登阿里山——搭小火車或是直昇機?

沈淵源

摘要: 設 n, k 為正整數 $(k>1)$。令 $S_n(k)$ 為前 $k-1$ 個自然數的 n 次方和。我們試著以最原始的方法 (其觀念源自 Jacques Bernoulli), 用數學的套裝軟體 Mathematica 為實驗的工具, 透過其符號計算的功能來引導我們探討 $S_n(k)$ 的一個公式:

$$S_n(k)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i k^{n+1-i},$$

此處 B_i 為 Bernoulli 數。

1. 引言

請計算前一千個自然數的十次方和:

$$1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+1000^{10}$$

當你遇到這樣問題的時候, 你會有怎麼樣的反應呢? 可能你的第一個反應是期待 Mathematica 幫幫忙! 那麼就讓我們趕快進入 Mathematica 的世界中吧。(本文所採用的版本為 Mathematica 3.0)

MATHEMATICA 其指令如下:

```
Sum[a^10,{a,1,1000}]
```

十分之一秒鐘不到, Mathematica 就告訴你答案是:

91409924241424243424241924242500

實在太美了, 太令人興奮了! 興奮之餘可能你期待有個公式來算, 免得每次勞駕 Mathematica 。三百多年前 Jacques Bernoulli (1654–1705) 說他可以在半刻鐘之內算出這個和, 你呢? 除了上面兩個期待之外, 還有其他的妙計嗎?

我們都很熟悉, 前 $k-1$ 個自然數的和、平方和及其立方和之公式為:

$$\begin{aligned}
&1+2+3+\cdots+(k-1)\\
&=\frac{1}{2}\,k^2-\frac{1}{2}\,k,\\
&1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2\\
&=\frac{1}{3}\,k^3-\frac{1}{2}\,k^2+\frac{1}{6}\,k,\\
&1^3+2^3+3^3+\cdots+(k-1)^3\\
&=\frac{1}{4}\,k^4-\frac{1}{2}\,k^3+\frac{1}{4}\,k^2
\end{aligned}$$

還記得當初你是怎麼導出這些公式的嗎? 當你在國中的時候, 不費吹灰之力的, 就可以導出一次方和的公式。令

$$S_1=1+2+3+\cdots+(k-1),$$

將此和之次序倒過來書寫, 我們就有

$$S_1=(k-1)+(k-2)+(k-3)+\cdots+1,$$

再把這兩種寫法按序將對應項相加得到 k, 所以就有下面的等式

$$2S_1=k+k+k+\cdots+k$$

這裡共有 $k-1$ 個 k, 因此 S_1 的公式馬上就在我們眼前。

怎麼樣把這個方法推廣到平方和呢? 這下子你可就灰頭土臉的了。怎麼辦呢? 山不轉, 但路可以轉, 所以人生的經歷告訴我們, 是路轉的時候了。所謂路轉者也, 就是方法要變囉。一次方來自兩個連續整數的平方差 $\cdots$,

$$(j+1)^2-j^2=2j+1$$

若將對應於 $j=0,1,2,\ldots,k-1$ 的 k 個等式相加, 等式的左方對消之後只剩 k^2, 而等式的右方有兩倍的一次方和加上 k 個1。所以我們有

$$k^2=2[1+2+3+\cdots+(k-1)]+k\cdot 1,$$

整理後可得到

$$1+2+3+\cdots+(k-1)=\frac{1}{2}\ k^2-\frac{1}{2}\ k$$

山路崎嶇, 或許你會覺得太浪費時間, 但這是確定可以抵達山頂的一個方法 (當你搭上阿里山的登山鐵道時, 必有同感)。如法泡製, 我們可以處理平方和的問題:

$$(j+1)^3-j^3=3j^2+3j+1$$

同樣地, 將對應於 $j=0,1,2,\ldots,k-1$ 的 k 個等式相加, 可得

$$k^3=3[1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2]$$
$$+3[1+2+3+\cdots+(k-1)]+k\cdot 1,$$

代入前面一次方和的公式, 化簡後, 我們有

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2=\frac{1}{3}\ k^3-\frac{1}{2}\ k^2+\frac{1}{6}\ k$$

