而得到以交換跨越而使線圖  $k$  不打結的程序。這個交換的程序可用來製造一個線團樹以計算  $K$  的鍾氏多項式。我們在圖二十三畫出三葉結的線團樹以計算其鍾氏多項式，這個



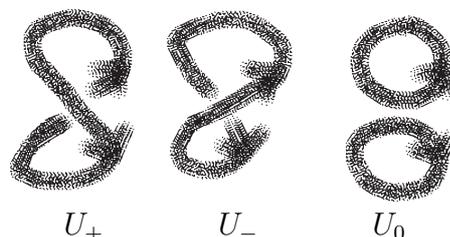
圖二十三 . 三葉結的線團樹

樹將三葉結鍾氏多項的計算化簡為計算某些不打結的結與無連結的鏈結。為了明瞭如何計算無連結之鏈結，我們觀察到在此情況下

公設指出：

$$t^{-1}V_{U_+} - tV_{U_-} = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{U_0}.$$

這裡  $U_+$  與  $U_-$  分別代表只有一個分量的正扭曲 (positive twist) 及負扭曲。 $U_0$  則是將  $U_+$ ,  $U_-$  中的扭曲扯平成爲無連結的二個圓環。見圖二十四。



圖二十四

因此

$$(t^{-1} - t)1 = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{U_0}.$$

所以

$$d = V_{U_0} = (t^{-1} - t) / (t^{1/2} - t^{-1/2}) = -(t^{1/2} + t^{-1/2}).$$

由此可見在鏈結中每加一個不打結的分量就是對不變量乘上一個  $d = -(t^{1/2} + t^{-1/2})$  的倍數。在圖二十三中,  $T$  代表三葉結,  $U$  表未打結的平凡結而  $L$  表二個未打結圓環所組成之鏈結。有了這些預備知識, (依公設) 我們發現

$$t^{-1}V_T - tV_U = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_L$$

$$t^{-1}V_L - td = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_L$$

所以

$$V_L = t(td + (t^{1/2} - t^{-1/2})) = -t^{5/2} - t^{1/2}.$$

而

$$\begin{aligned} V_T &= t(t + (t^{1/2} - t^{-1/2})V_L) \\ &= t(t + (t^{1/2} - t^{-1/2})(-t^{5/2} - t^{1/2})) \\ &= t(t - t^3 - t + t^2 + 1) \\ &= t(-t^3 + t^2 + 1) = -t^4 + t^3 + t. \end{aligned}$$

相同計算方法用來計算三葉結的鏡像  $T^*$  (即將  $T$  中上、下跨越顛倒所得) 得到的不變量  $V_{T^*} = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$ 。由此可知鍾氏多項式如何分辨三葉結與其鏡像, 同時也證明了  $T$  與  $T^*$  在所在空間中是不同倫的。

上面以公設來計算鍾氏多項式的方法並不能告訴我們為什麼這是個不變量。自然我們可以分析這方法, 證明這種計算所得的結果不會隨著計算過程中所做的諸多選擇而有不同, 而且可以給我們有關結或鏈結的拓樸訊息。不過另有一種方法可以導出鍾氏多項式是線圖中各狀態 (states) 的和。在此架構下, 多項式自始即有嚴整的定義, 而且我們可以經由調整一個嚴格定義的函數的參數而得知拓樸不變量的產生。我們下一個課題即是鍾氏多項式的狀態和模型 (state summation model)。

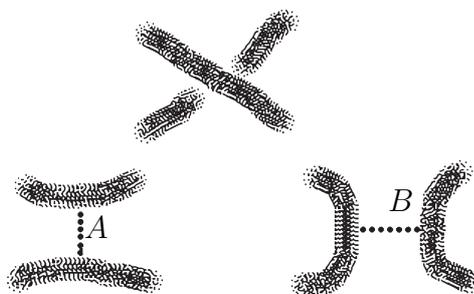
### 第五節: 括號狀態和

上節我們敘述了鍾氏多項式的公設以及如何由這些公設利用線團樹來計算鍾氏多項式。本節我們將介紹一種方法可以證明鍾氏多項式可由這些公設嚴整地定義, 而且是三度空間鏈結同倫之下的不變量, 為此, 與前不同, 我們定義鍾氏多項式為所給的鏈結線圖

