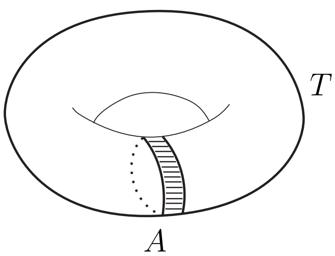
Dehn Surgery 簡介

曹志誠

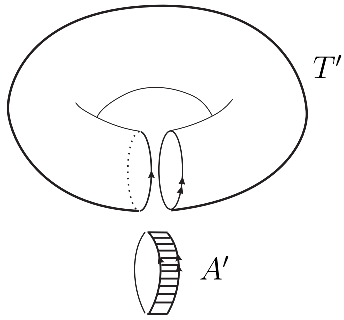
當一個醫生在爲病人做手術的時候, 比如說換心手術, 醫生要把病人的心臟拿出來, 然後把一個好的心臟按裝回去。在拓樸學裡也有一個像這樣的程序, 最早把這個程序用在三維拓樸流形的是德國數學家 Max Dehn。他在1910年考慮從一個三維流形內將一個 solid torus 取出, 然後將一個拓樸同構的 (homeomorphic) solid torus 按裝回去, 但是按裝的方式也許和原來拿出來的方式不一樣, 這樣產生的三維流形便和原來的三維流形很可能不是拓樸同構的。

爲方便說明這個情形, 我們把流形的維數降低一維到二維。想像一個二維的 torus T 及其上面的一個環 A, 如圖一所示。

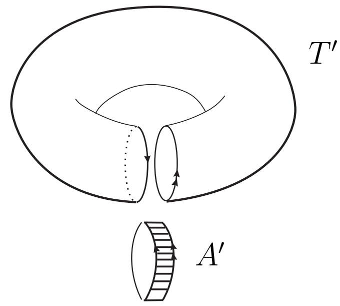


圖一

如果沿著環 A 的兩個邊界把它切下來, 則我們便得到如圖二的兩個 (有界的) 流形T' 及 A': 其中箭頭的方向指示原來這兩個流形的邊界是如何連在一起的。現在如果把環 A' 放回去, 但把 A' 和 T' 的邊界連在一起的方式改變一下, 如圖三箭頭方向所示。



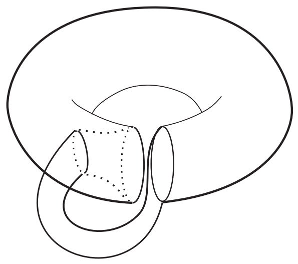
圖二



圖三

則我們得到一個新的二維流形, 它是一個和

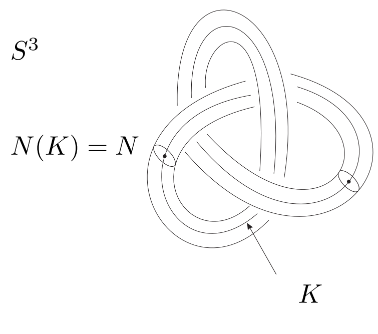
原來 torus 不同構的克來因瓶 (Klein bottle), 如圖四所示。



圖四

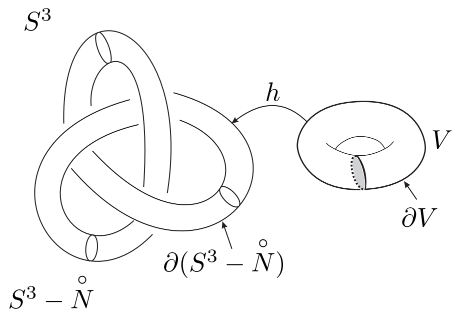
(註: 這是克來因瓶在三維空間中的示意圖)

讓我們回到三維的情形, 在本文中所有的三維流形都限於有向性的 (orientable)。爲了方便起見, 我們做 surgery 的三維流形對像僅限於三維球體 S^3。如果 N 是在 S^3 內的一個 solid torus, 則 N 的中心線 (core) 是一個在 S^3 內的結 (knot) K, 我們也把 N 記作 $N(K)$, 如圖五所示。



圖五

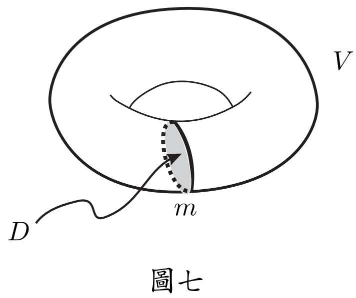
現在如果把 N 的內部 $\mathring{N}$ 從 S^3 取出來, 再把一個和 N 同構的 solid torus V 黏接回去, 黏接的方式是把 V 的邊界 ∂V 和 $S^3-\mathring{N}$ 的邊界 $\partial(S^3-\mathring{N})$ 經過一個同構映射 (homeomorphism) $h:\partial V-\partial(S^3-\mathring{N})$ 接合起來, 如圖六所示:



