射影平面六講 — 第二講

王九逵

在歐氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中的直線都可以用

$$\lambda_0+\lambda_1 x+\lambda_2 y=0 \tag{1}$$

形的方程式表出, 式中 λ_0, λ_1 和 λ_2 爲實常數, λ_1 和 λ_2 不同時爲 0。若將點 (x,y) 改用齊次座標 (ξ_0,ξ_1,ξ_2) 表示, 則方程式 (1) 變成下形的齊次方程式了:

$$\lambda_0\xi_0+\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=0. \tag{2}$$

$\mathbb{P}$ 中滿足 (2) 式的點叫作 $\mathbb{P}$ 中的 *直線*, 它包含著滿足 (1) 式的所有有限點, 和一個唯一的無限遠點 $(0,-\lambda_2,\lambda_1)$。

若 $\lambda_1=\lambda_2=0$, 而 $\lambda_0\neq 0$, (2) 和方程式 $\xi_0=0$ 同値, 這便是所有無限遠點所滿足的方程式。因此我們可以設想所有無限遠點所成的集合爲一條 $\mathbb{P}$ 中的直線, 稱爲 *無限遠直線* (line at infinity)。從射影幾何的觀點講, 無限遠直線和別的直線並沒有什麼不同: 都是 $\mathbb{P}$ 中滿足 (2) 式的點的集合; 而對 (2) 式我們的要求該是 λ_0, λ_1 和 λ_2 不同時爲 0。

在 $\mathbb{P}$ 中取直線

$$\mu_0\xi_0+\mu_1\xi_1+\mu_2\xi_2=0, \tag{3}$$

式中 μ_0, μ_1 和 μ_2 不同時爲 0。則 (2) 和 (3) 表示同一條直線 l 的充要條件是 $\lambda_0:\lambda_1:\lambda_2=\mu_0:\mu_1:\mu_2$。我們稱 $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$ 爲直線 l 的一組 *齊次座標* 或 Plücker 座標。和點的齊次座標相似, 線的齊次座標的集合也是 $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, 而當且僅當兩個三維向量成比例時, 它們表示相同的直線, 而方程式 (2) 的意義是以 $\xi=(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$ 爲齊次座標的點落在以 $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$ 爲齊次座標的直線上的充要條件是二向量 ξ 和 λ 正交:

$$\xi\cdot\lambda=0. \tag{4}$$

因爲 $\xi\cdot\lambda=\lambda\cdot\xi$, 所以從算式 (4) 也可以推得在 $\mathbb{P}$ 中以 λ 爲齊次座標的點也落在以 ξ 爲齊次座標的直線上。於是我們得到了下述的 *射影幾何的對偶原理* (duality principle):

原理: 設 P 爲射影平面幾何中牽涉點、線及關係「點在線上」及「線通過點」的一個

命題。從 P 建立新命題 P' 如下: 我們把 P 中的點和線互換, 也把關係「點在線上」及「線通過點」互換。那麼 P 和 P' 必同時成立或同時不成立。

在對偶原理中的命題 P 和 P' 互稱 對偶命題 (dual propositions), 而點和線,「點在線上」和「線通過點」互稱 對偶概念 (dual concepts) 及 對偶關係 (dual relations)。例如若原命題爲「若 X 和 Y 爲 $\mathbb{P}$ 上相異的兩點, 則有且僅有一直線 l 通過 X 和 Y」(兩點決定一直線), 則其對偶命題爲「若 x 和 y 爲 $\mathbb{P}$ 上相異的兩直線, 則有且僅有一點 L 同時在 x 和 y 上」(兩直線決定一交點)。以下我們設法找出一些這樣的射影幾何的定理。

仍令 X 和 Y 爲 $\mathbb{P}$ 上相異的兩點。設 ξ 和 η 爲其齊次座標。則 ξ 和 η 線性無關, 從而 $\lambda=\xi\times\eta$ 爲連接 X 和 Y 的直線 l 的座標向量。這結果的對偶命題如下: 設 ξ 和 η 爲 $\mathbb{P}$ 中相異的兩直線 x 和 y 的齊次座標。則 $\lambda=\xi\times\eta$ 爲 x 和 y 的交點 L 的座標向量。利用這結果可得

定理: 設 X, Y, Z 爲 $\mathbb{P}$ 中的相異三點, ξ, η, ζ 爲表示齊次座標向量。則以下三款同值:

(1) X, Y, Z 三點共線;

(2) $\det\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=0$.