重複此法, 十次之後我們就可以得到 $1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+(k-1)^{10}$ 的公式, 令 $k=1001$, 即可得到結果。但不管你速度多快, 也無法在半刻鐘之內完成, 你還是輸給了 Jacques Bernoulli。爲什麼呢? 因爲我們的方法是登山鐵道的辦法, 到第二階, 得先經過第一階; 是可以抵達山頂, 但太不經濟了! 是否眞的如此呢? 最後我們再作評論。

Jacques Bernoulli 之所以與衆不同, 在於他用分析的方法來解決代數的問題, 他不搭火車而是搭直昇機!他聲稱有唯一的一個首項係數爲1 之 n 次多項式 $B_n(x)$ 使得

$$1^n+2^n+3^n+\cdots+(k-1)^n=\int_0^k B_n(x)dx。$$

其實 Jacques Bernoulli 的慧眼, 只需要微積分的知識與訓練就可具有的。還沒有作實驗之前, 請先思考下面兩個問題:

(a) 可否設計一個實驗來證明你也可以當 Jacques Bernoulli 呢?

(b) 很自然的, 上面所定義的這些多項式 $B_n(x)$ 我們就稱爲 Bernoulli 多項式。你能用 Mathematica 設計一個實驗來計算這些多項式 $B_n(x)$ 嗎?

令 $S_n(k)$ 爲前 $k-1$ 個自然數的 n 次方和。我們的目標是:

找出 $S_n(k)$ 的公式 (不單單是遞回公式而已)

由前面三個 $S_n(k)$ 的公式, 不難猜出其形式爲

$$S_n(k)=\frac{1}{n+1}\ k^{n+1}-\frac{1}{2}\ k^n+k(\cdots),\quad (1)$$

此處 B_n 爲一常數, 而這就是 Jacques Bernoulli 的慧眼所看到的。爲了確認其形式的確如此, 而非由於我們的想像力太過豐富 (才觀察三個例子就知道一般的公式), 所以讓我們多觀察幾個 $S_n(k)$ 的公式吧!

2. 實驗一 (Jacques Bernoulli 的慧眼)

Mathematica 不單單能做數值計算, 並且也能做符號計算。

(a) 首先在 Mathematica 中定義函數 $S_n(k) = S[n,k]$, 然後列出 $S[n,k]$, $n=1,2,3,\ldots,9$。
MATHEMATICA 其指令如下:

```
S[n_,k_]:=Expand[Sum[a^n,{a,1,k-1}]];
MatrixForm[Table[{n,S[n,k]]},{n,1,9}]
```

(b) 觀察其形式可得到怎麼樣的規則呢?

(c) 若將 $S[n,k]$ 對 k 來微分, 觀察其形式又如何呢?
MATHEMATICA 其指令如下:
```
Table[{n,D[S[n,k],k]]},{n,1,9}]
//MatrixForm
```

(d) 你也可以當 Jacques Bernoulli 嗎?

3. 實驗一之結果與分析

實驗一 (a) 的輸出結果如下:

1	$-\frac{k}{2}+\frac{k^2}{2}$
2	$\frac{k}{6}-\frac{k^2}{2}+\frac{k^3}{3}$
3	$\frac{k^2}{4}-\frac{k^3}{2}+\frac{k^4}{4}$
4	$-\frac{k}{30}+\frac{k^3}{3}-\frac{k^4}{2}+\frac{k^5}{5}$
5	$-\frac{k^2}{12}+\frac{5k^4}{12}-\frac{k^5}{2}+\frac{k^6}{6}$
6	$\frac{k}{42}-\frac{k^3}{6}+\frac{k^5}{2}-\frac{k^6}{2}+\frac{k^7}{7}$
7	$\frac{k^2}{12}-\frac{7k^4}{24}+\frac{7k^6}{12}-\frac{k^7}{2}+\frac{k^8}{8}$
8	$-\frac{k}{30}+\frac{2k^3}{9}-\frac{7k^5}{15}+\frac{2k^7}{3}-\frac{k^8}{2}+\frac{k^9}{9}$
9	$-\frac{3k^2}{20}+\frac{k^4}{2}-\frac{7k^6}{10}+\frac{3k^8}{4}-\frac{k^9}{2}+\frac{k^{10}}{10}$