圖六

則我們得到一個新的 (緊緻無邊的) 三維流形, 記作 $(S^3-\mathring{N})\bigcup_h V$。這個程序就叫做在 S^3 上沿著結 K 做 Dehn 手術 (Dehn Surgery)。很顯然的, 由 Dehn Surgery 所得到的三維流形 $(S^3-\mathring{N})\bigcup_h V$, 它的拓樸是由結 K 和用來黏接的同構映射 h 所決定的。

現在我們把結 K 固定。在 V 的邊界 ∂V 上有一個緯線 (meridian)m, 它的特徵是在 V 內有一個圓板 D 使得 $m=\partial D$, 如圖七所示。

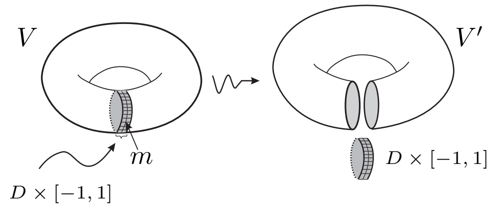


圖七

另一方面, $\partial(S^3-\mathring{N})$ 是一個二維的 torus, 在上面有一個公認的座標系統, 它的座標是由兩條封閉曲線組成, 一條叫經線 (longitude) 記作 λ, 另外一條叫緯線 (meridian)

記作 μ。經線 λ 的特徵是它在 $S^3-\overset{\circ}{N}$ 內有個二維曲面 (surface)F 使得 $\lambda=\partial F$, 而緯線 μ 的特徵是在 N 內有一個圓板 D' 使得 $\mu=\partial D'$。我們把這個 torus 上的座標系統記爲 (λ,μ), 就像平面上的 (x,y) 座標一樣。任何在這 torus 上的閉曲線都可以用 λ 和 μ 表達出來, 這是因爲 torus 的基本群 (fundamental group) 是 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, 而 λ 和 μ 是這個群的生成元。

我們可以從下面兩個步驟來看這個 surgery 流形 $(S^3-\overset{\circ}{N})\bigcup_h V$是如何造成的。首先我們把在 solid torus V 上包括圓板 D 的實圓柱體 $D\times[-1,1]$ 切下來, 如圖八所示:



圖八

然後用 h 先把 $D\times[-1,1]$ 黏到 $S^3-\overset{\circ}{N}$ 上使得 $m\times[-1,1]$ 黏在 $\partial(S^3-\overset{\circ}{N})$ 上。如此得到的結果是一個有邊的三維流形, 它的邊界是一個二維的拓樸球。你是否注意到 $\partial V'$ 也是一個二維的球? 接下來我們把 V' 用 h 的剩餘部份黏到剛才得到的有邊流形, 使 $\partial V'$ 上原來屬於 ∂V 的部份黏到 $\partial(S^3-\overset{\circ}{N})$ 上剩餘的部份, 並且使原來的兩個圓板 $D\times\{-1\}$ 及 $D\times\{1\}$ 接合回去。

由以上的描述, 我們不難看出 $(S^3-\overset{\circ}{N})\bigcup_h V$ 的拓樸是完全由在 $\partial(S^3-\overset{\circ}{N})$ 上的封閉曲線 $h(m)$ 所完全決定 (不管它的走向)。既然 λ, μ 是 $\partial(S^3-\overset{\circ}{N})$ 基本群的生成元, $h(m)$ 便可以由 λ 和 μ 表達出來。那就是說 $h(m)=\pm(p\mu+q\lambda)$, 其中 p 和 q 是互質的整數 (爲什麼呢?)。如此我們便可將由 Dehn surgery 得到的三維流形 $(S^3-\overset{\circ}{N})\bigcup_h V$ 簡記爲 $(K;\frac{p}{q})$。這個 surgery 稱爲 (p,q)-surgery, 或者說 $\frac{p}{q}$ 是這個流形的斜率。

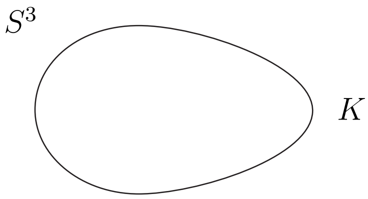
很顯然的, 如果 $h(m)=\pm\mu$, 則 $(K;\frac{\pm1}{0})$ 和 S^3 是拓樸同構。這相當於將 N 從 S^3 拿出來後再原般的放回去, 或轉個 180° 度後放回去一樣, 得到的結果當然和沒有做任何 surgery 一樣。