相應的組合形狀的某種和, 稱做鍾氏多項式的狀態和模型。

事實上, 我們將先建造一個狀態和 (state summation) 叫做括號多項式 (bracket polynomial) [8], 再說明如何調整這個括號多項式以得到鍾氏多項式。這個括號多項式有較自然的發展, 且可定義在未取向 (unoriented) 的鏈結線圖上。

從現在起, 我們討論未取向的結或鏈結。對線圖中的每一個跨越我們指定二個分別標為  $A, B$  的局部狀態, 如圖二十五所示。



圖二十五

( $A$  - 狀態是將原跨越處置換為上跨越線逆時鐘轉動所掃出的區域。 $B$  - 狀態則是將原跨越處置換為上跨越線順時鐘轉動所掃出的區域。)  $A, B$  分別為將跨越 (crossing) 平滑化的方法。線圖  $K$  的一個狀態  $S$  是指對  $K$  中每個跨越處局部狀態做選取。如此, 一個有  $N$  個跨越點的線圖有  $2^N$  個狀態, 圖二十六表示出三葉結的二種狀態  $S$  和  $S'$ ,



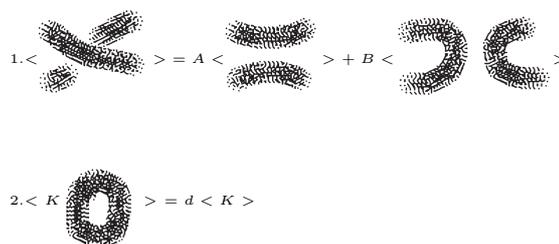
圖二十六

“狀態”以二種方法來計值。即  $\langle K|S \rangle$  和  $\|S\|$ 。狀態  $S$  的範數 (norm)  $\|S\|$  定義為  $S$  所描述的平面上的封閉曲線的個數減 1。在圖二十六的例子中,  $\|S\| = 1$ ,  $\|S'\| = 0$ 。至於  $\langle K|S \rangle$  則定義為一個狀態中所有局部狀態標記 ( $A$  或  $B$ ) 的乘積。所以圖二十六中  $\langle K|S \rangle = A^3$  而  $\langle K|S' \rangle = A^2B$ 。以  $A, B, d$  為變數, 我們定義一個給定線圖  $K$  的狀態和公式為  $\langle K \rangle = \sum \langle K|S \rangle d^{\|S\|}$ 。

換言之, 對每一個狀態我們取其標記的乘積再乘以  $d$  的線圈個數次方。 $\langle K \rangle$  則是對  $K$  線圖中所有狀態將上述的計值加以求和。(  $\sum$  代表對所有可能的  $S$  求和) 我們將證明: 若令  $B = 1/A, d = A^2 + B^2$   $\langle K \rangle$  在第二、三種芮氏形變之下為不變。再經過正規化 (normalization) 我們可以得到  $\langle K \rangle$  在三種芮氏形變下均不改變。因此而得到結與鏈結的拓樸訊息。(欲知更多有關括號及它與鍾氏多項式的關係, 請看 [8]) 從括號多項式的計算中釋出大量拓樸訊息, 特別是可用以分辨許多結與它們的鏡像, 而且也可能以括號計算來檢測一個線圖是否真正打結了。

### 括號學初步

括號多項式初步的建造甚是基本。有二種基本的公式反映出我們已看過的鍾氏多項式的交換關係。這二公式見圖二十七。

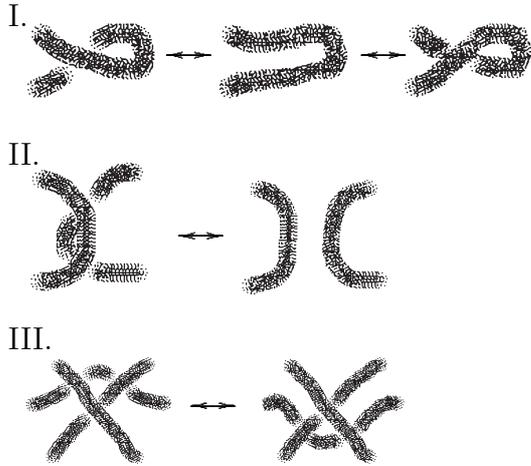


圖二十七. 括號方程式

方程 1 是說狀態和在一特定跨越點可寫成二個和, 其一是在此點做  $A$  型式的平滑化 (smoothing); 另一則是做  $B$  型式的平滑化。狀態和中的因子  $A, B$  則來自於狀態的標記, 右手邊其他的部分則可解釋為括號在平滑後的圖形的取值。

