數學家書寫歷史: 兼評John Stillwell 的「數學與它的歷史」

洪萬生

一. 前言

數學家書寫數學史, 無論目的在「數學」或「數學史」, 都是極正當的一件事。如果意在數學, 數學家通常認為「數學史」是數學的一個分支 (譬如美國數學學會 (AMS) 出版的 Mathematical Review 的評論對象就包括了數學史著作), 因而, 數學史的素養當然有助於數學的理解, 尤其是對數學知識結構有機性格的一種綜合性體會。至於數學家為數學史而數學史, 則志在浥注數學史學, 當然也是值得尊敬的知識活動。其實, 有時候這兩種進路很難區隔, 譬如說吧, Morris Kline 的經典作品「數學史」(Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, 1972) 被認定是一本歷史著作, 不過, 作者還是強調該書是以追溯歷史軌跡的方式來介紹數學 (a historical introduction to mathematics), 因為「這種進路是獲得理解與鑑賞的最佳途徑之一」。誠然, 該書數學「知識性格」非常強烈, 缺乏 (高等) 數學知識背景的讀者, 的確很不容易窺其全貌。

不過, 這部「數學史」(或譯「古今數學思想」) 絕對不是「數學」與「歷史」「相加」的結果。也就是說, 本書絕不可能切開成「數學」與「歷史」兩個單獨部分; 其中有些數學知識固然可以獨立來看, 然而, 它們還是以「在脈絡」(in context) 的方式呈現出來。對某些即使目的不在歷史、但卻充滿歷史旨趣的數學著作而言, 類似這種撰述風格, 仍然十分普遍。譬如說吧, Oystein Ore 在他的「數論與它的歷史」(Number Theory and Its History, 1988) 中, 就表示:

> 大部分數論書籍都穿插了一些歷史的附注。但是, 在本書的論述過程中, 我的呈現方式, 則企圖將理論的結果更充分地整合在歷史與文化的架構之中。[Ore 1988, p. v]

John Stillwell 在他的「數學與它的歷史」(Mathematics and Its History, 1989) 之「序言」中, 也說明:「本書目的在以歷史進路對大學數學給出一種統合觀點。」於是:

> 數學知識在本書中比起大部分數學史的一般性著作, 受到更完整的探索, 因為數學是我們的主要標的, 而歷史則只是對它取徑的工具而已。[Stillwell 1989, p. vii]

因此, 作者乃「試圖從數學知識體挑出主導的題旨, 然後通過追溯它們的歷史發展, 而牢靠地編織成一個整體。」[Stillwell 1989, p. vii]

由此可見, 任何人甚至於數學家要想深刻體會數學知識是一個有機整體 (organic whole), 除了閱讀像 Richard Courant 與 Herbert Robinson 合著的「何謂數學?」(What is Mathematics? 1953) 之外, 歷史進路的數學著作, 或許更能引人入勝, 帶領我們貼近數學文化的豐富樣貌。前述 Kline 的著作當然值得參閱, 然而它的格調如同「何謂數學?」一樣古典, 來不及納入過去五十年來所發展的二十世紀數學新視野, 是必須注意的侷限。另一方面, Ivor Grattan-Guinness 的數學史新猷「數學彩虹」(The Rainbow of Mathematics) 雖然是絕對趕得上時代的經典作品, 但是言簡意賅, 恐怕也不是很適合愛好數學者的大衆口味。[Grattan-Guinness 1998; 洪 1999a]

基於這些考慮, 「數論與它的歷史」與「數學與它的歷史」這兩本書或許是頗為適當的選擇吧。不過, 由於前者也算是祖母級的著作 (本書第一版於 1948 年問世), 同時它主要為「數論」此一專門學問而寫, 於是, 本文專論「數學與它的歷史」一書, 但是在論述過程中, 必要時將附論前者以作為比較的判準。

本文第二節將勾勒全書歷史論述結構, 並藉以了解 Stillwell 的識見與用心。由於本書刻意凸顯數學的知識本身面向, 所以, 本文第三、四、五節就以充分的篇幅, 細緻地追逐 (或分析) 各章節的內容 (文體採夾敍夾議, 但大部分觀點與材料則取自原書), 意在體會 Stillwell 如何在數學與其歷史之間放置天平。以這些考察為基礎, 我們將在本文第六節對本書進行全面的分析與評論, 並努力提出具體的建議, 為這一類的書寫貢獻屬於數學史家的一得之愚, 也順便就教於數學家、數學教育專家以及其他的學者專家。

二. 數學為主, 數學史為輔

首先, 對專業數學史家來說, 本書具有相當的吸引力, 這是因為 Stillwell 參考了大量數學家的原始文獻或原典 (primary source), 所以, 他對數學知識的成長脈動, 往往可以作出非常「貼近的」刻劃。由於他的目的主要在提供數學的「知識面」圖像, 所以, 「在脈絡的數學」(mathematics in context) 大概僅止於歷史地追溯數學觀念的緣起, 而無暇顧及數學知識活動的社會文化面向。然而, 在每章最後一節的「傳記附註」(Biographical Notes) 中, 作者總是企圖補充此一不足, 摘述相關的數學家傳記, 刻意經營「在脈絡」的歷史感覺。在全書二十章中, 作者依序所介紹的數學家計有: 畢達哥拉斯 (Pythagoras)、歐幾里得 (Euclid)、戴奧番特斯 (Diophantus)、阿基米德 (Archimedes)、塔他里亞 (Tartaglia)、

卡丹諾 (Cardano)、韋達 (Viete)、笛卡兒 (Descartes)、笛薩格 (Desargues)、巴斯卡 (Pascal)、華里司 (Wallis)、牛頓 (Newton)、萊布尼茲 (Leibniz)、格力固里 (Gregory)、尤拉 (Euler)、費馬 (Fermat)、阿貝爾 (Abel)、雅可比 (Jacobi)、白努易家族 (The Bernoullis, 主要是 James, John 與 Daniel)、達倫貝爾 (D'Alembert)、黎曼 (Riemann)、拉格藍吉 (Lagrange)、柯西 (Cauchy)、哈里歐 (Harriot)、高斯 (Gauss)、波利耶 (Bolyai)、羅巴秋夫司基 (Lobachevsky)、高羅瓦 (Galois)、潘嘉瑞 (Poincaré) 以及哥德爾 (Gödel) 等人。這些傳記依可靠的二手文獻 (secondary source) 改寫, 簡潔有力, 可以讀出作者撰史的用心, 尤其納入像塔他里亞、華里司、格利固里與哈里歐這四位「次要」(minor) 數學家, 更可以看出作者的歷史慧眼與洞識。不管讀者是否同意他對這四位數學家的歷史評價, Stillwell很認眞地「玩數學史」, 殆無疑問!

Stillwell 將塔他里亞與卡丹諾兩人的傳記 (第五章的「傳記附註」) 並列, 誠然是合理的安排, 因爲他們之間關於三次方程解法的剽竊爭議, 的確是十六世紀數學史上的著名公案。此外, 他將華里司、牛頓與萊布尼茲三人的傳記並列 (第八章的「傳記附記」), 對於華里司的歷史地位之提升, 當然很有幫助。爲此, Stillwell 在該章中就必須強調華里司對微積分的實質貢獻, 而且相較於費馬、牛頓與萊布尼茲的相關工作, 至少扮演了不可或缺的角色。至於哈里歐與高斯並列傳記 (第十六章「傳記附註」), 著實需要一點「另類的」膽識, 儘管英國十九世紀大數學家 J. J. Sylvester曾推崇哈里歐是「近世代數之父」(the father of current Algebra)。[Setman & Mizzi 1997]

不過, Stillwell 在「(古典) 微分幾何學」(第十六章) 的脈絡中介紹哈里歐, 卻是著眼於這位十六、七世紀英國數學家對等角螺線的弧長研究。按照 Stillwell 的觀點, 由於處理類似螺線這種「機械曲線」或「超越曲線」的相關斜率、弧長與面積之問題時,「微分」幾何中的「無窮小 (量)」(infinitesimal) 的幾何觀念於焉湧現。這應該是 Stillwell 在本章中企圖給哈里歐一個歷史地位的主要背景吧。

