$\bar{\partial}$-Neumann 問題簡介

程守慶 · 張清輝

一般複變函數書中都會提到兩種研究複變函數的方法, 一種是 Weierstraβ 的級數展開法, 另一爲 Riemann 的偏微分方程的方法, 即所謂的 Cauchy-Riemann 方程 (C-R equation), 但在初級的複變書中, 主要的工具其實是 Cauchy 積分, 看不到偏微分方程的影子, 深入些的複變書又被勢論 (potential theory), 調和分析 (harmonic analysis) 所佔住, 還是不淸楚 C-R 方程的所扮演的角色, 一直到多元複變分析 C-R 方程的角色才明朗化。

複空間 ($\mathbb{C}^n$) 和 $\mathbb{R}^{2n}$ 的差別在於 $\mathbb{R}^{2n}$ 中加了一個複結構 J, 亦即 J 爲 $\mathbb{R}^{2n}$ 的一個自同構映射, 定義如下:

$$J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$$
$$(x_1,\ldots,x_{2n}) \to (-x_2, x_1,\ldots,-x_{2n}, x_{2n-1})$$

由此引入複數, 簡化爲 $\mathbb{C}^n$ 空間而得到更大的方便。(所以當在 $\mathbb{R}^m$ 中討論數學問題時, 很有可能還是藏有複結構在裡面。) 單複變和多複變最大的差別就在 $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, 時它的低維子集仍然帶有一些複結構, (如 $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, 中的 $(2n-1)$ 維子空間必然有 $(n-1)$ 維的複結構。) 這就令多複變的解析函數迥異於單複變。比如在單複變, 任意域 (domain) D 都存在僅能定義於 D 上的解析函數, 而在多複變就不然, 爲此人們引入擬凸性 (pseudo-convexity) 這個概念。簡略的說 (當 D 的邊界爲二次可微分時) 就是要對 D 的邊界點的切空間中的複子空間有所限制, 滿足這些限制的域 D, 叫做擬凸域 (pseudoconvex domain), 人們才可以合理的在 D 上做分析, 而了解 D 的性質就成爲多複變分析中主要的問題之一。

單複變中的解析函數 f 滿足 C-R 方程, 用複座標 $z = x + iy$ 將微分寫成

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}),$$
$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})\text{時,}$$

我們有 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$。多複變時, 把座標寫成 $z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n$, 這時 $f(z_1, \ldots, z_n)$ 爲解析的條件是滿足方程組 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_n} = 0$。相應於 $\partial_{z_i}, \partial_{\bar{z}_i}$, 有其對偶 $dz_i, d\bar{z}_i$, 很自然的人們就定義 (p, q) 形 (form) $\Omega_{(p,q)}(D)$, $0 \le p$, $q \le n$, 即所

有 $f=\sum_{\substack{|I|=p\\|J|=q}} f_{I,J}dz^I\wedge d\bar{z}^J$ 所成的集合, 其中

$$\begin{aligned}
&I=(i_1,\ldots,i_p),\\
&J=(j_1,\ldots,j_q),\\
&I\in\underbrace{\{1,\ldots,n\}\times\cdots\{1,\ldots,n\}}_{p\text{個}}\\
&J\in\underbrace{\{1,\ldots,n\}\times\cdots\{1,\ldots,n\}}_{q\text{個}}
\end{aligned}$$

而 $f_{I,J}$ 爲定義於 D 上的函數。

平行於實空間的 de Rham 叢 (complex), Dolbeault 叢寫成

$$\begin{aligned}
0\longrightarrow \Omega_{(p,0)}(D)\xrightarrow{\bar{\partial}}\Omega_{(p,1)}(D)\xrightarrow{\bar{\partial}}\cdots\\
\xrightarrow{\bar{\partial}}\Omega_{(p,n)}(D)\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

此處我們先假定 f 爲夠光滑的形 (form), $f\in\Omega_{(p,q)}(D)$, $\bar{\partial}f$ 的定義如下:

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}f&=\sum\bar{\partial}f_{I,J}\wedge dz^I\wedge d\bar{z}^J\\
\bar{\partial}f_{I,J}&=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_{I,J}}{\partial\bar{z}_j}d\bar{z}_j.
\end{aligned}$$

而 f 爲 D 上解析函數就等同於 $f\in\Omega_{(0,0)}(D)$, 且 $\bar{\partial}f=0$, 從複變觀點對於 $f\in\Omega_{(p,q+1)}(D)$, 解下列 $\bar{\partial}$-方程 (亦即 C-R 方程)

$$\begin{cases}\bar{\partial}u=f & u\in\Omega_{(p,q)}(D),\\ \bar{\partial}f=0\end{cases}$$

(因爲 $\bar{\partial}^2=0$, f 必須滿足 $\bar{\partial}f=0$ 的相容條件) 成爲主要問題, 這是由於解的存在, 其正則性 (regularity) 等等提供了非常豐富的訊息。

解 $\bar{\partial}$-方程的一種方法就是所謂的 $\bar{\partial}$-Neumann 問題。這是模仿實變數的 Laplace-Beltrami 算子 $\Delta=dd^*+d^*d$ (d^* 是 d 的伴隨 (adjoint) 算子)。人們考慮算子

$$\square=\bar{\partial}\bar{\partial}^*+\bar{\partial}^*\bar{\partial}:L^2_{(p,q)}(D)\to L^2_{(p,q)}(D).$$

這裡 $\bar{\partial}^*$ 是 $\bar{\partial}$ 的伴隨算子 (adjoint operator), 而 (p,q) 形的係數是 D 上的 L^2 (即平方可積) 函數, 我們首先觀察到 $\square$ 寫開時和一般的 Laplace 算子並無不同, 然而當定義 $\bar{\partial}^*$ 時, 它的定義域中的 (p,q) 形自然而然的要滿足一些邊界條件, 因此考慮 $\square u=f$ 時, u 及 $\bar{\partial}u$ 就必須滿足這些邊界條件, 它們和傳統的 Dirichlet 條件或 Neumann 條件都不一樣, 這就是 $\bar{\partial}$-Neumann 這名稱的由來。另外, 要從這個方向解 $\bar{\partial}$, 在 $\square u=f$ 中就得限制 f 滿足 $\bar{\partial}f=0$, 這樣很容易證明 $\bar{\partial}^*\bar{\partial}u$ 這一項爲零, 所以 $v=\bar{\partial}^*u$ 就給出 $\bar{\partial}v=f$ 的解, 這個解一般稱做典型 (canonical) 解, 因爲 $\bar{\partial}$ 方程的解不唯一, 而這個解和所有滿足 $\bar{\partial}v=0$ 的 $(p,q-1)$ 形 v 垂直。(這可由 $<\bar{\partial}^*u,v>=<u,\bar{\partial}v>=0$ 得到。) 比如 $q=1$ 時, 典型解會和 D 上所有 L^2 的解析函數垂直, 所以 $\bar{\partial}$-Neumann 問題得到的 $\bar{\partial}$-解是所有解中 L^2 範數 (norm) 最小的。正式的 $\bar{\partial}$-Neumann 問題就寫成

$$\square u=f,\quad f\in L^2_{(p,q)}(D),\quad \bar{\partial}f=0.$$

注意在解偏微分方程的邊界值問題時, 不但尋求解的存在, 明白解在邊界的正則性 (regularity) 也一樣重要。

$\bar{\partial}$-Neumann 問題是 D. C. Spencer 1950年代提出, 起先人們想用積分算子來解, 但這新的邊界條件不是傳統的方法處理得了