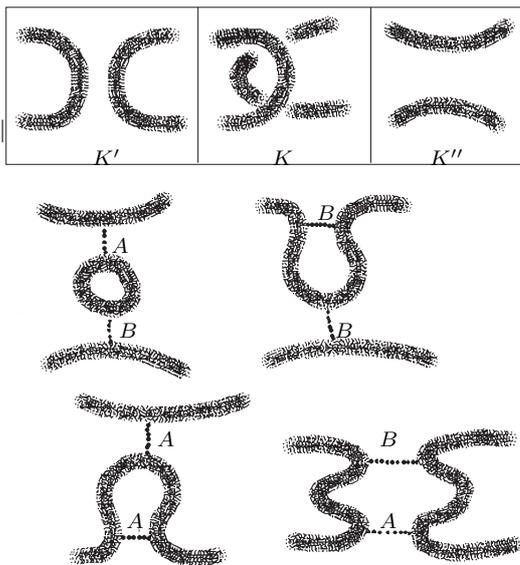
方程 2 是說在線圖中加上一個單純的封閉曲線, 則其對狀態和的影響是原狀態和乘上  $d$ 。我們注意到單純封閉曲線的狀態和為 1。

利用這二個公式我們可以計算一些基本的括號多項式。注意到我們尚未將變數  $A, B, d$  特殊化。我們將分析什麼樣的特殊化會產生結與鏈結的不變量。我們這樣定義括號多項式的好處正是在於我們有以代數來標記鏈結線圖的方法。而且可調整其值使其在芮氏形變為不變。為了達到此目的, 下面的引理告訴我們一般的括號多項式在第二種芮氏形變下如何變化。我們先回顧一下三種芮氏形變。(注意上期頁 22, 芮氏形變圖示有誤, 當以此次為準)



(註：即上期圖4之“ $\rightarrow$ ”更正為“ $\leftrightarrow$ ”。)

引理：令  $K$  為任一鏈結線圖，以  $K^1$  代表  $K$  經第二種芮氏形變 (消去  $K$  中的二個跨越處) 所得的線圖， $K''$  則代表將  $K$  中經第二種形變消去二跨越處所成的二弧置換成相反走向的二弧所得的線圖，見圖二十八。則  $\langle K \rangle = AB \langle K^1 \rangle + (ABd + A^2 + B^2) \langle K'' \rangle$ 。



圖二十八. 括號多項式在第二種芮氏形變之下的變化

證明：如圖二十八所示，我們考慮公式左手邊線圖  $K$  的四種局部狀態，利用圖二十七的公式1 兩次則得圖二十八下半的四個子圖，再利用圖二十七的公式2即得證。

藉著這個引理立即可知若令  $B = 1/A$ ,  $d + A^2 + B^2 = 0$ , 則  $\langle K \rangle$  在第二種芮氏形變之下不變。

選定了如此的  $A, B, d$  則所得的特殊化括號在第三種芮氏形變下亦為不變，如圖二十九所示。

最後，讓我們來看看括號在第一種芮氏形變下的變化情形。

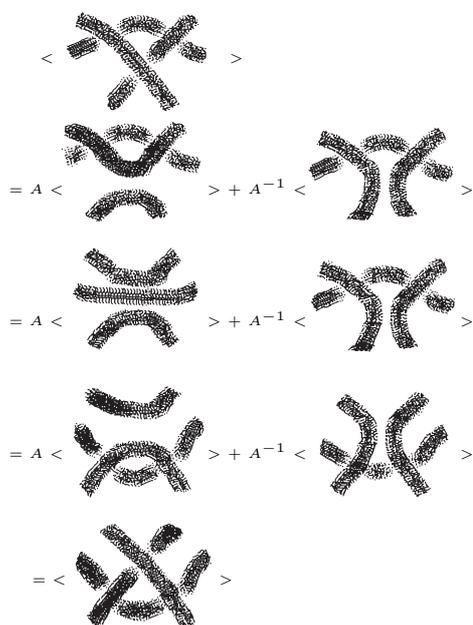
引理：令  $\langle K \rangle$  表示  $B = A^{-1}$ ,  $d = -A^2 - A^{-2}$  的括號狀態和。則  $\langle K \rangle$  在第二、三種芮氏形變下不變，而在第一種芮氏形變作用之下我們有