此外, 在本書的其他脈絡中, Stillwell也常常設法替一些「次要」數學家翻案。譬如, 在第二章中, 他就特別指出: 雖然 P. L. Wantzel 於1837年解決了兩千年歷史的「倍立方體」與「三等分角」幾何作圖的不可能, 但是, 或許由於這些成就在高羅瓦理論 (Galois theory) 的光芒映照下黯然失色, 所以, Wantzel 一直沒有因此而獲得應有的歷史評價。另一個例子是在1882年證明 π 是超越數, 也因此證明「化圓爲方」幾何作圖不可能的 F. Lindemann。Stillwell認爲這也是數學史上一個主要結果被一位「次要」數學家完成的罕見例證。後來, Lindemann 爲了證明他的成就不是僥倖得來, 他隨即轉向「費馬最後定理」攻堅, 然而, 他所發表的一連串論文都不斷地在更正前一篇的謬誤, 最終對他的聲名造成莫大的傷害, 留下千古憾事。

無論如何, Stillwell 在本書中對每一個單元的全幅考察, 的確是本書的主要風格。雖

然每一章都有可能因爲追溯數學觀念發展的來龍去脈, 而有「年代錯置」(anachronistic) 的刻意安排, 不過, 其目的當然著眼在數學知識的連貫與呼應。儘管如此, 作者在每章所討論的數學分支或單元概念, 卻符合歷史發展的先後順序, 因此, 本書可以說是一本以數學 (分支或主題) 知識爲主、數學史爲輔的著作。

三. 本書內容簡介 (I): 初等數學部分

現在, 就讓我們翻開本書的目錄, 細看作者對全書結構的設計。本書二十章的目錄分別是:

1) 畢氏定理; 2) 希臘幾何學; 3) 希臘數論; 4) 希臘數學中的無限; 5) 多項式方程; 6) 解析幾何學; 7) 射影幾何學; 8) 微積分; 9) 無窮級數; 10) 數論的復甦; 11) 橢圓函數; 12) 力學; 13) 代數中的複數; 14) 複數與曲線; 15) 複數與函數; 16) 微分幾何學; 17) 非歐幾何學; 18) 群論; 19) 拓樸學; 20) 集合、邏輯與計算。

針對這樣的安排, 作者特別指出他偏好那些涉及數學根本源頭 (elementary roots) 與強烈相互關聯(strong interconnections) 的單元, 譬如數目與空間的概念。事實上, 這正是本書的主旨, 因爲正如 Stillwell 所指出的, 數目與空間的概念最初在希臘數學中被迫分手, 接著在費馬與笛卡兒的幾何學中結合, 並因爲此一結合在微積分與代數幾何學 (algebraic geometry) 中繁衍出子子孫孫, 或許是我們考察數學知識系譜的一個最佳切入點吧。也正因爲如此, 所以李群 (Lie groups) 與泛函分析 (functional analysis) 就只好割愛, 以其遠離根源故也。

既然如此, 作者對「幾何」與「代數」的結合, 開宗明義就十足關注, 譬如在本書第 1.6 節中, 他在引進距離的定義之後, 評價「畢氏定理正是將算術事實詮釋爲幾何時之所需」, 即暗示: 希臘幾何與代數的矛盾, 固然是畢氏學派無法理解「不可公度量」(incommensurables) 所造成, 但是, 最終的協調攜手, 竟然也是與畢氏定理互爲表裡的「距離公式」所牽的紅線。這種正、反、合的歷史辯證, 眞是數學知識成長的一種頗爲奇特的啓發。

正、反的面向也表現在希臘幾何 (第二章) 與數論 (第三章) 的對比上。相對於幾何的靜態風貌, 希臘數論的角色被凸顯成帶動進步與改變的動力。此外, 爲了念玆在玆的數論與幾何的關聯 — 請注意在歐幾里得的「幾何原本」(The Elements) 中, 數論與幾何是分開論述的, Stillwell當然不會忘記在第三章中介紹戴奧番特斯對三次戴奧番特方程 (Diophantine equation) 的研究時, 強調三次曲線有理點與圓上有理點的關係, 後者當然歸結到畢氏三數組的研究上。戴奧番特斯多多少少體會這些有理點的研究, 等價於三次曲線的弦與切線的作圖問題, 而費馬也許是最早理解此一方法的數學家, 如此看來, 費馬最後定理 (Fermat's Last Theorem) 的歷史無法擺脫代數幾何 (algebraic geometry) 的糾纏, 似乎一開始就命定了。

提及「幾何原本」中的數論, 當然少不了與質數有關的定理, 其中最有名的莫過於它

的個數問題。在此, Stillwell 將此一定理敍述成如下形式:「有無窮多個質數存在」(There are infinitely many primes)。[Stillwell 1989, p. 29] 此一形式無疑是數學家「說法」(discourse) 的通例, 譬如 Ore 在他的「數論與它的歷史」也是將此一定理敍述成:「有無窮數的質數存在」(There is an infinitude of primes)。[Ore 1988, p. 65] 不過, Kline 在他的「數學史」中, 倒是警覺地避開了此一「說法」的「便宜行事」, 而是照錄「幾何原本」第 IX 册命題20的內容:「質數 (的個數) 比任何給定的質數之個數更多」(Prime numbers are more than any assigned multitude of primes numbers)。[Heath 1956 vol. II, pp. 412-413] 前兩種「說法」都不符合希臘人的主流數學認識論, 因爲他們不敢使用"infinitely"與"infinitude"的對等詞; 歐幾里得的原始敍述形式, 則巧妙地避開了此一十分困擾的問題。其實, 早在「幾何原本」第一册的定義23論及平行線, 以及第五設準 (postulate) – 亦即「平行設準」時, 歐幾里得就爲了迴避「無限」的說法, 而被迫將它們的敍述寫得極爲笨拙與冗長:

> 定義 I.23: Parallel straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction. (平行線是那些在同一平面上而且往兩方向隨意延長下去都不會相交的直線。) [Heath 1956 vol. I, p. 154]

> 設準 5: [Let the following be postulated:] [That if a straight line falling on two straight lines makes the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which the angles are less than the two right angles. (「假設下列命題成立:」若一直線與兩條給定直線相交, 其同側內角「和」小於兩個直角「和」, 則將此兩條給定直線隨意延長下去, 會交於此側。) [Heath 1956 vol. I, p. 155]

在上述引文中, 歐幾里得以"indefinitely" 代替"infinitely", 眞可說是用心良苦。此外, 希臘數學家阿基米德等正如歐幾里得一樣, 在很多脈絡中使用歸謬法 (the reductio ad absurdum) 與窮盡法 (the method of exhaustion), 也大都與此一對無限的恐懼息息相關。於是, Stillwell 隨即在第四章討論希臘數學中的無限概念。

如何處理數學所涉及的無限, 自然是歐幾里得、阿幾米德等偉大數學家十分關心的大事, 這是因爲非直線形的平面圖形 (如圓形)、非多面體的立體圖形 (如球體) 的求積問題必須解決, 它們的相關公式當然也必須嚴格證明。在這一方面, 照理阿基米德的

貢獻遠遠超過歐幾里得, 本章論述應該以阿基米德的成就爲主才是。不過, 儘管 Stillwell 在章末的「傳記附註」中介紹的主人翁是阿基米德, 然而, 本章的安排卻是尤得塞斯 (Eudoxus)(介紹他的比例論與現代無理數的關聯)、歐幾里得 (介紹窮盡法) 以及阿基米德 (介紹他的拋物線截區求積問題) 各居其一。誠然, 作者並沒有想要在此特別凸顯阿基米德的重要性, 至於原因究竟, 或許與本書主要作爲一本數學著作的中心題旨有關。

基於顯然類似的理由, Stillwell跳過中世紀歐洲數學, 直奔十六世紀的代數方程解法。雖然他也提及十二世紀費伯納西 (Fibonacci) 在三次無理根數上的考察結果, 但是, 卻忽略了費伯納西在東、西數學傳統之間的穿針引線, 以及他對數論的研究興趣。[Fibonacci 1987] 不過, 爲了不讓此一頁史篇顯得過分孤立, 作者特別通過"algebra"的語源, 介紹阿拉伯數學家阿爾花拉子摩 (al-Khwarizmi, 第九世紀) 的成就, 並連帶及於印度數學家婆羅門笈多 (Brahmagupta, 628 A.D.) 的貢獻。此外, 他也「應景地」提及古代中國漢代「九章算術」中的「方程術」(多元一次方程組的「高斯解法」), 與元朝朱世傑的「四元術」(多元高次方程組的消元解法)。雖然這些中國數學的史料與本章的脈絡來看並不怎麼搭調, 但是後者與 Stillwell 在本書中所專注的代數曲線研究有關, 所以, 或許從數學知識的角度來看, 它們也就聊備一格了。