的, (用積分方法解 $\bar{\partial}$ 的做法要到1970年代由 G. M. Henkin 等人做出)。後來 C. B. Morrey 引進了次橢圓估計 (subelliptic estimate), 而由 J. J. Kohn 在1960年初期解決了當 D 爲強擬凸 (strongly pseudoconvex) 域時的 $\bar{\partial}$-Neumann 問題。D 是強擬凸域的一種定法是 D 的每一個邊界點都存在一個局部雙向正則 (local biholomorphic) 座標變換, 使得這點附近的邊界變成一般的強凸 (strongly convex) 域的邊界。很快的 L. Hörmander 得到一般擬凸域 (pseudoconvex domain) 上 $\bar{\partial}$-Neumann 解的存在。但它的邊界正則性則懸疑了很長一段時間, 也就是說, 當 D 的邊界是無窮可微分, f 也在 $C^\infty_{(p,q)}(\bar{D})$, 那麼典型解是否也在 $C^\infty_{(p,q)}(\bar{D})$ 中? $(p,q)=(0,1)$ 的情形尤其引人關注, 這從典型解的特性可見端倪, 明白的說, 令 $N_{(p,q)}$ 代表對 $\Box u=f$, $f\in L^2_{(p,q)}(D)$ 的逆算子, 我們有

$$P = Id - \bar{\partial}^* N_{(0,1)}\bar{\partial} : L^2(D) \to L^2(D)\cap H(D)$$

$H(D)$ 代表 D 上解析函數, P 是 D 上 L^2 函數到 D 上平方可積分且解析的函數子空間 (即 $L^2(D)\cap H(D)$) 的投影算子 (projection operator), 稱爲D的 Bergman 投影算子。這個算子的核 (kernel) 叫做 Bergman 核, 由此可定出D上的 Bergman 度量 (metric), 這些都是D上的雙向正則不變量 (biholomorphic invariant)。了解它們的性質, D上相關的複變性質也大致明白了。

爲了解 $\bar{\partial}$-Neumann 問題解的邊界正則性, 人們尋找比強擬凸鬆些的條件, J. J. Kohn 在1972年引進了所謂有限邊界型 (finite type), 滿足這條件的 D, $\bar{\partial}$-Neumann 解的邊界正則性也是對的。不過 1996, M. Christ 證明在 $\mathbb{C}^2$ 中的“worm”域上, $\bar{\partial}$-Neumann 問題解不具正則性, 而在有無正則性之間尙有許多待解的問題。

當 $\bar{\partial}$-Neumann 問題解的邊界正則性保持時, 有許多應用, 如常態解析 (proper holomorphic) 映射的邊界延拓或邊界 C-R 方程 ($\bar{\partial}_b$) 的解等等, 由於 J. J. Kohn 在這個問題上的投入與貢獻, 有些人把 $\Box_b$ 算子稱爲 Kohn Laplacian, 有興趣的讀者可由參考文獻找到更多資料。

參考文獻

1. Chen, S. -C., Complex analysis in one and several variables, Taiwanese J. Math., **4**(2000), 531-568.
2. Chen, S. -C. and Shaw, M. -C., Partial Differential Equation in Several Complex Variables, Studies in Advanced Math., Vol. 19, AMS-International Pre -ss, 2001.
3. Christ, M., Global C^∞ irregularity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem for worm domains, J. Amer. Math. Soc., **9**(1996), 615-637.
4. Christ M., Remark on global irregularity in the $\bar{\partial}$-Neumann problem, S.C.V. MSRI Pub., Vol. 37(1999), 161-198.
5. D'Angelo J. P. and Kohn J. J., Subelliptic estimates and finite type, S.C.V. MSRI Pub., Vol. 37(1999), 199-232.

6. Folland, G. B. and Kohn, J. J., The Neumann Problem for the Cauchy-Riemann Complex, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1972.
7. Hörmander, L., L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta Math., **113**(1965), 89-152.
8. Kohn, J. J., Harmonic integrals on strongly pseudoconvex manifolds, I. Ann. Math., **78**(1963), 112-148; II, Ann. Math., **79**(1964), 450-472.
9. Kohn, J. J., Subelliphicity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem on pscx domain: sufficient conditions, Acta Math., **142** (1979), 79-122.

—本文作者程守慶任教於清華大學數學系, 張清輝任職於中研院數學所—