$$\langle K(+) \rangle = (-A^3) \langle K \rangle$$

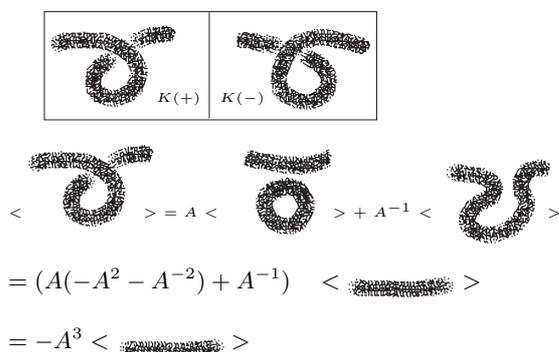
$$\langle K(-) \rangle = (-A^{-3}) \langle K \rangle$$

其中  $K(+)$  是在  $K$  上加一個正跨越而得的線圖， $K(-)$  則為  $K$  上加一負跨越而得者，見圖三十。

證明：由圖三十所示即可得證。



圖二十九. 括號多項式在第三種芮氏形變下不變



圖三十. 括號多項式在第一種芮氏形變

### 建構數學哲思 — 扭 (twist) 與繞 (writhe)

括號多項式在第一種芮氏形變之下不能保持不變是否太不幸了？不，正相反，這是件幸事。首先，這件事很容易經由如下的調整加以修正：令  $K$  為定向的結或鏈結，定義  $K$  的繞數 (write number)  $W(K)$  為  $K$  中所有跨越處符號的和，如此則右旋三葉結在

芮氏形變之下，其繞數有如下的性質：

- (i)  $W(K)$  在第二、三種芮氏形變之下不變。
- (ii) 在第一種芮氏形變之下其變化如下：

$$W(K(+)) = W(K) + 1$$

$$W(K(-)) = W(K) - 1$$

$K(+)$ ,  $K(-)$  如圖三十。

所以，繞數和括號多項式和在第一種芮氏形變之下有同樣的變化模式。我們可以結合繞數與括號多項式做一個在三種芮氏形變之下皆不變的新量，我們稱這個全然不變的量為  $f$ -多項式 (俗稱 Kauffman 括號多項式)，它的定義如下：

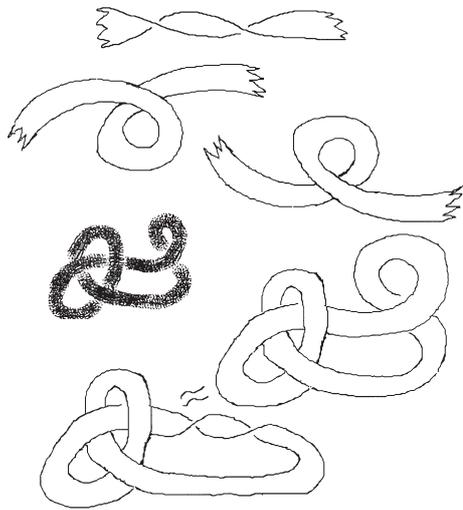
$$f_K(A) = (-A^3)^{-W(K)} \cdot \langle K \rangle (A).$$

在此正規化之下，括號多項式給出初始的鍾氏多項式一個模型，其確切的關係是  $V_K(t) = f_K(t^{-1/4})$ 。公式中  $W(K)$  是定向鏈結  $K$  中所有跨越處符號的和，而  $\langle K \rangle$  則是不計方向之下  $K$  的括號多項式。

我們將再回到括號多項式與鍾氏多項式的關係。不過先提一點數學哲理思維：另一種看待括號多項式不能在第一種芮氏形變下保持不變的方法是，注意到括號多項式是三度空間中結或鏈結的不變量。我們將鏈結的線圖視為空間中帶子的簡圖，如圖三十一以粗黑的線畫出三葉結的線圖，與此圖並列的是空間中以此為線圖的有結的帶子。這帶子有二個 (在大多數情況下) 平行走向的分量。線圖中的扭曲“捲” (curl) 在帶中成爲一個扁平的捲曲，與空間中完全的扭曲 (即二個

