幾種古典的結不變量

郎一全

1. 序論

扭結理論 (knot theory) 是一個非常特別的理論, 一方面扭結理論所研究的主題-結, 對大多數人而言是那麼熟悉, 每個人都有打結的經驗 (包括童子軍所教的各種繩結)。另一方面, 扭結理論在低維度拓樸這個領域中佔有重要的地位, 而在研究結的方法中, 也包含了拓樸、代數、組合各種觀點, 使得扭結理論變成一個豐富而深刻的理論且與許多其他數學分支有密切關連, 特別是近來物理數學蓬勃發展, 扭結理論與物理數學的關係被廣泛研究, 更增加扭結理論未來的發展。

扭結理論, 是要處理數學中的放置問題 (placement problem), 廣義的放置問題如下, 給定一空間 X, 及其兩個子空間 Y_1, Y_2, 是否存在 X 的自同胚 (auto-homeomorphism) f 使得 $f(Y_1) = Y_2$? 而扭結理論主要是要討論 R^3 中的 S^1, 更精確的說, 若 $f : S^1 \to R^3$ 是嵌射 (embedding), 則稱 $f(S^1)$ 是一個結 (knot), 若二個結是環繞合痕 (ambient isotopic), 則稱二個結是同型 (same type), 簡單的說, 在不破壞打結的狀態下, 允許做一些變形 (deformation), 而扭結理論中的核心問題就是判斷二個結是否同型, 爲了簡化問題, 我們通常假設結是 R^3 中的簡單封閉多角曲線 (simple closed polygonal curve), 這樣可以選取適當的投影至平面上, 使得 (1) 沒有三重點 (2) 頂點不在交叉點上, 例如三葉結 (trefoil) 可以畫成下圖 (圖 1), 當然也可以畫得平滑些 (圖 2)。

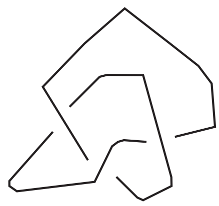


圖1

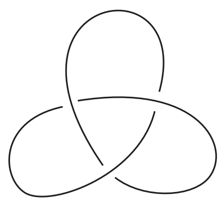


圖2

2. 結群 (knot group)

判斷二個結是否同型並不是一件簡單的事, 最好的方法是先找出一些結不變量 (knot invariant), 也就是對於同型的結給一個廣義的代數數值 (可能是數值、多項式、甚

至是群、環...), 這樣只要二個結所對應的代數數值不同, 就可以判斷二個結是不同型。

在衆多結不變量中, 一個非常古老且重要的是結群 (knot group), 結的餘集的基本群 (fundamental group), 若 K 是一個結, 則 K 的結群 G 定義爲 $G=\pi_1(R^3\backslash K)$。

要如何描述 G 點呢? 將結投影至平面上, 並爲結選一個方向 (orientation)。假設結的投影圖有 n 個二重點, 以「下穿越點」(undercrossing point) 爲準, 將結分成 n 個弧 (arc), 弧的端點是從一個二重點的下穿越點出發, 到下一個二重點時若是從上穿越 (overcrossing) 則繼續向前, 若是從下穿越 (undercrossing) 則停止, 以三葉結爲例, 可以分成三個弧 (圖3)

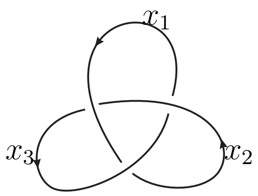


圖3

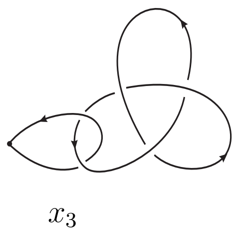
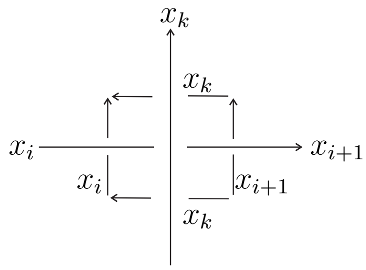