儘管如此, Stillwell倒是在本章中討論二次方程解法時, 爲婆羅門笈多翻案。他認爲婆羅門笈多的貢獻, 譬如記號 (notation)、容許負數以及對戴奧番特斯方程的研究, 就遠比阿爾花拉子摩出色多了。至於爲什麼是兩世紀之後的阿爾花拉子摩的著作引出了「代數學」? Stillwell認爲有幾方面的原因值得考慮: 首先, 在印度數學中, 代數無法從數論與初等算術分出; 其次, 在希臘數學中, 代數被幾何的光芒所遮掩; 而巴比倫與古中國的代數不是失傳就是到達不了西歐, 因此, 當然不會有所影響。只有阿拉伯的數學家幸獲天時與地利之便, 而得以體認「代數學」是一門擁有自己方法而足以區隔開來的數學領域。事實上,「代數學」等同於「多項式方程理論」竟然延續了千年之久, 直到十九世紀, 它的內容才跨出方程論的範疇之外。這大概也是高中代數何以風貌上迥異於大學代數的主要原因之一吧。

本章對韋達 (Viete) 的介紹也值得注意, Stillwell並不特別彰顯他對「符號法則」的貢獻, 反而強調他所提供的三次方程解法與三等分任意角, 乃至三角學的關係。事實上, 在此一脈絡中, 韋達早已掌握我們現在所熟知的棣美弗公式 (de Moivre formula) 之部分內容, 唯一不足之處, 都是無法正面與虛數打交道的結果。因此, 到了十八世紀, 數學家利用有關等分角與方程解法的關聯, 將複數帶入三角函數理論之中, 爲後來的「代數基本定理」的證明鋪路。爲了強調這種前後一貫的呼應, Stillwell 不惜在第十三章重複本章三節的內容, 甚至標題如"Quadratic Equations"與"Angle Division", 也一仍舊貫。

第六章的主題是解析幾何。在本章中, Stillwell首先指出: 促成解析幾何誕生的可

行性, 不外乎十六世紀方程的解法以及 (代數) 記號的改進。「方程式」在古希臘時代還不是一個數學物元 (entity), 以是, 阿波羅尼斯 (Apollonius) 光是描述一個方程就得花上半頁篇幅。十四世紀的巴黎學派 Oresme 首度提出運用座標來處理速度與時間的關係, 然而, 也因爲欠缺成熟的代數工具而無法再邁前一步。基於這些歷史背景, Stillwell認爲費馬與笛卡兒各自獨立地發明解析幾何, 並不令人感到意外。比較值得驚奇的是, 他們兩人竟然都是從古典阿波羅尼斯四線問題 (four-line problem) 著手, 同時, 主要的發現也都是: 二次方程對應了圓錐曲線。

解析幾何的發明, 對於曲線與方程式 (無論代數的或超越的) 的研究, 都帶來深遠的影響。由於一次、二次曲線早已獲得極佳的理解, 所以, 解析幾何登場之後所打開的新主題自然便是三次曲線了。譬如, 牛頓就曾經對三次曲線做過分類工作。此外, 在笛卡兒所熱衷的「方程式的造法」(construction of equations) 也與此有關 – 譬如, 以二次曲線如拋物線與雙曲線的交點, 來作一個線段等於 $\sqrt[3]{2}$ (或等價地解三次方程 $x^3 = 2$)。此一問題的最終解決就歸結爲 Bezout 定理的證明, 不過, 一直到十九世紀射影幾何學被座標化, 乃至無窮遠點可視同爲曲線交點之後, 才讓數學家圓滿地完成任務。

當然, 在此一脈絡中, Stillwell 也趁機對幾何與代數分分合合的恩怨情愁, 紓發他自己的「同理心」。在本章第六節「幾何學的算術化」(The Arithmetization of Geometry) 中, Stillwell特別推崇華里司不再訴諸圓錐體的幾何性質, 而直接從二次方程去「代數地」推演圓錐曲線的性質。然後, 話鋒一轉, 順勢月旦牛頓對於代數的算術化功能之缺乏識見。代數學在數學王國中的地位, 終於在十八世紀下半葉經由拉格蘭吉, Monge以及 Lacroix 的大力促成下得以穩固。反諷地, 此時初等幾何 (elementary geometry) 已經淪落爲方程論的一部份, 至於高等幾何學 (higher geometry) 則已式微, 而愈來愈依賴微積分以及十九世紀崛起的複變函數論、抽象代數與拓樸學。於是, 高等幾何遂瓦解成微分幾何與代數幾何, 而其初等部分的殘餘遂成爲我們今天所稱呼的「解析幾何」。儘管如此, Stillwell還是特別指出希爾伯特 (David Hilbert) 的「幾何學基礎」(Foundations of Geometry, 1899) 正是華里司「算術化」幾何學的最終實踐。

在第七章『射影幾何學』中, Stillwell 再度把數學及其歷史的結合發揮得淋漓盡致。譬如說吧, 作者在本章中就介紹了十九世紀才被發明的齊次座標與射影平面。有了這兩項利器, 無窮遠點與其他的點可以視同一般平常。於是, 三次曲線的分類、Bezout 定理 – m 次的曲線與 n 次的曲線相交於 mn 個點, 以及巴斯卡定理等等, 都可以獲得更圓滿的安置。

四. 本書內容簡介 (II): 高等數學進階

微積分成功地處理了數學中涉及無限的問題, 所以, 它可視爲初等數學與高等數學的

橋樑。在第 8.1 節中, Stillwell 以 "What Is Calculus?" 爲標題, 強調微積分在十七世紀時的高度「組合學」特性, 畢竟 "calculus" 是關於 "calculation" 的學問! 此外, 他也因此批評數學史家過度重視十九世紀邏輯嚴密性的基礎問題, 而隱晦了早期微積分知識活動所洋溢的膽識與衝勁。按照歷史發展的順序, 本章先介紹積分學中的卡瓦列利 (Cavalieri) 及托里拆利 (Torricelli) 之求積方法, 接著轉向微分學中的費馬之極值與切線求法。再接著, 請華里司出場以便爲後來的牛頓與萊布尼茲鋪路。最後這三位數學家在本中章各佔一節 (分別是第8.4,8.5, 以及8.6節), 足見 Stillwell 對華里司的特別重視。譬如在第8.4節中, Stillwell即以"The Arithmetica Infinitorum of Wallis"爲標題, 用以凸顯華里司將曲線形的面積與體積之理論「算術化」的企圖。

本章第8.5節的標題是"Newton's Calculus of Series", 這是因爲 Stillwell 認爲牛頓對微分的貢獻, 譬如連鎖法則, 僅僅是「他的」微積分的一小部分。至於牛頓的微積分, 則主要依賴無窮級數的操演。爲了支持此一論點, Stillwell特別引述牛頓的「級數與流數的方法論著」(A Treatise of the Methods of Series and Fluxions, 1671), 其中就非常清楚地將微積分「類比」爲一種無窮級數的代數:

> 這是因爲微積分之於代數正如同十進位小數之於尋常算術(common Arithmetic), 所以, 微積分中的加減乘除及開方根等運算, 就可以援引後者例證學習。[轉引自 Stillwell 1989, pp. 107-108]

如此一來, Stillwell 顯然低估了牛頓面對「無窮小量」的三度掙扎 (詳本文第六節評論)。在此一脈絡中, 牛頓證明了「微積分基本定理」並因而聯繫了微分與積分 (兩種運算), 才是微積分史中最動人的篇章之一。Stillwell 計不及此, 蓋論述主要著眼於數學知識故也。

相對於第8.5節的牛頓, 本書關於第8.6節的萊布尼茲的微積分之介紹, 則顯然礙於歷史還原或重建的複雜度, 寫得更加簡略, 儘管本節的標題是"The Calculus of Leibniz"。不過, Stillwell倒是指出萊布尼茲對反導數或不定積分的表達形式之重視, 最終導向了代數基本定理之證明以及橢圓函數理論之探索。

十八世紀數學發展納入今日微積分知識內容的重要主題, 莫過於無窮級數。因此, 本書第九章即著重討論牛頓、格利固里及尤拉在這一方面的貢獻。當然, Stillwell也從不忘記帶領讀者一起瀏覽早期的相關研究結果, 譬如, 古希臘 Zeno 的二分悖論所引出的幾何級數, 阿基米德求拋物線截區面積的幾何級數, 以及首度出現於十四世紀的第一個非等比的無窮級數等等。接著, Stillwell隨即指出各種初等函數的冪級數展開式, 都歸結到二項級數展開式。然後, 切入格利固里對現在所謂的格利固里-牛頓內插公式 (Gregory-Newton interpolation formula) 之貢獻, 並區別牛頓與格利固里獲得此一公式的不同進路 – 牛頓是在研究與二項式定理相關的內