(3) ζ 可以寫成 ξ 和 η 的線性組合, 且這線性組合的係數均不爲 0。

證明: (1) $\Longrightarrow$ (2)。因 X, Y, Z 三點共線, 故 $\xi\times\eta$ 和 $\xi\times\zeta$ 表示相同的直線。因 $(\xi\times\eta)\times(\xi\times\zeta)=[(\xi\times\eta)\cdot\xi]\eta-[(\xi\times\eta)\cdot\zeta]\xi=-[(\xi\times\eta)\cdot\zeta]\xi$。但 $\xi\neq 0$, 所以

$$(\xi\times\eta)\cdot\zeta=0,$$

即 (2) 成立。

(2) $\Longrightarrow$ (3)。從 (2) 知 ξ, η 和 ζ 線性相關, 即有實數 a, b, c 使 $a\xi+b\eta+c\zeta=0$。但 $c\neq 0$, 否則 X 和 Y 是 $\mathbb{P}$ 中相同的點了。所以 ζ 可以寫成 ξ 和 η 的線性組合。但依和上面相同的討論, a 和 b 也都不是 0。所以 (3) 成立。

(3) $\Longrightarrow$ (1)。設 $\zeta=a\xi+b\eta$, 式中 $a\neq 0$, $b\neq 0$。則 $\xi\times\zeta=b\xi\times\eta$。遂知 X, Y, Z 三點共線。

本定理的對偶定理如下:

定理: 設 x, y, z 爲 $\mathbb{P}$ 中的相異的三直線, ξ, η, ζ 爲表示其座標向量。則以下三款同值:

(1) x, y, z 三直線共點;

(2) $\det\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=0$.

(3) ζ 可以寫成 ξ 和 η 的線性組合, 且這線性組合的係數均不爲0。

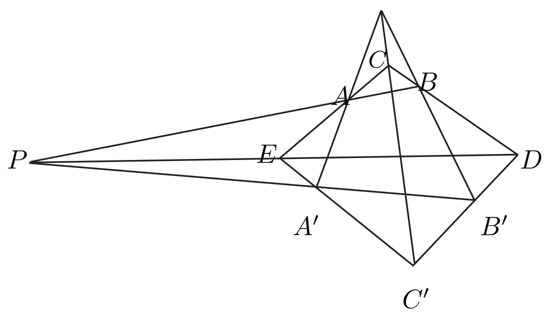
Gerard Desargues (1593-1662) 證明了下定理:

定理: 設二三角形的對應頂點連線共點, 則其對應邊交點共線。

引入符號, 我們可以把本定理改述如下:

設 A, B, C, A', B', C' 爲 $\mathbb{P}$ 中相異的六點。直線 BC 和 $B'C'$ 的交點爲 D, CA 和 $C'A'$ 的交點爲 E, AB 和 $A'B'$ 的交點

爲 F。若直線 AA', BB', CC' 共點, 則三點 D, E 和 F 共線。



圖一

證明: 設 A, B, C, A', B', C' 六點的齊次座標向量分別爲 α, β, γ, α', β', γ'。從定理的條件知有不等於 0 的實數 a 和 b 使 $\gamma\times\gamma' = a\alpha\times\alpha' + b\beta\times\beta'$。但 $a\alpha$ 和 $b\beta$ 也是 A 和 B 的齊次座標向量。我們把這兩個向量改名爲 α 和 β, 則有

$$\gamma\times\gamma' = \alpha\times\alpha' + \beta\times\beta'.$$

於是

$$\begin{aligned}
\delta &= (\beta\times\gamma)\times(\beta'\times\gamma')\\
\varepsilon &= (\gamma\times\alpha)\times(\gamma'\times\alpha')\\
\phi &= (\alpha\times\beta)\times(\alpha'\times\beta')
\end{aligned}$$

分別是 D, E, F 的齊次座標向量。利用向量代數知

$$\begin{aligned}
\delta &= [(\beta\times\gamma)\cdot\gamma']\beta' - [(\beta\times\gamma)\cdot\beta']\gamma'\\
&= [(\gamma\times\gamma')\cdot\beta]\beta' - [(\beta'\times\beta)\cdot\gamma]\gamma'\\
&= [(\alpha\times\alpha')\cdot\beta + (\beta\times\beta')\cdot\beta]\beta'\\
&\quad +[(\beta\times\beta')\cdot\gamma)]\gamma'.\\
&= [(\alpha\times\alpha')\cdot\beta]\beta' + [(\beta\times\beta')\cdot\gamma)]\gamma'.
\end{aligned}$$

仿此有

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= [(\gamma\times\alpha)\cdot\alpha']\gamma' - [(\gamma\times\alpha)\cdot\gamma']\alpha'\\
&= [(\alpha\times\alpha')\cdot\gamma]\gamma' + [(\gamma\times\gamma')\cdot\alpha]\alpha'\\
&= [(\alpha\times\alpha')\cdot\gamma]\gamma' + [(\beta\times\beta')\cdot\alpha]\alpha',\\
\phi &= [(\alpha\times\beta)\cdot\beta']\alpha' - [(\alpha\times\beta)\cdot\alpha']\beta'\\
&= [(\beta\times\beta')\cdot\alpha]\alpha' + [(\alpha\times\alpha')\cdot\beta]\beta'.
\end{aligned}$$

遂得

$$\delta+\varepsilon = [(\alpha\times\alpha')\cdot\gamma+(\beta\times\beta')\cdot\gamma]\gamma'+\phi = \phi.$$

這就是說 D, E, F 共線。

讀者可自行驗證 Desargues 定理的對偶定理便是它的逆定理。

—本文作者爲國立中央大學數學系退休教授—