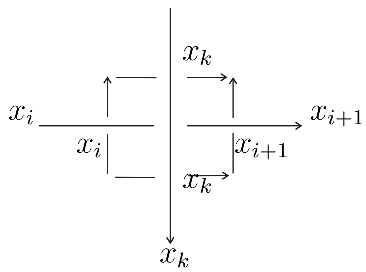
圖4

選定 $R^3\backslash K$ 中一點 P 爲基點 (base point), 令 x_i 表通過 P 繞過第 i 個弧的閉路 (loop) (弧和閉路都以 x_i 表示), 閉路的方向是根據結的方向以右手規則定之 (圖4), 則 $x_i\in\pi_1(R^3\setminus K)$, 而在每個交叉點上可以得到如圖5、6的關係式 (圖7畫得更淸楚),



$$x_k x_i = x_{i+1}x_k$$

圖5



$$x_i x_k = x_k x_{i+1}$$

圖6

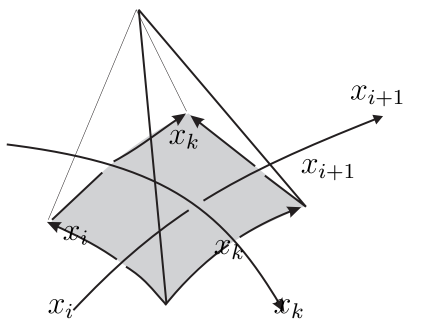


圖7

這樣總共得到 $r_1,\ \ldots, r_n$ 共 n 個關係, 我們有如下的重要定理 (Wirtinger presentation)

G 由 $x_1,\ \ldots,\ x_n$ 生成且任意 x_i 之間的關係式都可由 $\{r_1,\ldots,r_n\}$ 生成, 也就是

說

$$G=\langle x_1,\ldots,x_n|r_1,\ldots,r_n\rangle$$

以三葉結爲例 (圖8), 在交叉點 A, $x_1x_2=x_2x_3$, $x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1}=1$; 在交叉點 B, $x_2x_3=x_3x_1$, $x_3x_1x_3^{-1}x_2^{-1}=1$; 在交叉點 C, $x_3x_1=x_1x_2$, $x_1x_2x_1^{-1}x_3^{-1}=1$; 因爲在 C 的關係式可由前二者得到, 所以三葉結的結群

$$\begin{aligned}G&=\langle x_1,x_2,x_3\,|\,x_1x_2=x_2x_3=x_3x_1\rangle\\&=\langle x_1,x_2\,|\,x_1x_2=x_2x_1x_2x_1^{-1}\rangle\\&=\langle x_1,x_2\,|\,x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}=1\rangle\\&=\langle a,b\,|\,a^3b^2=1\rangle\end{aligned}$$

其中　$a=x_1x_2, b=x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}$

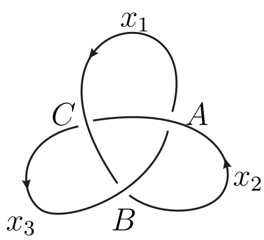


圖8

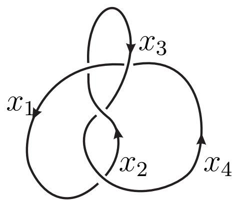


圖9

再以8字結 (figure eight knot) 爲例 (圖9)

$$\begin{aligned}G&=\langle x_1,x_2,x_3,x_4\,|\,x_3x_4=x_1x_3,x_1x_2\\&\qquad=x_3x_1,x_1x_4=x_4x_2,x_3x_2=x_2x_4\rangle\\&=\langle x_1,x_3\,|\,x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_3x_1\\&\qquad=1\rangle\\&=\langle a,b|\ b^{-1}aba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba=1\rangle\end{aligned}$$