由此實驗, 我們有下面三個猜測 (此即 (1) 式所要表達的內容):

(a) $S_n(k)$ 爲一 k 的 $n+1$ 次多項式, 其首項係數爲 $\frac{1}{n+1}$,

(b) $S_n(k)$ 的常數項爲 0, 亦即 $S_n(0)=0$,

(c) $S_n(k)$ 的 k^n 項之係數爲 $-\frac{1}{2}$ 。

很顯然的, (a) 與 (b) 可合併而成下面的猜測: 如上所言這就是 Jacques Bernoulli 的慧眼所觀察出來的。

猜測: 存在唯一的一個首項係數爲1 之 n 次多項式 $B_n(x)$ 使得

$$\begin{aligned} S_n(k) &= 1^n+2^n+3^n+\cdots+(k-1)^n \\ &= \int_0^k B_n(x)dx \qquad (2) \end{aligned}$$

怎麼證明這個猜測呢? 其實在前面所提到的登山鐵道之辦法裏已暗藏著證明的玄機。

且看:

$$(j+1)^n - j^n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} j^i$$

將對應於 $j = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ 的 k 個等式相加, 等式的左方對消之後只剩 k^n, 而等式的右方則爲 $S_i(k)$的線性組合, 如下所示:

$$k^n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} S_i(k)$$

將上式的 n 取代爲 $n+1$, 可得

$$\begin{aligned} k^{n+1} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} S_i(k) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} S_i(k) + (n+1) S_n(k) \end{aligned}$$

所以我們有 $S_n(k)$ 的遞迴公式如下:

$$\begin{aligned} S_n(k) &= \frac{1}{n+1} k^{n+1} \\ &\quad - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} S_i(k) \end{aligned} \tag{3}$$

透過這個遞迴公式, 利用數學歸納法, 很容易的我們就可以證明上面的猜測都是對的 (請動手證明看看吧!), 換句話說這些猜測其實都是定理。所以我們的目標現在已變成:

找出 $B_n(k)$ 的公式

當然由 (2) 及 (3) 式, 我們馬上可得到一個 $B_n(k)$ 的遞迴公式如下:

$$B_n(k) = k^n - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i(k)$$

然而這並不是我們所要的, 所以我們必須另起爐灶。很顯然的, (2) 式是此處一切思考的來源, 且看下面的實驗:

4. 實驗二 (Bernoulli 多項式 $B_n(x)$)

由定義馬上可以看出 Bernoulli 多項式必定會滿足下面的等式:

$$\int_k^{k+1} B_n(x)\,dx = k^n \tag{4}$$

事實上, 對任何正整數 n, 存在唯一的一個首項係數爲 1 之 n 次多項式滿足這個方程式, 而其中的 k 可以是任何的數 (不僅限於正整數而已)。

(a) 用 Mathematica 中符號計算的功能, 透過公式 (4) 計算 $B_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots, 9$。

MATHEMATICA 其指令如下:

```
B[n_,x_]:=Sum[B[i]*x^i,{i,0,n-1}]+x^n
poly[n_]:=Series[Integrate[B[n,x],
          {x,k,k+1}]-k^n,{k,0,n}]
m=MatrixForm[Table[{sols
 =Solve[LogicalExpand[poly[i]==0]],
B[i,x]/.sols[[1]]}, {i,1,9}]]
```

(b) 請畫出 $B_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots, 9$ 的圖形。

MATHEMATICA 其指令如下 (注意 $B_n(x)$ =m[[1,n]][[2]]):

```
Plot[m[[1,1]][[2]],{x,-3,3}]
Plot[m[[1,2]][[2]],{x,-3,4}]
Plot[m[[1,3]][[2]],{x,-3,3}]
Plot[m[[1,4]][[2]],{x,-3,3}]
Plot[m[[1,5]][[2]],{x,-3,3}]
Plot[m[[1,6]][[2]],{x,-3,3}]
Plot[m[[1,7]][[2]],{x,-3,3}]
Plot[m[[1,8]][[2]],{x,-3,3}]
Plot[m[[1,9]][[2]],{x,-3,3}]
```

或是放在同一座標平面上

```
Plot[{m[[1,1]][[2]],m[[1,2]][[2]],
      m[[1,3]][[2]],m[[1,4]][[2]],
      m[[1,5]][[2]],m[[1,6]][[2]],
      m[[1,7]][[2]],m[[1,8]][[2]],
      m[[1,9]][[2]]},{x,-3,4},
PlotStyle->{GrayLevel[0],
GrayLevel[.5],RGBColor[0.5,0,0],
RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,0.5,0],
RGBColor[0,1,0],RGBColor[0,0,0.5],
RGBColor[0,0,1],RGBColor[1,1,0]}]
```

(c) 由這些計算或圖形, 你能看出一般 $B_n(x)$ 的公式嗎? 困難何在?