插法時發現此一公式, 格利固里則是先發現此一公式, 再利用它 (並獨立於牛頓) 導出二項式定理, 甚至於泰勒定理 (Taylor's theorem)。可惜, 內插法在微積分發展史上的重要性被低估, 連帶地也常被現代微積分教科書作者所忽視, 這當然是 Stillwell 在本書特別「內插」第9.3節 (9.3 An Interpolation on Interpolation) 專門討論「內插法」的主要原因。

本章前三節所述, 無非是利用無窮級數, 來「分解」給定函數或一些已知量如圓周率 π 或尤拉數e。第四節的無窮級數求和, 則反其道而行, 這當然是十八世紀最偉大數學家尤拉的個人秀! 在求倒數平方和的過程中, 尤拉將冪級數視同「無窮多項式」, 不僅具有深刻的歷史意義, 同時, 從認識論的觀點來看, 也是歷久彌新, 深具教學的啓發價值。

尤拉在數論上所扮演的角色也同樣不可缺少, 不過, 本書第十章討論數論的復甦卻必須以費馬爲主角。由於費馬的數論研究涉及組合數, 所以, Stillwell也順便介紹巴斯卡對組合數 (combinatorial numbers) 與二項係數 (binomial coefficients) 乃至於擬形數 (figurative numbers) 之間所建立的關聯。據此, Stillwell認爲所謂的「巴斯卡三角形」的命名歸功於「再發現者」巴斯卡, 是一件公道與正當的論斷。不過, 本章的重點畢竟是「費馬最後定理」, 所以, 相關的三次曲線 (虧格 (genus) 是0或1) 的有理點, 以及將虧格爲1的三次曲線參數化的橢圓函數, 都是 Stillwell 的論述重點, 也同時爲下一章 (亦即第十一章) 的專論橢圓函數預做準備。

橢圓函數大約經歷了兩百年 (1650s – 1850s) 而體系底定。Stillwell在第十一章開宗明義即指出: 橢圓函數是數學史上最奇特的一個篇章, 它始於複雜的分析理念 – 積分 $\int R[t, \sqrt{p(t)}]dt$ 的探索, 其中 R 是一個有理函數, p 是一個三次或四次的多項式, 但經由複數幾何特性的協助轉化, 理論頂峰卻聚焦於一個簡易的幾何理念 – 環面 (torus) (本書第十四、五章)。

上述這種積分就叫做橢圓積分, 最早的例子出現在求橢圓弧長的定積分, 至於它與三次曲線參數化的關係, 則直到約1800年才被發現。由橢圓積分反轉 (inversion) 的函數就叫做橢圓函數, 而需要用到橢圓函數來作參數化的曲線, 則稱作橢圓曲線。正如同橢圓弧長 (之數值) 無法正確計算得出之外, 橢圓積分的被積分函數之反導數, 也無法表現成代數函數、三角函數、指數函數以及它們的反函數之合成形式, 所以, 研究起來自然就困難重重。所幸數學家最終還是找到一把揭密的鑰匙, 那就是白努易雙紐線 (lemniscate of Bernoulli), 顯然是爲了紀念最早將它當成研究對象的詹姆士白努易 (James Bernouolli) 而命名。

詹姆士白努易於1694年證明雙紐線的弧長可以表現成橢圓積分 $\int_0^k dt/\sqrt{1-t^4}$ 的形式。這個後來被稱作「雙紐線積分」的橢圓積分例子, 在運算上最容易操作, 以致於數學家都是針對它推演一些特性譬如加性定理 (additive theorem), 然後再設法延拓到一般的橢圓積分上。這個定理爲 Fagnano 在1751年12月23日所證明, 由於它的重要性,

所以, 這一天也因此被雅可比稱之爲橢圓函數理論的誕生日。針對 Fagnano 如何以反正弦積分 $\arcsin x = \int_0^k dt/\sqrt{1-t^2}$「類比」雙紐線積分, 然後獲得加性定理, Stillwell的解說不憚其煩, 甚至於配上簡易習題作爲輔助, 其意在數學教學, 眞可以說是不言而喻。

將橢圓積分反轉成橢圓函數的想法, 分別由高斯、阿貝爾以及雅可比獨立地取得, 他們三人也爲此在1800-1830年之間有過一些頗爲激烈的競爭。不過, Stillwell 對於高斯的過度自詡卻頗有微辭, 於是, 在本章最後一節他特別指出: 固然高斯曾經考慮過利用尺規作圖將某一象限的雙紐線五等分的可能性, 但是現存史料不足爲徵, 反倒是阿貝爾在1827年成功地證明了尺規作圖可以 n 等分雙紐線的充要條件是 $n = 2^m p_1 p_2 \cdots p_k$, 其中 p_j 爲費馬數。而這個 n 正是高斯證明可以尺規作圖將圓 n 等分的同一個 n。Stillwell認爲這個奇妙的結果, 或許最足以點出橢圓函數在幾何學、代數學以及數論這三個學門之間的統合角色。這是他爲「橢圓函數」這一章所下的一個結論。

在「橢圓函數」的論述尚未總結之前, Stillwell安排本書第十二章來討論「力學」, 他的目的應該是利用十八世紀科學史的研究主題如弦振動、 流體動力學以及天體力學, 引出今日依然熱門的微分方程理論。在本章中, Stillwell簡要地追溯古希臘的阿幾米德的「方法論」(The Method)、中世紀的 Oresme 的速率-時間圖解、文藝復興亞里斯多德學派的拋射體研究, 乃至於科學革命時代的伽利略與牛頓等人的成就, 最後歸結到一個觀點, 那就是: 微分 (求速率) 與積分 (求位移) 問題不外乎是力學問題! 不過, 十八世紀依然是力學與微積分結合的時代, 我們現在所熟悉的 (傅氏) 級數論、偏微分方程 (如波動方程)、複變函數論 (如勢論) 都是典型的代表。可惜, 作者自承力有未逮, 無法給我們比較深刻的史識。本章的特色是作者利用『機械曲線』(Mechanical Curves) 這一節介紹懸鏈線與最速下降線, 並因而凸顯白努易家族的貢獻。當然, 作者也不會忘記順便強調詹姆士白努易對橡皮線 (elastica) 的研究, 由於詹姆士注意到它與雙紐線一樣, 都滿足了同一個微分方程, 從而歸結到橢圓積分的研究。

本書第十二章或許是作者刻意的簡略, 讓大家可以稍喘一口氣。回到第十三、十四兩章的主軸之後, Stillwell即分別針對複數與代數、曲線的關係, 作扼要的探討。第十三章一開始, 作者即指出隱藏在諸如 $\sin n\theta$ 的棣美弗公式 (第5.6節)、多項式的因式分解 (第5.7節)、三次曲線的分類 (第7.4節)、枝點 (branch point) (第9.5節)、虧格 (第10.3節) 以及橢圓函數的行爲 (第10.6、11.6節) 之間的若干神秘, 都會由於複數的引進而獲得澄清。

然則在數學史上複數究竟如何引進? Stillwell在第13.2及第13.3兩節分別以二次、三次方程爲背景進行說明。對二次方程的求解來說, 或許它的幾何性格太強, 所以,「虛解」(imaginary solution) 當然無從想像;「無 (實數) 解」往往是實際多了。直到三次方程的求解後來居上, 複數才

變得讓數學家不能迴避, 這是因爲三次方程永遠有實根存在, 二次方程則否。儘管卡丹諾以共軛複數根來 「形式地」 演示二次方程的根與係數關係, 但是, 他仍然不能折衷面對它們。稍後的 Bombelli (1572) 就自在多了, 最奇特地, 莫過於他「大膽地」將 $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$ 化約成 4。除了代數的這些 「形式運算」 之外, 在十六、七世紀數學史上, 對複數賦予意義的最自然進路還是訴諸幾何。這或許可以解釋何以 Stillwell 對華里司充滿了興趣, 因爲後者是企圖對複數尋求幾何表現 (geometric representation) 的第一位數學家。華里司所以功敗垂成, 誠非戰之罪, 蓋負數的意義尚未確立故也 – 直到1770年, 偉大數學家尤拉甚至於還「證明」$\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{6}$。