Dehn surgery 主要的用處之一是它可以造出許多三維流形, 其中不少在不同領域中被用來做例子或反例。另外由 Dehn surgery 本身引申出來的問題也很多, 比如說什麼樣的 Dehn surgery(什麼 p,q 值), 作用在什麼樣的結上, 會產生什麼樣的三維流形。

既然用 Dehn surgery 在一個結上可以造出許多不同的三維流形, 自然人們想知道有沒有可能用它來造出一個三維 Poincaré 猜想的反例。三維 Poincaré 猜想是說任何一個緊緻, 無邊且單連通的 (simply-connected) 三維流形是和 S^3 拓樸同構。這個猜想至今已有97年歷史, 可以說是拓樸學中最有名而尚未解決的問題。這個猜想是經過 Poincaré 修正過的猜想。原來, 在1900年 Poincaré 提出一個猜想說任何一個緊緻, 無邊且和 S^3 同調等價的 (equivalent homologically) 三維流形是和 S^3 拓樸同構。但是在1904年他又發表了一篇文章, 其中他給了一個他原來猜想的反例, 並且把他原來猜想

中的同調條件修正爲同倫 (homotopy) 而成爲現今的 Poincaré 猜想。這個 Poincaré 給的反例現在被稱爲 Poincaré 流形, 它和 S^3 同調等價, 但是它的基本群有120個元素。所以不是單連的。後來 Dehn 於1910年用他的 surgery 方法在 S^3 中沿著三葉結 (trefoil knot) 做 $(1,1)$-surgery 造出 Poincaré 流形, 這和原來 Poincaré 用的方法不同。從此以後, Dehn surgery 成爲廣爲應用去製造和 S^3 同調等價的三維流形的方法。

那麼是不是有可能用 Dehn surgery 在S^3 中沿著一個結K造出一個 Poincaré 猜想的反例呢? 這個問題導引出以下“P 性質”的定義: 如果一個在 S^3 中沿著結 K做任何非無聊的手術 (nontrivial surgery) 都不能得到單連通的三維流形, 我們就說這個結 K 具有 P 性質。什麼樣的結具有 P 性質呢? 我們先從最簡單的結著手 — 無聊結 (trivial knot)。如果 K 是這樣的一個結, 則 K 和一個普通的圓一樣, 如圖九所示。



圖九

因爲K是一個無聊結, 如果我們從 S^3 將 solid torus $N(K)$ 的內部拿出來, 則剩下的三維流形 $S^3-\mathring{N}(k)$還是一個 solid torus (讀者試證之)。現在如果我們做的 Dehn surgery 是 (p,q)-surgery, 那便相當於把兩個 solid torus 沿著它們邊界 (兩個二維的 torus) 黏在一起, 黏接的方式是將其中一個 torus 的緯線和另外一個 torus 的 (p,q)-曲線接合在一起。這樣得到的三維流形叫做透鏡空間 (lens space), 記作 $L(p,q)$。不難看出 $L(\pm1,q)$ 和 S^3 是拓樸同構的, 不論 q 是什麼整數值 (讀者試證之)。然而當 $q\neq 0$, $(\pm1,q)$ 是一個非無聊的手術。因此我們看到任何一個無聊結都不具 P 性質。

當人們考慮非無聊的手術結的 P 性質時, 卻遭遇了相當大的麻煩, 首先他們發現不少個別的 non-trivial 結及一些同類的結具有P性質, 但是就是沒有辦法證明所有的 nontrivial 結具有 P 性質。什麼樣的 non-trivial 結具有 P 性質呢? 它包括了所有的 torus 結 (torus knots)、複結 (composite knots) 等一大堆的結。於是在1970年 Bing, Martin 及 Gonzáles-Aouña 就提出一個叫做“P 性質”的猜想: 任何一個在 S^3 中的 nontrivial 結都具有 P 性質。很顯然如果 P 性質猜想是對的話, 那就沒有可能用 Dehn surgery 在 S^3 中沿著一個結造出 Poincaré 猜想的反例。這實在不是個好消息!

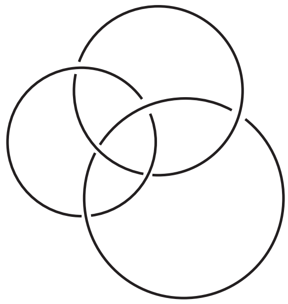
最近研究的結果顯示有更多的結支持這個P性質猜想, 如衛星結 (satillite knots) 等。根據 W. Thurston 的 uniformization 定理, 我們可以把所有的 nontrivial 結分爲 torus 結, 衛星結及雙曲結 (hyperbolic knots)。所以現在只剩下雙曲線是未知。