5. 實驗二之結果與分析

在實驗二中, 我們試著要由前面幾個多項式 $B_n(x)$, $n=1,2,\ldots,9$ 及其圖形來預測其一般的公式。且看:

$$B_1(x)=x-\frac{1}{2},$$

$$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},$$

$$B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,$$

$$B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30},$$

$$B_5(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x,$$

$$B_6(x)=x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42},$$

$$B_7(x)=x^7-\frac{7}{2}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{6}x,$$

$$B_8(x)=x^8-4x^7+\frac{14}{3}x^6-\frac{7}{3}x^4+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{30},$$

$$B_9(x)=x^9-\frac{9}{2}x^8+6x^7-\frac{21}{5}x^5+2x^3-\frac{3}{10}x。$$

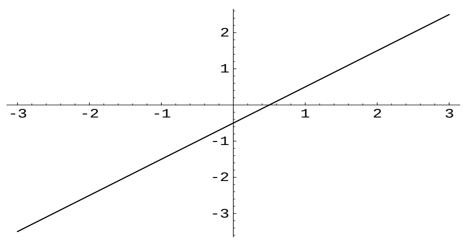

圖1. $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$

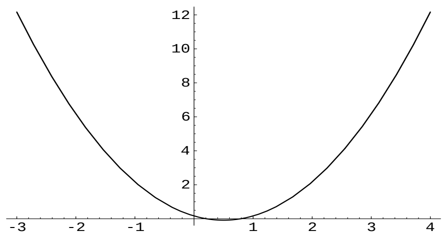

圖2. $B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$

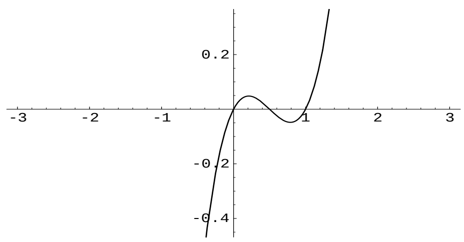

圖3. $B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$

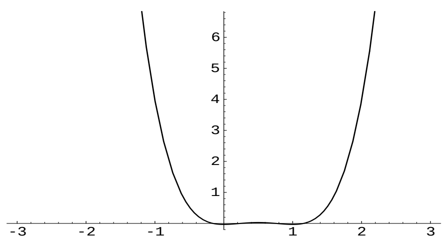

圖4. $B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$

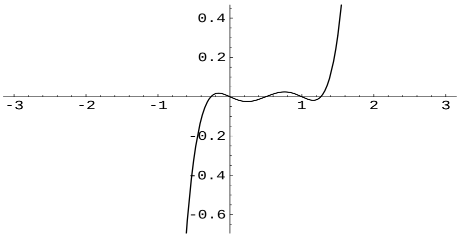

圖5. $B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3} - \frac{1}{6}x$

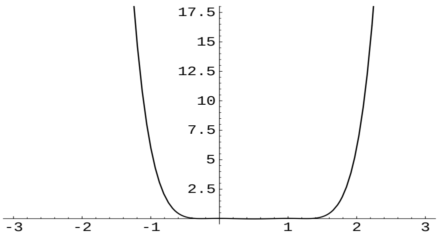

圖6. $B_6(x)=x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}$

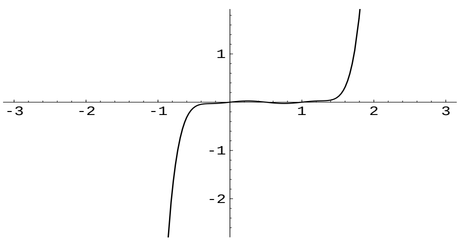

圖7. $B_7(x)=x^7-\frac{7}{2}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{6}x$