其中　$a=x_1, b=x_1^{-1}x_3$

考慮平方結 (square knot)(圖10)

$$\begin{aligned}G=\langle &x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6|x_6x_2=x_2x_1,\\&x_2x_1=x_1x_3,x_1x_6=x_6x_2,\\&x_5x_3=x_4x_5,x_4x_5=x_6x_4,\\&x_6x_4=x_5x_6\rangle\\=\langle &x_1,x_3,x_5|x_1x_3x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_3^{-1}=1,\\&x_5x_3x_5x_3^{-1}x_5^{-1}x_3^{-1}=1\rangle\end{aligned}$$

若考慮祖母結 (granny knot)(圖11), 可以得到祖母結的結群和平方結一樣。(這裡我們看到一個例子, 平方結和祖母結是不同型的結, 但卻有相同的結群)。

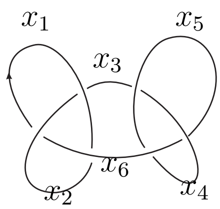


圖10

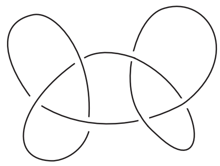


圖11

就如我們上述的計算, 結的結群都是利用生成元和關係所寫成的, 這樣的寫法固然很方便, 但想要深入瞭解這個群的結構可不是那麼容易, 以三葉結的結群爲例, 我們有下列的群表現

$$\rho: G=\langle a,b|a^3b^2=1\rangle\to SL_2(Z)$$
$$a\to\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}.$$
$$b\to\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

由

$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$\neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

可得 G 不是交換群, 由此也可以證明三葉結是不能解開的 (non-trivial knot), 因爲 S^1 的結群是 Z 。

特別値得一提的是, 結不變量常考慮結在三度空間中的餘集, C. McA. Gordon 和 J. Luecke 在1989年證明, 若二個結有等價的餘集, 則這二個結是同型。

3. Alexander 多項式

除了結群之外, 還有一個重要的結不變量是 Alexander 多項式 (Alexander polynomail), 我們先介紹一個代數的方法來瞭解 Alexander 多項式, 所需要的工具是 Fox 的微分法 (Fox differential calculus)。

令 F 是由 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 所生成的自由群 (free group), 對於 F 中的任意字元 $W = X_{j_1}^{e_1} X_{j_2}^{e_2} \cdots X_{j_k}^{e_k}$ 其中 $e_i \in \{1, -1\}$。

定義自由微分 (free derivative) $\frac{\partial W}{\partial X_1}$, $\frac{\partial W}{\partial X_2}$, $\ldots$, $\frac{\partial W}{\partial X_n}$ 如下:

$$\frac{\partial W}{\partial X_j} = e_1 \delta_{jj_1} X_{j_1}^{\frac{1}{2}(e_1-1)} + e_2 \delta_{jj_2} X_{j_1}^{e_1} X_{j_2}^{\frac{1}{2}(e_1-1)} + \cdots$$

舉例如下

$$\begin{aligned} W &= X_1 X_2 X_1^{-1} X_2 X_2 X_2 X_1 \\ \frac{\partial W}{\partial X_1} &= 1 - X_1 X_2 X_1^{-1} + X_1 X_2 X_1^{-1} X_2^3 \\ \frac{\partial W}{\partial X_2} &= X_1 + X_1 X_2 X_1^{-1} + X_1 X_2 X_1^{-1} X_2 \\ &\quad + X_1 X_2 X_1^{-1} X_2^2 \end{aligned}$$

爲了使微分式中右邊的算式有意義, 可以將其視爲群環 (group ring) $Z[F]$ 中的元素, 也就是 $\frac{\partial}{\partial X_i} : F \to Z[F]$。

要注意的是, 自由微分的乘法規則不同於一般微分

$$\frac{\partial(uv)}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial X} + u \frac{\partial v}{\partial X}$$

