圖變了嗎?

嘗試由不同的角度去掘取資訊

蔡紋琦 · 謝復興

想像我們面前有一面牆, 牆上掛了兩幅畫作, 左邊的一幅是畢卡索的抽象畫, 右邊的一幅乍看之下似乎和左邊那幅一模一樣, 實際上它已經被動了手脚, 有一小塊區域被換上了別的顏色, 只是我們不知道而已。你覺得我們是否能夠看出兩幅畫是不一樣的呢? 當然啦! 你可能會說, 假若那一塊被動了手脚的區域很大、很明顯的話, 那我們當然就能分辨出兩幅畫其實是不相同的。可是若不同的區域太小且不明顯的話, 那我是否還有能力看出兩幅畫是不一樣的呢? 是不是有可能藉由某些方法, 把不一樣的區域, 若存在的話, 給放大呢? 若可行的話, 那問題就解決了。

我們現試著用一個比較簡單的例子來說明。假設我們有一個 8×8 的矩陣 (matrix), 其每一個元素值可以是 0、1、2 或3, 見圖一。數字 0 代表最暗 (或黑色), 數字 3 代表最亮 (或白色), 數字 1、2 則表示中間的亮度 (或深灰及淺灰色)。所以一張有亮有暗的圖片, 就可以被轉換成一個由一些數字所構成的矩陣。

現在假設我們將圖一中矩陣 (c) 中的一個元素值改變 (見圖二), 即相當於改變圖片

0	0	0	0	3	3	3	3
0	0	0	0	3	3	3	3
0	0	0	0	3	3	3	3
0	0	0	0	3	3	3	3
2	2	2	2	1	1	1	1
2	2	2	2	1	1	1	1
2	2	2	2	1	1	1	1
2	2	2	2	1	1	1	1

(a) 不亂

1	1	2	2	1	1	2	2
1	1	2	2	1	1	2	2
2	2	0	0	3	3	1	1
2	2	0	0	3	3	1	1
0	0	3	3	0	0	3	3
0	0	3	3	0	0	3	3
2	2	0	0	3	3	1	1
2	2	0	0	3	3	1	1

(b) 中亂

2	1	2	1	2	1	2	1
1	3	1	3	0	3	0	2
2	0	2	0	3	0	3	1
1	3	0	3	0	3	1	2
2	0	3	0	3	0	3	1
1	3	0	2	0	3	0	2
2	0	3	0	3	0	3	1
1	2	1	2	1	2	1	2

(c) 大亂

圖一. 三個不同類型代表的 8×8 矩陣, 每一個矩陣中各有 16 個 0、16 個 1、16 個 2

及 16 個 3。

中一小塊區域的明亮度 (或顏色), 那麼是否有可能將此改變給擴大, 使得我們更有能力偵測出其不同呢? 我們採用的作法就是將原來只差異一個元素的二個矩陣轉化成另二個差異較大的矩陣, 這樣如前面所說的, 我們就更因此能看出他們的不同了。以下就是矩陣的轉換過程, 假設給定一個矩陣, 例如圖一之 (a) 矩陣, 首先先將每一邊的內緣第二層鏡射至外圍 (如圖三 (a)), 然後再將每一點和周圍四個點的差之絕對值相加 (如圖三 (b)), 所得到的新矩陣, 我們即稱作原來矩陣的 total variation matrix。現在我們來看 total variation matrix 能帶給我們甚麼樣的好處, 圖四即是圖二中兩個矩陣經過前述轉換後所得到的 total variation matrix, 看看是不是不同的區域擴大了呢? 也就是說藉由這個 total variation 的轉換, 使得我們更能偵測出兩個圖形的不同。

2	1	2	1	2	1	2	1
1	3	1	3	0	3	0	2
2	0	2	0	3	0	3	1
1	3	0	**3**	0	3	1	2
2	0	3	0	3	0	3	1
1	3	0	2	0	3	0	2
2	0	3	0	3	0	3	1
1	2	1	2	1	2	1	2

2	1	2	1	2	1	2	1
1	3	1	3	0	3	0	2
2	0	2	0	3	0	3	1
1	3	0	**2**	0	3	1	2
2	0	3	0	3	0	3	1
1	3	0	2	0	3	0	2
2	0	3	0	3	0	3	1
1	2	1	2	1	2	1	2

圖二. 兩個只有一個元素有差異的矩陣, 其 SS 值爲 1。

	0	0	0	0	3	3	3	3	
0	0	**0**	0	0	3	3	**3**	3	3
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**3**	**3**	**3**	**3**	3
0	0	**0**	0	0	3	3	**3**	3	3
0	0	**0**	0	0	3	3	**3**	3	3
2	2	**2**	2	2	1	1	**1**	1	1
2	2	**2**	2	2	1	1	**1**	1	1
2	**2**	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	1
2	2	**2**	2	2	1	1	**1**	1	1
	2	2	2	2	1	1	1	1	