半扭)是同倫。圖三十一的上半圖示出帶子的全扭和二個扁平扭同樣都是在固定二端的空間映射下同倫。鏈結的線圖中每一分量都以類似絲帶而有偶數半扭的紙條取代，則第一種芮氏形變不再有作用。因為如圖三十一所示，我們可以將一個捲 (curl) 替換為一個扭 (twist)。

事實上，圖三十一告訴我們相應於帶子的完全扭曲有二種不同的“捲”。括號多項式 (與繞數) 以同樣的方式作用在這些扭曲上，這表示我們可將括號多項式重新解釋為三度空間中有結，有連結的扭曲帶子的拓樸嵌入不變量，也就是說括號多項式有其三維的意義，雖然它的定義範圍是在三度空間中的結在平面上的投影。



圖三十一 . 帶子與扭曲

計算括號多項式

為了計算三葉結  $T$  的括號多項式，我們畫出所需的線團樹，見圖三十二。按照狀

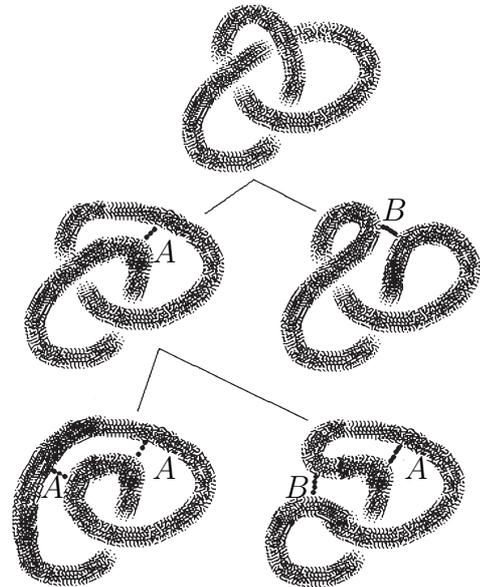
態和計算法則得到

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= A^2(-A^3) + AA^{-1}(-A^{-3}) \\ &\quad + A^{-1}(-A^{-3})^2 \\ &= -A^5 - A^{-3} + A^{-7}. \end{aligned}$$

所以括號多項式為

$$\begin{aligned} f_T &= (-A^3)^{-W(T)} \cdot \langle T \rangle \\ &= A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}. \end{aligned}$$

注意到在上面計算中我們只用到三個狀態即可，而不需用到全部八個狀態。我們可做如此的簡化，因為我們知道括號狀態和如何作用在“捲”上。我們得到的一些單項式的和，有利於思考不變量的性質。



圖三十二 . 三葉結的括號線團樹

鏡相

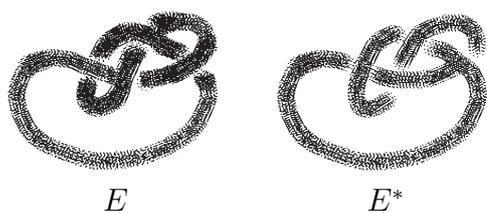
對於一個給定的結或鏈結  $K$ ，將  $K$  中所有的“跨越” (crossings) 變號所得的新

結或鏈結  $K^*$  叫做  $K$  的鏡像。也就是說想像  $K$  的線圖所在的平面是鏡子則  $K^*$  就是  $K$  的鏡中像。由定義可算出  $\langle K^* \rangle (A) = \langle K \rangle (A^{-1})$ ,  $f_{K^*}(A) = f_K(A^{-1})$ 。所以, 如果  $K$  與  $K^*$  同倫 (所有三種芮氏形變都是允許的) 則

$$f_K(A) = f_{K^*}(A) = f_K(A^{-1}).$$

回到三葉結的  $f$  - 不變量, 注意到  $f_T(A^{-1})$  不等於  $f_T(A)$ 。由此可知, 三葉結  $T$  與其鏡像  $T^*$  拓樸結構不同, 這是我所知證明這個事實最簡單的證明。這個證明是從芮氏形變開始經由建構括號多項式, 並應用此不變量而完成。

我們稱一個結是 chiral (或譯手徵性) 如果它與它的鏡像不等價。“chiral” 和 “chirality” 出自物理化學與自然科學, 與其鏡像等價的結則被稱做 achiral (或譯不具手徵性)。(或被結理論學家稱為 amphicheiral) 許多結都是 achiral。讀者也許樂於嘗試證明圖三十三中的八字結  $E$  等價於其鏡像  $E^*$ 。