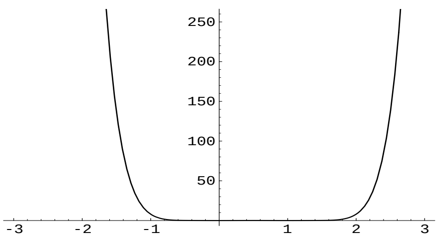

圖8. $B_8(x)=x^8-4x^7+\frac{14}{3}x^6-\frac{7}{3}x^4$

$+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{30}$

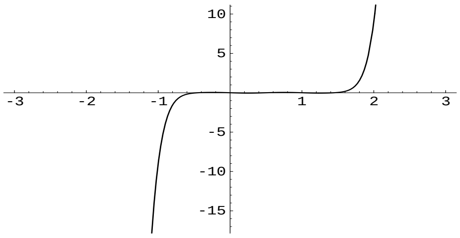

圖9. $B_9(x)=x^9-\frac{9}{2}x^8+6x^7-\frac{21}{5}x^5$
$+2x^3-\frac{3}{10}x$。

但不管由其形式或圖形 (見圖1至圖9), 實在是歸納不出什麼東西來。目前我們還沒有用到任何分析中較重要的結果, 所以我們不妨先詳細觀察一下公式 (4), 其左邊是 $B_n(x)$在區間 $[k, k+1]$ 的定積分, 右邊則是 k^n; 所以可看成是 k 的函數。根據微積分基本定理, 我們有

$$B_n(k+1)-B_n(k)=nk^{n-1}, \quad (5)$$

因此可得

$$\begin{aligned}&[B_n(1)-B_n(0)]+[B_n(2)-B_n(1)]\\&+\cdots+[B_n(k)-B_n(k-1)]\\=\;&n[0^{n-1}+1^{n-1}+2^{n-1}+\cdots+(k-1)^{n-1}],\end{aligned}$$

化簡之後我們有

$$\begin{aligned}\frac{B_n(k)-B_n(0)}{n}&=S_{n-1}(k)\\&=\int_0^k B_{n-1}(x)dx。\quad (6)\end{aligned}$$

所以得到相鄰兩個 Bernoulli 多項式的關係如下:

$$B_n(x)=n\int_0^x B_{n-1}(t)dt+B_n(0), \quad (7)$$

這幾乎是 $B_n(x)$ 的一個一階遞迴公式。另一方面, 方程式 (6) 中的第一個等式告訴我們下面的公式:

$$S_n(k)=\frac{B_{n+1}(k)-B_{n+1}(0)}{n+1}. \quad (8)$$

由實驗二我們知道

$$B_9(x)=x^9-\frac{9}{2}x^8+6x^7-\frac{21}{5}x^5+2x^3-\frac{3}{10}x,$$

如果我們得知 $B_{10}(0)=\frac{5}{66}$, 那麼要找 $B_{10}(x)$ 只需將 $B_9(x)$ 積分後乘以 10, 再加上 $\frac{5}{66}$:

$$\begin{aligned}B_{10}(x)&=10\Big(\frac{1}{10}x^{10}-\frac{1}{2}x^9+\frac{3}{4}x^8-\frac{7}{10}x^6\\&\quad+\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{20}x^2\Big)+\frac{5}{66}\\&=x^{10}-5x^9+\frac{15}{2}x^8-7x^6+5x^4\\&\quad-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{66}。\end{aligned}$$

所以如果我們知道每個多項式 $B_n(x)$ 的常數項:

$$B_1(0)=-\frac{1}{2},\ B_2(0)=\frac{1}{6},\ B_3(0)=0,\ldots,$$

公式 (7) 就提供了一個管道, 可以依次求出你所需要的 Bernoulli 多項式。這些常數項 $B_n(0)$ 我們就稱爲 Bernoulli 數, 以符號 B_n 表示之:

$$B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},$$
$$B_5=0,\ B_6=\frac{1}{42},\ B_7=0,\ldots。$$

其實, 上面的計算與觀察有點把我們引導到一個錯誤的方向。假如我們先不去管 Bernoulli 數的值, 反而使我們更容易得到 Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ 的公式。請看下面的實驗:

6. 實驗三 (Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ 的公式)

還記得我們的 $B_1(x)$ 等於 $x+B_1$ 嗎? 將公式 (7) 寫成

$$B_n(x)=n\int_0^x B_{n-1}(t)dt+B_n \qquad (9)$$

(a) 透過公式 (9), 請用 Mathematica 由 $B_1(x)=x+B_1$ 開始, 依次算出 $B_n(x)$, $n=1,2,3,4,5$, 係數請用 Bernoulli 數表示之。

MATHEMATICA 其指令如下:

```
B1[x_]:=x+B1
B2[x_]:=Expand[2*Integrate[B1[t],
      {t,0,x}]+B2]
B3[x_]:=Expand[3*Integrate[B2[t],
      {t,0,x}]+B3]
B4[x_]:=Expand[4*Integrate[B3[t],
      {t,0,x}]+B4]
B5[x_]:=Expand[5*Integrate[B4[t],
      {t,0,x}]+B5]
Print["B1(x) = ", B1[x]]
Print["B2(x) = ", B2[x]]
Print["B3(x) = ", B3[x]]
Print["B4(x) = ", B4[x]]
Print["B5(x) = ", B5[x]]
```

(b) 由這些計算, 你能看出一般 $B_n(x)$ 的公式嗎?

(c) 若用 B^n 來代替 B_n , 你有什麼新發現呢?

7. 實驗三之結果與分析

現在終於撥開雲霧看見青天了, 上面的實驗告訴我們前五個 Bernoulli 多項式爲:

$$\begin{aligned}
B_1(x) &= x + B_1,\\
B_2(x) &= x^2 + 2B_1x + B_2,\\
B_3(x) &= x^3 + 3B_1x^2 + 3B_2x + B_3,\\
B_4(x) &= x^4 + 4B_1x^3 + 6B_2x^2 + 4B_3x\\
&\quad +B_4,\\
B_5(x) &= x^5 + 5B_1x^4 + 10B_2x^3 + 10B_3x^2\\
&\quad +5B_4x + B_5
\end{aligned}$$

這些形式乍看之下不就是二項式定理嗎? 仔細觀察則不然, 就差那麼一點點而已, 若將式中的 B_i 換成 B^i 那就完美無缺了。透過公式 (9), 利用數學歸納法可得 $B_n(x)$ 的公式如下:

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i\, x^{n-i} \tag{10}$$

將公式 (8) 與公式 (10) 合在一起, 我們終於得到一個 $S_n(k)$ 的公式:

$$\boxed{S_n(k) = \tfrac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i\, k^{n+1-i}}$$

此公式亦可由公式 (2) 與公式 (10) 導出來, 如下所示:

$$\begin{aligned}
S_n(k) &= \int_0^k B_n(x)\, dx\\
&= \int_0^k \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i\, x^{n-i} dx\\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{B_i\, k^{n+1-i}}{n+1-i}\\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i\, k^{n+1-i}
\end{aligned}$$

剩下的問題就是怎麼樣計算這些 Bernoulli 數。根據定義我們有:

$$B_n = B_n(0) = S_n'(0)$$

在 $S_n(k)$ 的遞迴公式 (3) 中, 將等式兩側對 k 來微分, 可得如下:

$$\begin{aligned}
(n+1)B_n(k) &= (n+1)k^n\\
&\quad - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i(k)\\
\Longrightarrow (n+1)B_n(0) &= (n+1)0^n\\
&\quad - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i(0)\\
\Longrightarrow B_n &= -\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i
\end{aligned}$$

上式即 Bernoulli 數的遞迴公式。此遞迴公式亦可由方程式 (5) 得到。在 (5) 中, 令 $k = 0$, 則 $B_n(1) - B_n(0) = 0$ 所以有

$$B_n = B_n(0) = B_n(1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i, \tag{11}$$

因此可得

$$\begin{aligned}
B_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} B_j\\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i + B_{n+1}\\
\Longleftrightarrow \quad & \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i = 0\\
\Longleftrightarrow \quad & B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i
\end{aligned}$$