正如前述, 第13.5節的標題與第 5.6 節完全相同, 不過, 題材當然更爲深化。本節雖然延續棣美弗公式此一主題的討論, 但目的卻是在指出複數如何進入三角函數的理論的研究之中。Stillwell以約翰白努易求 $y=\tan n\theta$ 與 $y=\tan\theta$ 的代數關係式爲例, 說明引進複數變數的對數函數與指數函數等積分理論的必要性, 因爲如此一來, $\tan n\theta$ 與 $\tan\theta$ 的關係式就可以由 $(x-i)^n(y+i)=(x+i)^n(y-i)$ 推得。他還指出如果不借助於虛數而僅在實數域操作, 則此一關係式將十分難以獲得。因此, Stillwell 特別引述 Hadamard 的說法:「實數域的兩個眞理之間的最短路徑有時會穿越複數域。」(The shortest route between two truths in the real domain sometimes passes through the complex domain.) [Stillwell 1987, p. 194] 不過, 十八世紀的數學家還是盡可能地避免提及虛數。儘管如此, 達倫貝爾與高斯對代數基本定理的證明, 都依賴了複數的幾何性質以及連續函數概念的理解。在本章最後兩節中, Stillwell 詳細地比較了這兩位數學家的不同證法, 然後指出: 兩者都不完整, 而且一般以爲高斯提供了嚴密證明的說法, 也與事實不符, 此外, 達倫貝爾證法中的漏洞甚至比較容易彌補。換句話說, 高斯對「代數基本定理」的貢獻, 可能必須重新評估, 至少在這一方面, 達倫貝爾必須得到更公道的對待才是。

五. 本書內容簡介 (III): 高等數學部分

前文已經提及, 本書第十四、十五章的主題是橢圓曲線與環面的關係。至於其中介角色則是複數射影線 (complex projective line) – 實數線的「形式等價」概念 – 的理論。整個第十四章的論述與一般數學書籍的寫作並無二致, 或許諸如枝點、覆蓋 (球) 面、乃至於現在所謂的黎曼面, 都是得自黎曼貢獻的緣故吧。其中特別值得注意的, 是黎曼發現三次曲線 $y=x(x-\alpha)(x-\beta)$ 的覆蓋球面是一個 (圓) 環面, 這對我們了解橢圓函數, 帶來很大的幫助。

在第15.1節中, Stillwell 主要強調複變函數的獨特角色。他的切入點是 Cotes 在1714年所發現的重要事實: 在複數域中, 對數函數與反三角函數雖然分別得自 (不同的)

積分 $\int dx/(1+x)$ 與 $\int dx/(1+x^2)$, 但本質上卻是一樣的。後來, 尤拉再進一步將對數函數的反函數 (亦即指數函數) 改裝成 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, 成爲現在鼎鼎大名的尤拉公式。利用此一公式, 棣美弗公式當然輕易可得: $(\cos x + i\sin x)^n = e^{inx} = \cos x + i\sin nx$。所有這些都讓數學家感覺終究必須接受複數。在這同時, 達倫貝爾也因研究流體力學而發現 (後來稱之爲) Cauchy-Riemann 方程。於是, 複變數函數的概念逐漸明朗, 而緊接著 Stillwell 所討論的保角映像 (第15.2節)、柯西定理 (第15.3節), 以及橢圓函數的雙週期性 (第15.4節), 也都與一般的複變分析的書籍之內容出入不大, 儘管 Stillwell 的論述多了一點史實的脈絡。至於有關橢圓曲線 (第15.5節) 的討論, Stillwell則回歸三次曲線 $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 以其重要性不僅限於它自己本身, 甚至對於數論與橢圓函數的研究, 它也同樣不可或缺。Stillwell 特別指出十九世紀數學的最偉大成就之一, 就是對三次曲線的所有這些外顯表現 (manifestation), 提供了一個統合的觀點。無怪乎日本大數學家高木貞治在他的「近世數學史談」(1997) 中, 即以雅可比、阿貝爾與高斯對雙紐線的研究競爭作爲開場白。

三次曲線與環面的關聯, 最早由雅可比發爲新聲。他首先注意到上述三次曲線可以被 $x = f(z)$ 與 $y = f'(z)$ 所參數化, 其中 f, f' 都是雙週期函數而且具有同樣的週期 ω_1, ω_2。於是, 由於曲線上的點 $(x,y) = (f(z), f'(z))$ 與等價類 $z + \{m\omega_1 + n\omega_2 | m,n \in Z\}$ 一一對應, 而後者則與環面同構 (isomorphic), 所以, 三次曲線就等價於環面。

第十五章的最後一節處理任意代數曲線之參數化是否一致性 (uniformization) 之問題。爲此, 德國大數學家克萊因 (Felix Klein) 與法國大數學家潘嘉瑞特別在複數平面上引進線性變換 (linear fractional transformation),「同時」地研究這些變換的代數、幾何與拓樸面向, 大大地促進了拓樸學與群論的發展。潘嘉瑞尤其利用線性變換給予非歐幾何學一個自然的解釋, 讓數學家對幾何學的本質之看法, 從此改觀!

第十六章的主題是微分幾何學。正如本文第二節所述, 本章第一節介紹超越曲線的弧長研究, 應該著眼於哈里歐的貢獻才是。至於其他各節主題如平面曲線的曲率 (第16.2節)、曲面曲率 (第16.3節)、常數曲率的曲面 (第16.4節)、測地線 (第16.5節) 以及 Gauss-Bonnet 定理 (第16.6節) 等等, 都是古典微分幾何學的主要內容。事實上, Stillwell的處理手法像極了 Dirk J. Struik 的經典作品「古典微分幾何學」(Lectures on Classical Differential Geometry, 1961), 差別或在於一章與一本書的幅度不同罷了。

有了常數曲率的曲面之理論, 非歐幾何學的「歐式」模型之建立, 當然就可以得心應手了。不過, 在第十七章一開始, Stillwell還是回溯了平行設準研究的相關歷史。其中, Stillwell特別指出華里司於1663年所發現的等價命題 – 存在了大小尺度相異的相似三角形。否定此一命題, 則意指比例模型無法存在。然而, 這顯然與現實世界不符, 於是, 數

學家越發相信平行設準是直線的邏輯必然特性, 是可以由其他設準與公理推衍出來的。

這種信念對於非歐幾何學的誕生, 當然帶來很強烈的心理負擔。正因爲如此, Saccheri 於 1733 年問世的著作目的只有一個, 那就是: 淸除「幾何原本」的各種缺陷! 或許由於 Stillwell 只想介紹非歐幾何的知識結構, 所以, 它誕生前後之相關哲學討論, 本書只好從略了。按 Stillwell 的觀點, 藍柏特 (Lambert) 在球面三角形面積公式上, 好玩地「類推」出來的雙曲幾何之對等性質 (1766), 爲雙曲幾何學的發展打開了一條路。後來, 高斯從「過給定線外一點, 至少兩條平行線存在」這一假設, 推衍出一個定理: 半徑爲 r 的圓周長等於 $2\pi R \sin hr/R$。高斯的通信小圈圈內的成員 Taurinus 則證明了上述藍柏特公式的對等性質。可惜, 在貝特拉米 (Betrami) 於 1868 年將虛球面 (pseudosphere)– 球面的類比 –延拓成雙曲平面 (hyperbolic plane) 之前, 雙曲幾何學始終欠缺穩固的基礎。

介於高斯與貝特拉米之間、對非歐幾何學作出最大貢獻的數學家, 當推波里耶與羅巴秋夫斯基。他們兩人的膽識固然贏得數學史家的景仰, 然而, Stillwell 卻認爲他們的研究成果之歷史意義不無爭議, 這是因爲這些多半已爲高斯的圈子所熟悉。儘管他們滿懷信心, 研究也較前更有系統, 但一開始也很少人注意。

直到高斯 (1777-1855) 去世後, 數學家從他的手稿發現他對非歐幾何的認眞態度, 才比較願意接受非歐氏幾何學概念。波利耶與羅巴秋夫斯基的研究成果, 也因此免於淪落。但是, 這一切都必須歸功於貝特拉米, 正是他利用微分幾何學所提供的模型, 而最終賦予非歐幾何學的正當性。在第 17.4 與 17.5 節中, Stillwell分別介紹了貝特拉米爲雙曲幾何學所提供的射影模型與保角模型。這些模型對於了解「欠缺直觀」的非歐幾何學幫助極大, 想必熟悉微分幾何學的讀者一點也不陌生。

