

結 (1)

Louis H. Kauffman 著 · 謝春忠 譯

第一節：前言

結的理論 (Theory of Knots) 因1984年 Jones 多項式 (Jones polynomial) 的發現和它所帶動的一連串研究而深受影響，本文由這個角度來介紹結的理論。

作者希望能將這些不凡的事件其中蘊涵的趣味介紹給讀者，即使是繫鞋帶這樣的小事也可以成爲一窺“編結”堂奧之旅，我們日常生活中的帶子、繩子、三度空間等都是靈感與現象取用不盡的泉源。

本文共分十節，第二、三節是關於“結”的起始，後面的章節則介紹較具技巧性的題材，而結與物理之間的關聯在 Jones 多項式及其括號模型 (Bracket Model) 即已顯現，這部份將在第五節詳細討論。第六、七節介紹 Vassiliev 不變量 (invariants) 和李代數 (Lie algebra) 與結理論間奇妙的關係。括號模型及其推廣的想法是將結本身看做離散物理系統，經由對各個物理狀態 (states) 做“平均”(averaging) 後，獲得拓樸不變量。在括號模型時，這種“平均”是有限和，而且完全是“組合”性質的。這種對各物理狀態“平均”的想法在近代物理處處可見，例如量子力學 (見第八、九節) 和量子場論 (見第十節)。

因此結理論不僅是拓樸想法也是近代理論物理方法的試金石。

本文著重於結不變量的建構及與其他數學 (如李代數)，或與物理 (如量子力學及量子場論) 的關係。另一方面，考慮結爲三度空間中的實體，那麼我們可以充入些許電荷，在電腦上觀察結如何因電力間的互斥而在空間中形成美麗的形狀。又如，我們可將結想成由粗繩組成，試問何時可得繩長，繩寬比例最小的理想繩結，凡此種種，實際具體的結有許多的層面，也是目前熱門的研究對象，礙於篇幅，在此不多作介紹。

第二節：打結與 Reidemeister 形變

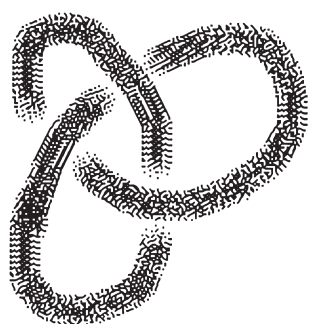
希望讀者在閱讀本節時能準備軟繩一段，做實際的操演。

我們就從打結開始，先看帆繩結 (見圖一)，這是最有用的結，常被用來將馬栓在馬樁上或將帆船繫在岸邊，易結易解又牢靠。圖一顯示如何打帆繩結。用的時候抓住下方的環，抽緊上方繩頭，一個當中有“環”結實的繩結於焉完成，要解不難，只須親身操做試試即知。



圖一：帆繩結

我們主要的目的是藉由結的圖解或圖示得知它的拓樸性質。所謂拓樸性質是指不因結的質材或拉長、彎曲等作用（只要不扯斷）而改變的性質。但我們不希望“結”在拉長過程中滑過任一繩頭以致“結”消失無蹤，所以結理論家通常假定結是由頭尾相接封閉的繩子構成以避免上述情形發生。圖二的三葉結 (trefoil) 就是這樣的一個閉路繩結。



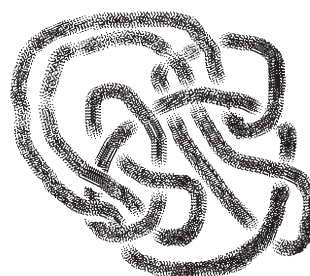
圖二：三葉結

以閉路繩結形式呈現的結是非常有用的，可以被扭曲、拉扯成許多拓樸性質等同的

形狀，例如圖三的繩結就是和圖二的三葉結等價的。

任一繩結或鏈結 (Link) 可具有無數不同的“表徵”引發數學上的一個問題，我們說一個環 (Loop) 有“結”(knotted)，意思是說這個結不會因為拉長彎曲等作用而消失，也就是說在這個環其他的表徵中找不到無“結”的表徵。所謂二個環 (拓樸) 等價，是指其中之一可經本身不自相交 (without self-intersection) 的變形變化成另一。在這種意義下，一個環有“結”是說它不與平面上毫無相交的閉曲線等價。

開啓 (組合) 編結理論的一個關鍵是 Reidemeister 定理 ([13])(以下簡稱芮氏定理)，這個定理是說兩個結是等價的若且唯若，其中之一可以經由有限次所謂的芮氏形變 (Reidemeister moves) 變化而成另一個。