如上所觀察到的, 形式上我們可將 $B_n(x)$ 及 B_n 的公式寫成:

$$B_n(x) = (B+x)^n, \quad 及 \quad B_n = (B+1)^n,$$

再將右側按二項式定理展開並將式中所有的 B^i 都換成 B_i 即得公式 (10) 及公式 (11), 請參閱 [1]。

8. 實驗四 (Bernoulli 數 B_n 的遞迴公式)

(a) 由 Bernoulli 數的遞迴公式, 試寫一程式來計算

$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ \ldots, B_{24}$$

MATHEMATICA 其指令如下:

```
B[n_]:= - Sum[ Binomial[n+1,i]B[i]
        {i,0,n-1}])/(n+1); B[0]=k;
Table[{n,Expand[B[n]]},{n,10}]
      //MatrixForm
```

(b) 觀察 Bernoulli 數, 你對 B_{2n+1} 有沒有任何猜測?

(c) 由 $S_n(k)$ 的遞迴公式 (3), 試寫一程式來計算

$$S_1(k),\ S_2(k),\ S_3(k),\ \ldots, S_{10}(k)$$

MATHEMATICA 令 $S[n]=S_n(k)$, 其指令如下:

```
S[n_]:=(k^(n+1)-Sum[Binomial[n+1,i]
     S[i],{i,0,n-1}])/(n+1); S[0]=k;
Table[{n,Expand[S[n]]},{n,10}]
      //MatrixForm
```

(d) 登山鐵道的辦法是否如引言中所提到的太不經濟呢? 有了 Mathematica 的提昇, 火車一變而成直昇機, 你認爲呢?

9. 結語 (Bernoulli 的七分半鐘)

由上面的計算得知 ($B_0=1$):

$$\begin{aligned}&B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\\ &B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0, B_6=\frac{1}{42},\\ &B_7=0,\ B_8=-\frac{1}{30},\ B_9=0,\\ &B_{10}=\frac{5}{66}\end{aligned}$$

其實, Bernoulli 數的分子從 B_{14} 開始就會比分母大, 而且愈來差距愈大。請參閱 [4]之附表一, 其中共列出 $B_2,\ldots,B_{124}$ 等 62個 Bernoulli 數。現在讓我們回到 Bernoulli 當年如何在七分半鐘算出前一千個自然數的十次方和的。我們有

$$\begin{aligned}S_{10}(k)&=\frac{1}{11}\sum_{i=0}^{10}\binom{11}{i}B_i\,k^{11-i}\\ &=\frac{1}{11}(k^{11}+11B_1k^{10}+55B_2k^9\\ &\quad+165B_3k^8+330B_4k^7+462B_5k^6\\ &\quad+462B_6k^5+330B_7k^4+165B_8k^3\\ &\quad+55B_9k^2+11B_{10}k+B_{11})\\ &=\frac{1}{11}k^{11}-\frac{1}{2}k^{10}+\frac{5}{6}k^9-k^7+k^5\\ &\quad-\frac{1}{2}k^3+\frac{5}{66}k\end{aligned}$$

所以可得

$$\begin{aligned}&1^{10}+2^{10}+\cdots+1000^{10}\\ &=10^{30}+\frac{1}{11}10^{33}-\frac{1}{2}10^{30}+\frac{5}{6}10^{27}\\ &\quad-10^{21}+10^{15}-\frac{1}{2}10^9+\frac{5}{66}10^3,\end{aligned}$$

這只是個簡單的小學算術問題而已。請看:

```
     1 00000 00000 00000 00000 00000 00000.00
+   90 90909 09090 90909 09090 90909 09090.90
-      50000 00000 00000 00000 00000 00000.00
+            83 33333 33333 33333 33333 33333.33
-                  10 00000 00000 00000 00000.00
+                           1 00000 00000 00000.00
-                                    5000 00000.00
+                                            75.75
_________________________________________________
  91 40992 42414 24243 42424 19242 42500
```

七分半鐘是綽綽有餘的 (請參閱 [2] 之附錄 A)。

參考文獻

1. Apostol, T., Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1986 (Third Printing).
2. Bressoud, D., A Radical Approach to Real Analysis, MAA, Washington D. C., 1994.
3. Ireland, K. and Rosen, M., A Classical Introduction to Modern Number Theory, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1982.
4. Washington, L., Introduction to Cyclotomic Fields, 2nd ed., Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1997.

—本文作者任教於私立東海大學數學系—