在非歐幾何學之後, 最值得緊接著介紹的數學分支, 應該就是群論! 事實上, 正因爲群論利用一個「結合性」(combination) 的概念 (或「乘積」), 將各色各樣的數學物元 (mathematical objects) 關聯 (或「結合」) 在一起, 所以它是「數學上最重要的統合理念之一」。譬如說吧, 群論與各種幾何學之間的密切關係, 堪稱十九世紀數學史上最美麗的佳話之一。筆者原本以爲 Stillwell 會拿此一單元當作第十八章「群論」的開場白, 沒想到他竟然「按耐」到本章後半部 (第 18.5 節)。不過, 本章卻是從群概念的「淺顯」例子談起 – 第 18.1 節的標題是「群概念」(The Group Concept), 目的大概想說明幾何與數論對群概念的影響。然而, 對它最具有決定性影響的數學分支, 則非方程論莫屬。於是, 在本章第二節中, Stillwell 敍述了從 Vandermonde、拉格蘭吉、Ruffini與阿貝爾的根式求解代數方程之研究, 然後歸結到高羅瓦的集大成, 以正規子群爲鑰匙, 打開根式可解性的奧祕。

由於「群」(group) 這個字最早出現在高羅瓦的著作 (1831), 所以, Stillwell 在第 18.3 節再度以「群概念」(The Group Concept) 爲標題時, 差不多可以想像它的指涉

物 (referent) 已經開始「具像」下來了。事實上, 本節所述如柯西、凱利 (Arthur Cayley) 與 Dyck 等數學家對它的本質之探討, 「群」已經逐漸褪去它原本的工具色彩, 而成爲一個不折不扣的數學物元 (或實體)。由此看來, Stillwell 以凱利定理 – 每一個有限群本質上都是排列群 – 作爲本節的結語, 強調「群」概念一點也不抽象, 或許並非隨興之安排吧。爲了再一次說明「群」十分具像, Stillwell 在第18.4節也輔以多面體群的對稱性之討論, 這些研究成果充分說明了「幾何對稱」根本就是一個群理論概念。

第 18.5 節的主要內容是幾何學與 (連續) 變換群不變量的對應關係。最早注意到此一現象的數學家, 是將平面上剛體運動概念延拓的德國大數學家莫必斯 (Möbius)。不過, 一直到後來的德國大數學家克萊因 (Felix Klein) 利用了群概念, 才將它們改寫成鼎鼎大名的 Erlangen 綱領 (1872)– 將各種幾何學 (包括非歐幾何學) 統合分類。然而, Stillwell也提醒我們注意: 主張「凡幾何學都是射影幾何學」的凱利對 Erlanger 綱領之影響, 也不容低估。

由於拓樸學也可以定義成連續可逆的變換群之「幾何學」, 所以, 在群論之後, Stillwell 選擇討論拓樸學, 尤其是幾何拓樸學 (geometrical topology)。不過, 本章範圍僅限曲面拓樸學 (surface topology), 以其充分被理解故也。既然如此, (凸) 多面體的尤拉公式當然是歷史論述的一個起點, 這是第19.2節的內容。其中 Stillwell 特別指出此一公式的早期證明都不具備「拓樸性」, 譬如十九世紀法國大數學家勒讓德 (Legendre) 於1794年所提供的證明, 就依賴了角的度量與其他尋常的幾何量。至於第一位賦以純拓樸進路的數學家, 則是被公推爲數學界最後通才的法國大數學家潘嘉瑞 (1895年)。

第 19.3 節主題是曲面的分類 (The Classification of Surfaces), 這種選材令人回想起三次曲線的分類。不過, 曲面分類看來是複雜多了。Stillwell指出在1850年代與1880年代之間, 有好幾條路線的研究都導向曲面的拓樸分類之需求。其中之一, 是承自尤拉的多面體分類, 另一條則是來自黎曼對代數曲線所做的黎曼曲面表現 (Riemann surface representation)。與此相關的, 則有潘嘉瑞與克萊因對平面鑲嵌的對稱群之分類。最後, 還有莫必斯所研究的尋常空間中的平滑閉曲面之類型。所有這些研究最終都歸結到所謂的廣義多面體 (generalized polyhedron) 之研究。這種多面體現在被拓樸學家稱爲緊緻且無邊界的曲面。這種曲面無論是否可賦向 (orientability), 它們主要的分類工具則都是同胚變換的不變量 – 尤拉示性數 (Euler characteristic)。當然, 數數看曲面有幾個洞 (亦即虧格) 看來是更簡單, 但 Stillwell 強調尤拉示性數才是曲面幾何性質的較佳反映。

在第 19.4 與 19.5 兩節中, Stillwell主要想說明曲面的曲率與尤拉示性數之間的關係。事實上, 引進尤拉示性數, 我們可以改寫 Gauss-Bonnet 定理如下: 全曲率 $= 2\pi\times$ 尤拉示性數。於是, 如果曲率爲常數, 那麼, 曲率與示性數就會同號, 如此一來, 曲面的幾

何就有可能被它的拓樸性質如尤拉示性數所決定了。反過來, 如果曲率絕對值取成1, 則 Gauss-Bonnet 定理可給出如下結果: 一個小測地多邊形的面積等於「尤拉示性數」的絕對值。因此, 曲面幾何也決定了它的拓樸。

本章最後一節 (第19.7節) 承接19.6節的曲面覆蓋 (covering) 之理論, 介紹基本群 (fundamental group) 與同倫的的概念。針對曲面的基本群, 從幾何觀點來看, 它是覆蓋面上將鑲嵌映至本身的運動群; 至於從拓樸觀點來看, 則是閉路徑 (closed path) 的同倫類之群 (group of homotopy classes)。儘管如此, 由於同構群的不可決定性, 所以, 給定任意兩個「合理描述」的圖形, 它們是否同胚也變成不可決定, 蓋在此拓樸同胚問題轉變成基本群的同構問題故也。

現在, 我們終於來到全書的最後一章了。這一章的標題是「集合, 邏輯與計算」, 主要目的無非是瀏覽二十世紀數學史。此外, 由於我們對過去的理解深受現代時髦理念的影響, 所以, 爲了鼓勵不熟悉數學史的數學家, 也能分享本書大部分的古典數學內容, 最佳方式顯然是利用現代術語呈現它們。事實上, Stillwell承認本書就是採取這種觀點。

不過, 本世紀數學史不應該只是幫助我們了解過去的工具而已。它本身有很多部分也已經成爲古典, 而適合被「瀏覽」。問題是: 本世紀數學史學規模如此龐大, 區區一章是否流於點綴? 爲此, Stillwell 特別在本章第一節提出「一個說明」(an explanation):

1) 這三個單元在歷史與理路方面, 都相互關聯。
2) 它們都是本世紀的新生事物 (即或集合論現身稍早, 那也是1870年代之後)。
3) 正因爲如此, 它們比起其他重要的現代數學單元, 更容易讓略知數學皮毛的人接近。
4) 針對「何謂數學?」它們提出全新觀點。事實上, 它們都源起於最早嚴肅地回答此一問題之嘗試。「Stillwell 1989, p. 313」

第20.2節討論「集合」, 範圍從集合與實數完備性的關係到「連續統假設」(continuum hypothesis), 都作了簡要說明, 同時, 在論述「序數」(ordinal number) 時, 也提及康托爾 (Georg Cantor) 引進「集合」刻劃無限等級的動機, 使得本節比起一般大學「集合論」課程之濃縮, 更具有學習的啓發性與歷史的興味。緊跟著集合論之後, Stillwell隨即處理「測度論」, 這是第20.3節的主要內容。顯然, 測度 (measure) 是針對「點集合」(point sets) 而言, 然則是哪一類的點集合呢? 在此一理論發軔初期, 數學家的關懷又在哪裡? Stillwell在本節一開始即指出: 研究函數「不連續點集合」與其傅氏級數 (Fourier series) 的關係之緣起, 是因爲傅立葉 (Fourier) 發現這些級數之存在依賴了相關積分的存在, 而後者又與其「不連續點集合」的結構息息相關。針對這些點集合結構的研究, 積分問題最後歸結爲更根本的測度問題, 於是,「測度論」(measure theory) 乃應運而生。Stillwell特別指出 Harnack (1885)、Jordan (1892)、Borel (1898) 等數學家的一棒接一棒, 以及最後 Lebesgue (1902) 的集大成, 都在測度論的歷史發展過程中留下不可磨滅的貢獻。