若 G 是結 K 的結群, 令 $\varphi : F \to G$ 是典型同態 (canonical homomorphism), 當然 φ 也可以看做 $\varphi : Z[F] \to Z[G]$ 則下列矩陣稱爲 G 的 Jacobian

$$\begin{aligned} &\varphi\left(\frac{\partial(r_1, \ldots, r_m)}{\partial(X_1, \ldots, X_n)}\right) \\ &= \varphi \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial r_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial r_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

令 $[G, G]$ 表 G 的換位子群 (commutator subgroup), $H = G/[G, G]$, $\Psi : G \to H$ 是典型同態 (canonical homomorphism), (同理, Ψ 也可以看做 $\Psi : Z[G] \to Z[H]$) 根據 Hurwitz 定理, $H = G/[G, G] \cong H_1(R^3 \setminus K) \cong Z$, 則下列矩陣叫做 K 的 Alexander 矩陣

$$A = \psi\varphi\left(\frac{\partial(r_1, \ldots, r_m)}{\partial(X_1, \ldots, X_n)}\right)$$

定義 $E_d(A) \subset Z[H]$ 是由 A 中 $n - d$ 階子行列式所生成的理想 (ideal), 顯然 $E_0(A) \subset E_1(A) \subset \cdots \subset E_{n-1}(A)$。

當 G 是結群時, $E_1(A)$ 是一個主理想 (principal ideal), 令 t 表示 H 的生成元, 則 $E_1(A)$ 的生成元 $\Delta(t)$ 就叫做 K

的 Alexander 多項式, 這樣得到的多項式 $\Delta(t) \in Z[t,t^{-1}]$, 因爲 t 是 H 的生成元, 所以可以乘上任意 $\pm t^{\lambda}$ 並沒有影響。

我們計算三葉結的 Alexander 多項式

$$G = \langle x_1, x_2 | x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1} = 1\rangle$$

令 $r = x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}$

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = 1 + x_1x_2 - x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = x_1 - x_1x_2x_1x_2^{-1} - x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}$$

Jacobian矩陣爲 $[A, B]$

$$A = 1 + x_1x_2 - x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}$$
$$B = x_1 - x_1x_2x_1x_2^{-1} - x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}$$

將其中的變數都用 t 代入即得 Alexander 矩陣爲 $[1 - t + t^2 \quad -1 + t - t^2]$, 所以 $\Delta(t) = 1 - t + t^2$。

8字結的 Alexander 多項式如下:

$$G = \langle x_1, x_3 \mid x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_3x_1 = 1\rangle$$

令 $r = x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_3x_1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x_1} &= x_3^{-1} - x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1} + x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}\\ &\quad - x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_3^{-1}x_1^{-1}\\ &\quad + x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x_3} &= -x_3^{-1} + x_3^{-1}x_1 - x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}\\ &\quad - x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_3^{-1}\\ &\quad + x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}x_3^{-1}x_1x_3x_1^{-1}\end{aligned}$$

Alexander矩陣爲

$$[-1 + 3t^{-1} - t^{-2} \qquad 1 - 3t^{-1} + t^{-2}]$$

乘以 t^2 之後得 $\Delta(t) = 1 - 3t + t^2$。

平方結及祖母結的 Alexander 多項式如下:

$$\begin{aligned}G = &< x_1, x_3, x_5 \mid x_1x_3x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_3^{-1} = 1,\\ &\quad x_5x_3x_5x_3^{-1}x_5^{-1}x_3^{-1} = 1 >\end{aligned}$$

令 $r_1 = x_1x_3x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_3^{-1}$,
$r_2 = x_5x_3x_5x_3^{-1}x_5^{-1}x_3^{-1}$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_1} = 1 + x_1x_3 - x_1x_3x_1x_3^{-1}x_1^{-1}$$
$$\frac{\partial r_1}{\partial x_3} = x_1 - x_1x_3x_1x_3^{-1} - x_1x_3x_1x_3^{-1}x_1^{-1}x_3^{-1}$$
$$\frac{\partial r_1}{\partial x_5} = 0$$
$$\frac{\partial r_2}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial r_2}{\partial x_3} = x_5 - x_5x_3x_5x_3^{-1} - x_5x_3x_5x_3^{-1}x_5^{-1}x_3^{-1}$$
$$\frac{\partial r_2}{\partial x_5} = 1 + x_5x_3 - x_5x_3x_5x_3^{-1}x_5^{-1}$$