圖三：變形的三葉結

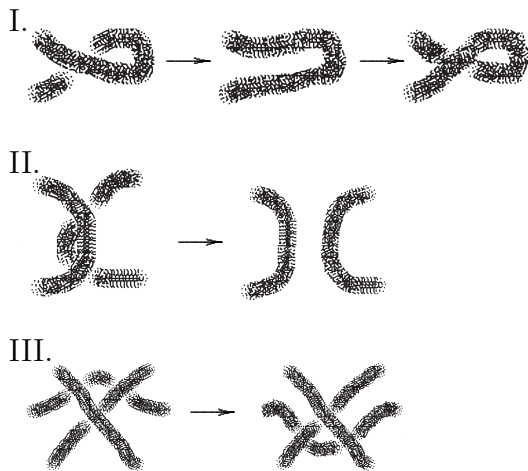
芮氏定理將關於結的拓樸問題歸結為以結的線圖 (diagram) 來處理。

有一個很有名的數學思維方法叫做“形式化 (formalism)”，將數學視為遵循特定規則的符號的遊戲，以線圖來處理的結理論，對這種形式化的想法做了很好的示範，在

形式化想法中一個特定的數學遊戲 (形式系統)(formal system), 自身就是數學家鑽研的對象, 每一個特殊的遊戲可看做一個座標系統, 展示其關鍵的面相, 我們可經由線圖的模型來考慮結。

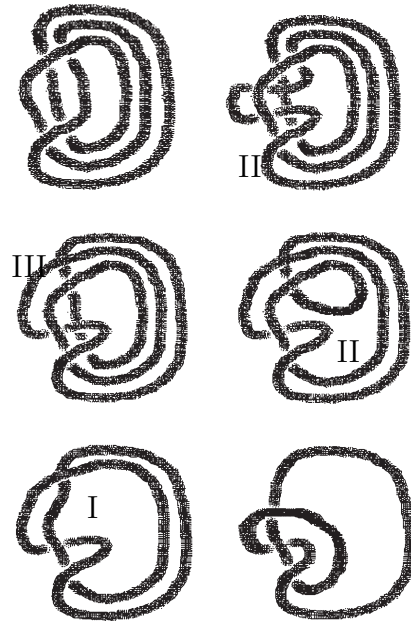
其他的模式 (如將結想成3度空間中特定的繩結) 在不同情況下也是一樣有用。我們將發現線圖之為用大矣, 可將我們由結導入其他的想法或領域, 然後又再回到拓樸。

圖四是三種芮氏形變。



圖四：三種芮氏形變

以上圖示所顯現的是大圖示中局部的改變, 圖五則展示三葉結的一種圖示如何經過一連串的芮氏形變而轉化為另一種圖示。在圖五中我們在第一步做了二次第二種 (芮氏) 形變, 第二步則是第二種和第三種形變的組合, 而且我們在最後一步還用了“零形變”, 即不改變跨越 (crossing) 樣式的拓樸重組。“零形變”和其他種形變同樣重要, 但因它不會改變線圖中真正的關係, 所以我們讓它隱身幕後。



圖五

結與類比電腦:

在結束本節之前, 我們再看一個圖 (圖六), 這次我們將帆繩結頭尾相連成一閉曲線。經過變形後發現封閉的帆繩結在拓樸上與二個相扣在一起的三葉結等價。變形的方法是用長的繩子打個帆繩結, 再把繩子二頭相連成閉曲線, 然後調整繩子直至現出二個扣在一起的三葉結。不過要注意的是將帆繩結二頭相連的方法並不唯一。圖六所示是其中一種方法, 在發現帆繩結與三葉結的關係後, 還要花點時間才能找到清楚的圖形, 顯示如何由帆繩結變化為雙扣的三葉結。我們可以很容易地將圖六中的變化分解為一串的芮氏形變, 如此則實際繩結的模式就像類比電腦般可以幫助我們發現一連串可能被忽略的變形。

實際的研究對象變成計算的輔助工具用來探究數學的內涵, 這樣的角色互置真是令

人好奇，當然實際上這是雙向的，結的數學模型與實際繩結的拓樸性質間的緊密相合是其關鍵。結就如整數般，就如我們相信數字遵循算術法則，繩結的拓樸性質也是遵循結的拓樸法則。



圖六

第三節：結與鏈結的不變量 — 第一關 (Invariants of knots or links)