(a) 鏡射

0	0	0	3	3	0	0	0	
0	0	0	3	3	0	0	0	
0	0	0	3	3	0	0	0	
2	2	2	5	5	2	2	**2**	$= \|3-3\|+\|3-3\|+\|3-1\|+\|3-3\|$
2	2	2	3	3	2	2	2	
0	0	0	1	1	0	0	0	
0	0	0	1	1	0	0	0	
0	0	0	1	1	0	0	**0**	$= \|1-1\|+\|1-1\|+\|1-1\|+\|1-1\|$

(b) 計算和鄰居間的距離和

圖三. 求得一個矩陣其 total variation matrix 之過程。

4	6	4	6	6	6	6	4
6	9	6	10	11	11	10	6
6	10	7	**11**	12	12	10	6
6	11	**11**	**12**	**12**	11	7	4
6	11	12	**11**	12	12	10	6
6	11	11	8	11	12	11	6
6	10	11	10	11	11	10	6
4	6	6	6	6	6	6	41

4	6	4	6	6	6	6	4
6	9	6	10	11	11	10	6
6	10	7	**10**	12	12	10	6
6	11	**10**	**8**	**11**	11	7	4
6	11	12	**10**	12	12	10	6
6	11	11	8	11	12	11	6
6	10	11	10	11	11	10	6
4	6	6	6	6	6	6	4

圖四. 圖二之兩個矩陣的 total variation matrix, 其 SS 值爲 20。

現在我們再來看另一個有趣的現象。在圖一中列舉了三個 8×8 的矩陣, 每一個矩陣分別有 16 個 0、1、2 及 3, 它們分別代表了三種類型的矩陣: (a) 矩陣的排列相當整齊, (c) 矩陣則相當混亂, (b) 矩陣之『亂度』則是介於矩陣 (a) 與矩陣 (c) 之間。我們想問的是, 若這三個矩陣分別各有一個 3 被改成 2, 則是不是不同亂度的明亮排列組合會影響到我們偵測出其是否被改變的能力? 我們首先先定義一個量化值來衡量兩個矩陣之間的差異性: 先將這兩個給定的矩陣其相對應位置的元素值相減, 然後平方再加起來, 所得到的值稱作這兩個矩陣之間差異的 SS 值 (Sum of Squares)(見圖二及圖四)。SS 值愈大則表示兩個圖形間的差異愈大, 換言之, 我們也就越容易分辨出兩個圖形間之不同。接下來, 我們就試著用 SS 值來看不同的明亮排列組合是否會影響到我們分辨圖形是否不同的能力。以最亂的 (c) 矩陣爲例, 我們將其中一個 3 改成 2, 再分別將原來和改變過後的矩陣轉換成其 total variation matrix, 最後再算出其這兩個 total variation matrix 之間的 SS 值 (見圖四)。因爲矩陣中共有 16 個位置爲 3, 所以我們共可得到 16 個 SS 值。再對矩陣 (a) 及矩陣 (b) 做同樣的計算, 將所有 SS 值整理於表一。看出任何端倪了嗎?

表一. 三個不同亂度的矩陣, 當其中一個元素值由 3 改成 2 時, 所得到的 SS 值。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
矩陣(a)	7	19	22	18	11	23	26	22	8	20	23	19	4	8	11	7
矩陣(b)	4	4	4	4	4	4	7	7	4	4	7	7	7	7	7	7
矩陣(c)	26	23	23	20	23	23	20	20	20	20	23	23	20	23	23	26

是的, 當明亮排列較整齊 (矩陣 (a)) 或較混亂 (矩陣 (c)) 時, 其 SS 值都偏大, 而當明亮度的排列不非常齊也不非常亂時 (矩陣 (b)), 其 SS 值偏小。也就是說不同的排列會影響到我們判斷圖形是否被改變的能力。而且排的越整齊或越亂時, 我們越有能力去偵測出圖形是否變了。

之前的舉例說明及計算, 再再都傳遞了一個重要的訊息, 若我們能夠適當的從不同的角度去觀察我們手上原有的資料 (將原來的矩陣轉換成 total variation matrix), 那我們將能獲取更多我們想要知道的資訊 (擴大差異的存在以偵測出圖形的改變), 甚至切入角度的不同 (不同的明亮排列組合), 也會得到不同的資訊 (不同的 SS 值)。所以, 假如我們現在再問一次, 若在我們面前牆上的兩幅畫, 它們只有很小很小的差異, 你覺得你現在是否有能力, 從不同的角度去觀察出它們之間差異的存在呢?

—本文作者分別任職於政大統計系及中央研究院統計所—