1990年 C. Gordon 和 J. Luecke 證明了一個有八十年歷史, 原來由 H. Tietze 所提出的猜想: 設若 K_1 和 K_2 是 S^3 中的兩個結, 如果 S^3-K_1 和 S^3-K_2 是拓樸同構的話, 則 K_1 和 K_2 是同型的。同

型的意思是存在一個同構映射 (homeomorphism) $h: S^3 \to S^3$ 使得 $h(K_1) = K_2$。由這個結果可以推論出沿著任何一個非無聊結作非無聊的 Dehn 手術 (non-trivial Dhn surgery) 都不可能得到 S^3(注意是 S^3 而不是單連三維流形)。所以 Gordan 和 Uecke 的結果可以說是繞過 Poincaré 猜想而證明了 P 性質猜想。

讓我們來討論一下什麼樣的三維流形可以由 Dehn surgery 在 S^3 中沿著一個結來造出來。事實上這種三維流形是頗有限的, 因爲所有這樣的三維流形它們的第一階同調群都是循環的 (cyclic)。比如說 $S^1 \times S^1 \times S^1$ 就沒辦法由 Dehn surgery沿著任何結造出來。然而既然所有的透鏡空間的第一階同調群都是循環的, 一個很自然的問題是可不可以用 Dehn surgery 在S^3 中沿著非無聊結造出所有的透鏡空間? 請注意這些結是非無聊。據筆者所知, 這個問題到現在仍是尚未解決的。即使是比S^3稍複雜一點的三維投影空間 (real projective space)$\mathbb{R}P^3$ 都還不知道可不可以由 Dehn surgery 沿著一個非無聊結造出來。

既然在 S^3 中沿著一個結做 Dehn surgery 只能造出有限的三維流形, 那麼如果我們增加結的個數, 然後沿著每一個結上做 Dehn surgery 的話, 是不是可以造出多一點的三維流形呢? 答案是可以的, 而且不但是可以, 甚至所有的三維流形 (緊緻且無邊的) 都可以如此造出來, 只要結的個數夠多的話。這個結果是 A. D. Wallace(1960) 及 W. B. R. Lickorish(1962) 各自獨立做出來的。Wallace 用的方法是四維的, 而 Lickorish 用的是三維的方法。所以現在我們知道任意一個緊緻無邊的, 具向性的 (oriented) 三維流形都可以在S^3 中沿著一堆彼此不相交的結做 Dehn 手術 (Dehn surgery) 造出來。長久以來, 人們便觀察到同一個三維流形可以在不同的兩堆結上用 Dehn surgery 造出來的現象。比如說前所述及的 Poincaré 流形可以在三葉結上用 $(1,1)$-surgery 造出來, 它也可以在 Borromean ring(如圖十所示)中的每一個結作 $(1,1)$-surgery造出來。



圖十

1976年 R. Kirby 發現, 如果同一個三維流形可以在不同的兩堆結上用 Dehn surgery 做出來的話, 則這兩堆結的一堆可以自另外一堆經過一連串的“基本形變” —稱 Kirby 形變 (Kirby moves) 得到, 而在其上做的 Dehn surgery 也隨著每一基本作用而改變。這基本作用有兩種 (由於篇幅及內容所限, 筆者不贅述說明), 而且不難觀察出來, 經過其中任一種基本形變, 一個沿著一堆結用 Dehn surgery 造出來的三維流形不會改變它的拓樸。Kirby的定理是上述觀察的反敍述。這是一個頗有難度的定理, 證明用到四維微分拓

樸中的 Cerf theory, 直到最近才有一個較簡單的三維的證明。

Kirby的定理在某種意義上把三維流形理論轉換成在 S^3 中一堆結和在它們上面做 Dehn surgery 的理論。這是一個重大的轉變和創新, 因爲在這個理論發展之前, 傳統上研究拓樸流形的工具限於 handle decomposition, 在三維則尙有 W. Haken 的 normal surfaces 理論, 及最近用 incompressible surfaces 來做分析等工具。甚至在數年前有數學家想用現在叫做 Kirby calculus 的方法來證明 Poincaré 猜想, 可惜沒有成功。最近 Kirby calculus 還被用來 (基於物理學家 E. Witten 的想法) 造三維流形的不變量 (invariants), 雖然一般來說這些不變量不易計算, 但無可置疑的它開啓了研究三維流形新的一頁。

参考文獻

1. G. Burde and H. Zieschang, Knots, Studies in Math., No. 5, Walter de Gruyter, 1985.
2. L. Kauffman, On Knots, Annals of Math Studies 115, Princeton University Press, 1987.
3. R. Lickorish, Introduction to Knot Theory, Spriger-Verlag, New York, 1997.
4. D. Rolfsen, Knots and Links, Math Lecture Series, No. 7, Publish or Perish, 1976.

—本文作者任教於美國Saint Louis 大學數學暨計算科學系—