Alexander矩陣爲

$$\begin{bmatrix} 1 - t + t^2 & -1 + t - t^2 & 0 \\ 0 & -1 + t - t^2 & 1 - t + t^2 \end{bmatrix}$$

考慮所有的 2×2 階子行列式, 適當調整符號可得

$$\Delta(t) = (1 - t + t^2)^2$$

Alexander多項式到底有多有效呢?

在交點 (crossing) 數小於等於9的84個質結 (prime knot) 中, 只有3對有相同的 Alexander 多項式。

4. Seifert 矩陣與 Alexander 多項式

我們現在再介紹一個拓樸的方法來瞭解 Alexander 多項式。

考慮 R^3 中的曲面 M 如圖12, M 其實是將圓盤 (disk) 黏上 (attached) 二個扭曲的帶子 (twist band), 讀者能夠想像 M 的邊界 (boundary) 是什麼曲線呢? 答案是三葉結。

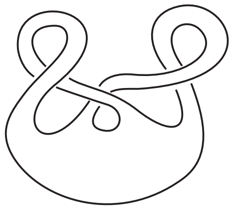
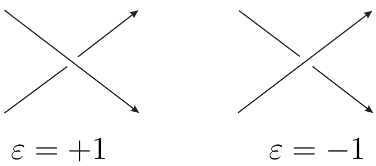


圖12

事實上, 我們有如下定理:

每個結都是一個可定向曲面 (orientable surface) 的邊界, 這個曲面叫做 Seifert 曲面 (Seifert surface)。

至於 Seifert 矩陣, 我們先規定在每個交叉點的符號如下 (右手系規則):

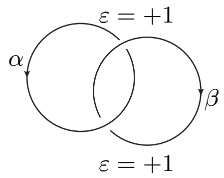


二條封閉曲線 α, β 的環繞數 (linking number) 定義如下:

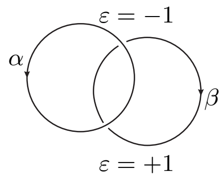
$$lk(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\sum_{p\in C}\varepsilon(p),$$

其中 C 是 α, β 的交叉點所成集合

例如:



$lk(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(1+1)=1$



$lk(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(1-1)=0$

令結 K 的 Seifert 曲面是 M, 若 M 的虧格 (genus) 是g, 則存在典型曲線 $a_1, a_2, , \ldots, a_{2g}$, 定義 Seifert 矩陣 $V = (v_{ij})$ 是一個 $2g \times 2g$的矩陣, $v_{ij} = lk(a_i, a_j^*)$, 其中 $a_j^* \in R^3 \setminus M$ 表示將 a_j 沿著 M 的正法向 (positive normal direction) 推一點所得到曲線。

以三葉結爲例, 如下圖 (圖13), 可得 Seifert 矩陣。

$$V = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

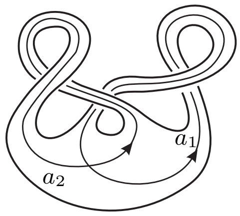


圖13

而 Seifert 矩陣和 Alexander 多項式則有下列關係:

$$\Delta(t) = |V^T - tV|$$

所以, 用拓樸的方法一樣可以求得三葉結的 Alexander 多項式爲

$$\Delta(t) = 1 - t + t^2$$

5. Conway 多項式

由第3節的討論得知, Alexander 多項式 $\Delta(t)$ 是允許乘上 $\pm t^\lambda$, 如果乘以適當的 $\pm t^\lambda$, 我們可以要求 Alexander 多項式滿足下列二個性質:

(1) $\Delta(1) = 1$

(2) $\Delta(t) = \Delta(t^{-1})$

這樣的 Alexender 多項式可以改寫成另一種形式

$$\nabla_K(z) \in Z[z], \qquad 其中\ z = t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{-1}{2}}$$