此外, Stillwell也在本節中指出「集合論」與「測度論」彼此互惠的事實。在一方面, 集合論證明了實數集合的不可數以及可數子集的「渺小」性格, 的確爲測度論的發展鋪路; 在另一方面, 測度論本身對實數集合的不可數性質的證明、以及對可數集合的「渺小性」(smallness) 之評量, 也回過來影響了集合論的後期發展。譬如, 實數集合的所有子集的可測度性, 就與集合論中的「連續統假設」(continuum hypothesis) 互相衝突, 至於尋求解決它的努力, 則爲我們引出更根本的問題, 亦即大基數 (large cardinal number) 的存在性假設。針對這些發展, Stillwell 一直追溯到1970年 Solovay 的研究成果爲止。

所有這些研究也對邏輯學帶來深遠的影響, 然而, 這是「可計算性」(computability) 成爲一個數學上可精確定義的概念之後的故事。爲此, Stillwell 隨即安排第20.4節介紹「對角線論證」(diagonal argument)。此一論證最早由康托爾引入集合論, 並據以證明實數集合的不可數性。此外, 利用它我們也立即可以證明: 對任何集合而言, 它的子集永遠比它的元素來得多! 如此一來, 最大集合的可能性自然就排除了。不過, 更值得注意的, 莫過於一開始便被忽略的極自然推論:「計算一張所有可計算實數的淸單是不可能的」(It is impossible to compute a list of all computable real numbers); 以及「計算一張所有可計算函數的淸單是不可能的」(It is impossible to compute a list of all computable functions)。到了一九三六年, 圖靈 (Turing) 與 Post 分別但獨立地定義計算機器 – 亦即今日所謂的「圖靈機器」(Turing machine)– 的概念。於是,「可計算性」便與「圖靈機器可計算性」同義。利用圖靈機器, 數學家與邏輯學家證明了任一特定問題可解的必要條件, 從而釐淸了任一特定問題不可解 (unsolvability) 的意義。

問題可解性與圖靈機器的關聯, 無疑呼應了溯自萊布尼茲以降數學家或哲學家企圖將數學推理「機械化」的夢想。當懷海德 (Whitehead) 與羅素 (Russell) 於 1900年開始撰寫「數學原理」(Principia Mathematica) 時, 他們使用了形式語言 (formal language), 以便可以付諸機械式的驗證。不過, 他們無法預知他們自己的形式系統的嚴密性, 亦即機械式檢驗證明的可能性, 其實與完備性 (completeness) 並不相容。後者正是哥德爾於1931年所證明的劃時代發現 – 不完備定理 (Incompleteness Theorem)。後來, 哥德爾又進一步證明了: 如果 Σ 是任一包含 PA(Peano 算術, 例如「數學原理」以及集合論的其他系統等) 的形式系統, 那麼, 一旦相容, $\mathrm{Con}(\Sigma)$ (Σ 中的一個述句或命題) 就無法在 Σ 中證明眞僞。換句話說, 除非眞正不相容, 否則 $\mathrm{Con}(\Sigma)$ 爲眞之事實可能沒有形式證明存在!

於是, 可證明性 (provability) 與眞理 (truth) 在數學上的關係, 就很值得檢討了。這正是本書最後一節 (20.6) 的主題。在本節中, Stillwell 引述 Post 在1941年初對公設方法不顧「意義」的深刻反省, 然後指出:

> 在哥德爾之前, 數理邏輯的目標就
> 在於將全部數學蒸餾成一組公設。

> 譬如說吧, 數論的全部理論曾經被期待可以從PA 形式地演繹 – 也就是, 在忘掉 PA 的公設具有任何意義的情況下 – 重新獲得 (recovered)。不過, 哥德爾證明事實並非如此, 特別地, 表現相容性的述句 Con (PA) 就無法如此重新獲得。然而, 吾人正是由於知道 PA 公設的「意義」, 才得以知道它們是相容的: 在自然數 N 被賦予 $+$ 及 $\times$ 運算此一眞實結構中, 互相矛盾的述句無法成立。所以, 看得到 PA 中的意義當然可以幫助我們看到 Con (PA) 的眞僞, 並因此超越形式證明的「威權」了 (the power of formal proof)。[Stillwell 1989, p. 328]

六. 綜合評論

本書論證首重數學, 作者雖然嚴肅面對數學史, 但是, 數學著述的格式 (format) 與結構, 無疑限制了史學論述的發展。就數學史的標準來看, 本書誠然有很大的侷限。可見, 要在一個架構中將數學與歷史冶成一爐, 實在不是輕而易舉之事, 儘管本書以幾何與代數的分合爲主軸, 對數學史實的說明, 也是一個十分恰當的依托。然而, 就作爲數學本科的通識讀物而言, 本書見解獨到、首尾一貫, 而且一氣呵成, 的確是用力極深的撰著。因此, 我們可以公允地說: 本書充分反映了一位數學家極敏銳的專業洞察力。

只是, 本書雖然像極了一部「數學」交響曲, 其中主旋律如幾何與代數的對話一再重複出現, 然而, 它所 (企圖) 勾勒的「數學史」風情卻相形隱晦。究其原因, 蓋論述主軸非「時間」故也。不過, 我們也不能責備作者學力之不足,「數學」與「歷史」這兩種學門的根本性格之難以協調, 才是我們必須面對的困局。一般而言, 數學知識活動貴在求眞, 至於歷史這種完全指涉人文的知識活動, 則以探索研究對象的意義與價値爲尙。其實, 這也正是科學與人文之所以存在著鴻溝的主要原因之一。[參考洪 1996]由於數學的高度專業發展, 相對於十九世紀的數學著述中作者的現身說法, 本世紀數學著作總是以第三人稱陳述乾澀的事實 (譬如定理) 與論證 (譬如證明) 爲主,「它們用邏輯化的組織形式表達, 留給我們的印象好像數學家們幾乎都是很自然地從一個定理推演到另一個定理, 他們可以克服任何困難, 研討解決問題並使之成爲定論。」[Kline 1972, p. ix] 在這種教育文化環境中, 數學知識的嚴密與完整, 當然是學門專業化的首要工作, 也是訓練生手的不二法門。至於知識活動的「意義」或「正當性」, 自然不是已經專業化的知識活動參與者必須聞問的課題了, 從而評定一位數學家是否合格, 數學史的素養當然也就不是必要條件了。[參考洪 1996]

不過, 這並不表示數學史的知識門檻高不可攀。事實上, 有很多傑出的數學家也留下相當深刻的數學史論述, 姑且不論偉大的克萊因 (Felix Klein) 曾撰著「十九世紀數學史」, 至今仍健在的 B. L. van der Waerden 以及 Dirk J. Struik 也都是很好的例

證。只是, 如果吾人不在論述焦點上做適當的轉換, 或者面對數學文本時不設法提問恰當的歷史問題, 那麼, 所謂的數學史論述, 就只不過是道本周 (Joseph W. Dauben) 所稱的「數學著述附帶著歷史上的例子」(mathematics with historical examples), 而無法滿足數學史的學門判準。[Dauben 1993] 設想如果費馬最後定理尚未證明成立, 那麼, 由數學家來撰寫「費馬最後定理及其歷史」, 恐怕就不會對日本數學家谷山豐與志村五郎早在五十年代就已提出的進路, 賦予應有的評價。[Aczel 1996, pp. 94-109] 畢竟由實證論所左右的「理性重建」(rational reconstruction), 還是很容易墮入「成王敗寇」的迷思吧。然而, 如果由數學史家來研究同一主題, 他 (她) 們應該比較不會被數學知識系譜的直線思考所迷惑。對她 (他) 們而言, 成功的證明也罷, 失敗的嘗試也罷, 理當一視同仁; 有時候, 失敗的案例, 甚至於更能反映數學知識活動極端曲折、但同時又深具啓發的風貌。[Dauben 1993; Rowe 1996] 譬如, 本書無瑕顧及的牛頓因應「無窮小量」(infinitesimal) 之三種觀點, 就很能反映他在面對微積分嚴密性的無力感與認識論上的掙扎, 但是, 或許由於它們在邏輯上都站不住脚 [Boyer 1959, pp. 190-196], 所以, 從本書著眼於「數學知識」的角度來看, 當然都難以入 Stillwell 之法眼了。再者, Stillwell 固然廣泛參閱了數學史原始文獻 (主要是數學家的原始典籍), 不過, 除了數學家傳記之外, 他似乎較少注意數學史家的研究成果 (亦即第二手文獻), 尤其是過去二十年內國際數學史學的蓬勃發展, 好像都沒能在本書中找到足夠的痕跡, 令人感到十分意外。[Stillwell 1989, "References", pp. 333-362]