圖三十三 . 八字結與其鏡像

決定一個結是否是 chiral 的了解還停留在初步的階段, 新的結與鏈結的不變量有助於對這個難題的了解。

### 再論鍾氏多項式

讓我們驗證括號多項式確實提供了鍾氏多項式的模型。為此, 考慮

$$f_K(A) = (-A^3)^{-W(K)} \cdot \langle K \rangle (A).$$

由於繞數,  $W(K)$  是  $K$  所有跨越處符號的和, 每一跨越處依其符號的正負而有  $(-A^3)$  或  $(-A^3)^{-1}$  的值, 而  $(-A^3)^{-W(K)}$  可解釋為所有這些值的乘積。如此我們可為一個有取向的結或鏈結  $K$  的  $f_K$  寫出下面的狀態和展開公式: 令  $K_+$  ( $K_-$ ) 表取向而具有  $K$  中正 (負) 跨越的結或鏈結。  $K_0$  為順著取向將  $K_+$  中跨越處平滑後所得的結,  $K_{\&}$  則為逆著取向平滑化後所得的結, 則

$$f_{K_+} = (-A^3)^{-1} A f_{K_0} + (-A^3)^{-1} A^{-1} f_{K_{\&}}.$$

所以

$$f_{K_+} = -A^{-2} f_{K_0} - A^{-4} f_{K_{\&}}.$$

同樣的, 對於負跨越我們有

$$f_{K_-} = -A^2 f_{K_0} - A^4 f_{K_{\&}}.$$

令  $V_K(t) = f_K(t^{-1/4})$  則

$$V_{K_+} = -t^{1/2} V_{K_0} - t V_{K_{\&}}$$

$$V_{K_-} = -t^{-1/2} V_{K_0} - t^{-1} V_{K_{\&}}.$$

二式合併得鍾氏多項式的公設

$$t^{-1} V_{K_-} - t V_{K_-} = (t^{1/2} - t^{-1/2}) V_{K_0}.$$

我們把 “ $V_K(t)$  確是鍾氏多項式” 留予讀者證明 (回顧第四節, 注意須要驗證  $V_K(t)$  對未打結的封閉曲線有正確的性質。)

## 參考文獻

1. Y. Akutsu and M. Wadati, Knot invariants and critical statistical system, J. Phys. Soc. Japan, **56**(1987), 839-842.
2. J. H. Conway, An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties, Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, New York, 1970, 329-358.
3. V. F. R. Jones, Index for subfactors, Invent. Math., **72**(1983), 1-25.
4. V. F. R. Jones, A polynomial invariant for links via von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc., **129**(1985), 103-112.
5. V. F. R. Jones, On knot invariants related to some statistical mechanics models, Pacific J. Math., **137**(1989), 311-334.
6. L. H. Kauffman, The Conway polynomial, Topology, **20**(1980), 101-108.
7. L. H. Kauffman, Formal Knot Theory, Lecture Notes No.30, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983.
8. L. H. Kauffman, State models and the Jones polynomial, Topology, **26**(1987), 395-407.
9. L. H. Kauffman, Statistical mechanics and the Jones polynomial. In Proceedings of the 1986 Santa Cruz conference on Artin's Braid Group. AMS Contemp. Math. Series, **78**(1989), 263-297. Reprinted in *New Problems, Methods and Techniques in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, 175-222. Ed. by M. Rasetti. World Scientific Pub. (1990).
10. L. H. Kauffman, An invariant of regular isotopy, Trans. Amer. Math. Soc., **318**(1990), 417-471.
11. W. Menasco and M. Thistlethwaite, The classification of alternating links, Annals of Math., **138**(1993), 113-171.
12. K. Murasugi, The Jones polynomial and classical conjectures in knot theory, Topology, **26**(1987), 187-194.
13. K. Murasugi, Jones polynomials and classical conjectures in knot theory II, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **102**(1987), 317-318.
14. M. B. Thistlethwaite, Kauffman's polynomial and alternating links, Topology, **27**(1988), 311-318.

(本文原是作者為 *Encyclopedia of Natural and Physical Science* 所寫)

—本文作者任教於美國伊利諾大學，譯者為中央研究院數學所研究人員—

—(下期待續)—