這個新的多項式就是 Conway 多項式。

事實上, Conway 多項式是可以定義在有向結或環上 (oriented knot or link), 它有如下的性質 (也可以當作 Conway 多項式的公設)

1. 對任意有向結或環都對應一個 Conway 多項式$\nabla_K(z) \in Z[z]$, 同型的結或環對應相同的多項式。
2. 若 K 是不打結 (unknot), 則 $\nabla_K(z) = 1$。
3. 若 K^+、K^-、L 在某個交叉點如下圖 (圖14)。

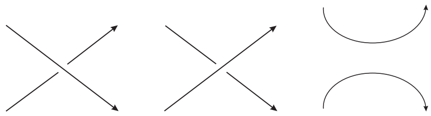
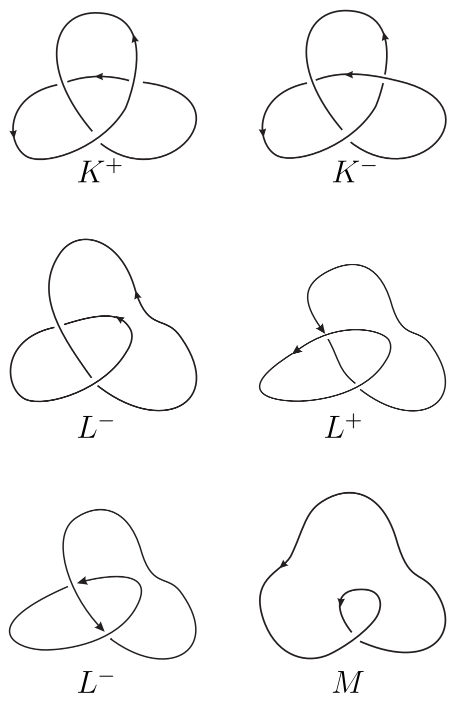


圖14

$$則\ \nabla_{K^+} - \nabla_{K^-} = z\nabla_L$$

從以上性質還可以導出若環 L 可以分成二部分 (split link), 則 $\nabla_L(z) = 0$。我們利用以上這些性質來計算三葉結的 Conway 多項式, 因爲 K^+ 是不打結, $\nabla_{K^+} = 1$, $1 - \nabla_{K^-} = z\nabla_{L^-}$, 又 L^+ 可分成二部分, M 是不打結, $\nabla_{L^+} = 0$, $\nabla_M = 1$, $0 - \nabla_{L^-} = z\nabla_M = z$, 可得三葉結的 Conway 多項式

$$\nabla_{K^-} = 1 + z^2$$



結的多項式不變量還有很多, 特別值得一提的是, 1985年 Jones 利用辮子群 (braid group) 上的表現得到一個新的結不變量, 也就是所謂的 Jones 多項式 (Jones polynomial), 比 Alexander 多項式更具威力的結不變量, 也使得 Jones 在1990年得到數學界的大獎—費爾茲獎 (Fields Medal)。

參考文獻

1. G. Burde and H. Zieschang, Knots, de Gruyter Studies in Mathematics 5, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1985.
2. R. H. Fox, A quick trip through knot theory, Topology of 3-Manifolds (M. K. Fort, Jr. ed), Prentice-Hall, Englewood, Cliffs, N. J. 1962.
3. C. McA. Gordon and J. Luecke, Knots are determined by their complements, Journal of the Amer. Math. Soc. 2 (1989), 371-415.
4. L. H. Kauffman, On Knots, Annals of Mathemathics Studies 115, Princeton University Press, Princeton, 1987.
5. C. Livingston, Knot Theory, The Carus Mathematical Monographs, Vol. 24, 1993.
6. D. Rolfsen, Knots and Links, Mathematics Lectur Series 7, Publish or Perish, Inc, Berkeley, 1976.

—本文作者任教於致理技術學院—