在另一方面, 本書雖然極力在取材上聚焦, 但是, 面對的歷史時間至少有兩千年之久, 難免顧此失彼。譬如說吧, 古希臘的「不可公度量」(incommensurables) 與現代「無理數」之間的「不可共量」(incommensurable), 就是數學認識論中饒富趣味的歷史題材, Stillwell竟然輕易放過, 實在不可思議, 其實數學史家 Morris Kline 早已提供相當精闢的解說了。[Kline 1972, pp. 68-73] 此外, Stillwell 對幾何學與哲學思潮的互動關係, 完全未置一詞, 譬如柏拉圖與亞里斯多德對歐氏幾何的規範、康德 (Kant) 哲學對非歐幾何發展的影響, Stillwell 一概略過。同樣的情形也見諸於集合論的發展史, 其實它應溯及亞里斯多德的「潛無限」(potentially infinite) 與「實無限」(actually infinite) 之區別, 因爲康托爾所以能創造出集合論, 正與他對「無限」哲學的深刻認識息息相關。這再一次表示本書的主旨在於數學, 同時, 也說明 Stillwell 無暇顧及數學哲學與數學的關聯。

本書如果再拿來與 Ore 的「數論與它的歷史」相提並論, 顯然也不公平。由於「數論與它的歷史」意在介紹初等數論, 並不涉及解析數論與代數數論, 所以題材範圍比較限定。如此一來, 該書無論敍事也好, 抒情詠物也好, 都發揮得淋漓盡致, 讀來暢快平順, 是一本極佳的初等數論 (或整數論) 教科書。儘管如此, 該書一如「數學與它的歷史」之體例, 也是按

數學結構單元來分章編寫, 所以, 我們大概只能在各章之內才能追溯到數論的部分發展脈絡。相對之下, Stillwell 其實野心更大,「數學與它的歷史」各章知識內容之間的歷史傳承, 還是留下了淸楚的脈絡可尋, 儘管受限於篇幅而過度簡化的鑿痕也到處可見。不過, Stillwell 的數學洞識顯然彌補了數學史識的不足。無論如何, 就今日大學數學系學生應該精讀的好書標準來說,「數學與它的歷史」絕對是上上之選。

七. 結語與建議

人類所創造的數學知識活動, 在時間縱軸上具有歷史面向; 在橫切面上具有社會學的面向; 就知識本質而言, 它則具有哲學面向。關於這些面向的研究, 分屬於數學史、數學社會學與數學哲學。吾人對於這些面向的考察, 絕對有助於了解數學知識的內容與意義。一般的數學教學目標, 大都僅止於數學知識內容的傳授, 但是, 數學系分科教學的結果, 大學生往往將各種「套裝知識」學得破碎支離。這是本書作者以及其他數學家訴諸於數學史論述的原因之一。事實上, 除了數學史之外, 數學哲學與數學社會學, 也對數學的教與學, 提出非常深刻的反省與建議, 值得關心數學教育的學者專家參考與借鏡。

筆者身爲專業數學史家, 發現數學史具有這種應用價值, 當然十分欣慰。玆以本文的討論爲基礎, 筆者不揣鄙陋, 提出關於數學史的教學與研究之建議如下:

(1) 選擇專題做研究報告, 譬如『解析幾何發展史』、『代數發展史』、『實變函數論發展史』、『橢圓函數發展史』、『巴斯卡三角形的歷史』以及『三角函數發展史』等等, 都是很値得嘗試的題材。具體步驟不妨先做類似流水帳的年表, 然後開始進一步思考這些人、事、物的流變 (含時間、空間座標) 之意義, 如此一來, 歷史的時空感覺自然會變得眞實起來, 最後, 在參酌他人的硏究成果之後, 就可以大膽地提出自己的歷史判斷與評價。

(2) 上述這些研究報告, 正式發表與否, 聽其尊便。但是, 請務必設法與學生分享。如果能找到將來打算擔任數學教師的學生一起上課討論, 則將這些研究成果注入教學關懷, 一定可以獲得更多的反響與回饋。請注意: 數學史與數學教育的結合 (譬如 HPM), 目前在國際數學教育界已經變得非常成熟。我們非常期待大家一起來參與與分享! [洪1999b]

(3) 利用赴國外短期進修或研究的機會, 廣泛收集這一方面的教學或研究資訊。如果能參加相關的書報討論, 相信數學史的知識門檻會更容易跨過。此外, 也値得贊助 / 鼓勵年輕同仁出國攻讀學位時, 以數學史或其他相關學科爲主修。

(4) 國內舉辦數學研討會時, 應鼓勵同仁針對某一相關主題提出歷史研究的報告。譬如, 與代數數論有關的研討會中, 就很値得安排一場有關「費馬最後定理」歷史回顧的演講。在這一方面, 資深的數學家責無旁貸!

(5) 如有機會應邀到中小學演講, 在歷史的脈絡中強調數學知識的有趣與有用, 是很値得嘗試的方式。我們希望藉此提醒中小學教師: 數學知識有它極深刻的價値與意義, 而這應該也是教學的主要內容才是。

總之, 正如同本書的風貌 – 亦即數學爲主、數學史爲輔 – 一樣, 任何人在教授或著述「數學」時, 都可以而且應該將數學史視爲工具。不過, 要想「善其事」, 工具當然愈精良 (或升級) 愈有幫助。誠然, 在另一個千禧年的開始, 數學史的確可以幫助我們回顧過去兩千年的數學發展。即使未必因此爲我們指出二十一世紀數學往何處去, 然而, 它對數學知識的傳承意義, 卻留下永恆的啓示, 值得我們深思。

参考文獻

1. Boyer, Carl, The History of Calculus and Its Conceptual Development, New York: Dover Publications Inc, 1959.
2. Boyer, Carl, A History of Mathematics, New York: John Wiley and Sons, 1968.
3. Burton, David M., The History of Mathematics, An Introduction, Newton, Mass.: Allyn and Bacon, 1985.
4. Cardano, Girolamo, The Great Art, Cambridge: M.I.T. Press, 1968.
5. Dauben, Joseph, Mathematics: An Historian's Perspective, Philosophy and the History of Science: A Taiwanese Journal 2(1): 1-21, 1993.
6. Fibonacci, Leonardo Pisano, The Book of Squares, New York: Academic Press, INC, 1987.
7. Grattan-Guinness, Ivor, The Fontana History of the Mathematical Sciences: The Rainbow of Mathematics, London: Fontana Press, 1997.
8. Hall, A. Rupert, On Whiggism, Ambix vol. 30: 45-59, 1983.
9. Heath, Thomas L., The Thirteen Books of Euclid's Elements, New York: Dover Publications, Inc, 1956.
10. Heilbron, J. L., Applied History of Science, ISIS 78: 552-563, 1987.
11. Katz, Victor, A History of Mathematics: An Introduction, New York: HarperCollins College Publishers, 1993.
12. Kline, Morris, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, New York: Oxford University Press, 1972.
13. Nahin, Paul J., An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$. New Jersey: Princeton University Press, 1998.
14. Rowe, David E., New Trends and Old Images in The History of Mathematics, In Calinger, Ronald ed., Vita Mathematica (Washington, D. C.: MAA, 1996), pp. 3-16, 1996.
15. Seltman, Murie and Eddie Mizzi, Thomas Harriot: Father of English Algebra? The Mathematical Intelligencer 19(1): 46-49, 1997.
16. Stillwell, John, Mathematics and Its History. New York / Hong Kong: Springer-Verlag, 1989.
17. Struik, Dirk J., Lectures on Classical Differential Geometry, Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., INC, 1961.
18. Struik, Dirk J., A Concise History of Mathematics. Fourth Revised Edition. New York: Dover Publishers, INC, 1987.
19. Van der Waerden, B. L., Science Awakening. New York: John Wiley, 1963.

20. Van der Waerden, B. L., Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. New York: Springer-Verlag, 1983.
21. Van der Waerden, B. L., A History of Algebra. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
22. 洪萬生,『科學與宗教: 一個人文的思考』,「科技報導」1996年11月15日, 頁 12-14, 1996。
23. 洪萬生,「數學史的另類書寫: 推介 ICC 的『數學彩虹』」, 收入洪萬生著『孔子與數學』(台北明文書局,1999) 頁329-336, 1999a。
24. 洪萬生,『數學千禧年: 歷史、文化與教育』,「HPM 通訊」第二卷八、九期合刊, 頁1-3, 1999b。
25. 李信明,「李學數說數學故事」, 台北九章出版社, 1998。
26. 高木貞治,「近世數學史談 數學雜談」復刻版二刷, 東京市: 共立出版社, 1997。

—本文作者現任教於台灣師範大學數學系—