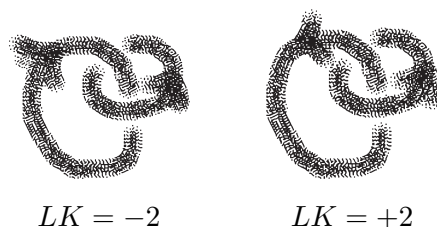
我們想由所給的鏈結線圖中計算出一些代數量，如多項式、數字等，不會隨著線圖在芮氏形變之下的變動而改易，如此的數字或多項式稱做這個線圖所代表的結或鏈結的不變量。如果我們製造出這樣的不變量，則我們就找到結或鏈結的拓樸訊息。最簡單的不變量的例子就是二條曲線的連結數 (Linking number)(或做扣數)，也就是計算一條曲

線繞過另一條曲線的次數，爲了計算這個數目，我們爲這些曲線定出方向，也就是說每一條線都加上一個方向的箭頭，在曲線因芮氏形變而變動時，我們時時留意箭頭的方向，如果 A, B 二曲線是由一個有方向的鏈結的二個組件 (components) 來表示，我們在每個跨越處給出如圖七所示 $+1$, 或 -1



圖七

的符號，所謂的連結數 $LK(A, B)$ ，就是 A, B 上所有跨越處符號的總和。自然，像圖八所示的二個相扣的單環，它們的連結數不是 $+2$ 就是 -2 。



圖八

我們可以證明連結數在芮氏形變下不變，也就是說如果我們用線圖 D 來表示 A, B 二曲線，用線圖 E 來表示 D 經芮氏形變後的鏈，則計算 D 與 E 所得的連結數將是一樣。第一種芮氏形變不會影響計算的結果，因爲單一曲線自身的跨越並不計算在連結數中，第二種形變或是製造或是摧毀二個符號相反

的跨越，而第三種則只不過是將圖形重組並不改變其符號。

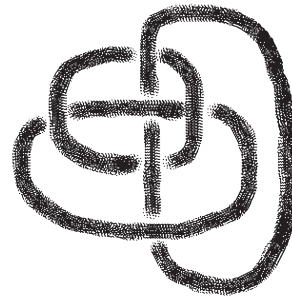
以上這些觀察事實上證明了二個相扣的單環確實是相“扣”的。不可能有任何一串的芮氏形變將它變形為二個分開的單環，因為分開的二個環其連結數為0，不是 +2 或 -2。看起來證明這麼明顯的事實似乎是小事一件，不過這卻是成功的運用代數拓樸來探討結與鏈結的第一步。連結數本身有悠久而有意思的歷史，有很多定義它的方法，其中有許多定義比定義為圖形中符號和複雜得多。我們將在本節來討論其中一些方法。

連結數最令人著迷處之一是它的侷限性。圖九的 Whitehead 鏈結，是有二個組件的鏈結，其連結數為0。Whitehead 鏈結確實是相扣的結（不同於分開的二個結），不過需要比“連結數”更為有效的方法來證明這個事實。



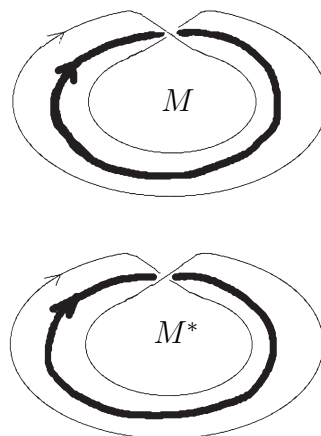
圖九: Whitehead 鏈結

另一個這類的例子是 Borromean(或做 Ballantine) 環，如圖十所示。這三個環在拓樸上是不可分的，但如果拿掉其中任一個，剩下的二個就可以分開。



圖十: Borromean 環

上面這些例子也許使你對連結數的前景略感悲觀，這裡有個運用連結數正面的例子，我們要利用連結數來證明 Möbius 帶與它的鏡中像拓樸不等價。Möbius帶是一條轉半圈的帶子，如圖十一示，它正是有名的只有一個面及一條邊的曲面。一個觀測者沿著曲面走，在帶子上走一圈，卻發現自己在原出發點的另一面，還要再走一圈才能回到原出發點，結論是這個曲面只有一邊（就像是世界的另一端與我們無限接近，只需鑽個洞即是，不過如果我們在地表旅行，卻要繞過整個地球才能到達。）



圖十一: Möbius 帶及其鏡中像

更令人吃驚的是，事實上只有二種 Möbius 帶，如圖十一所示，叫它們做 M , M^* ，取決於半扭的方向。用紙帶黏一個 Möbius 帶，試試看從其中之一變形到另一個，不能撕破，哈！不成的。(試試看!!)

我們如何了解 Möbius 帶 M 的單向的拓樸本質呢？如圖十一在 M 上，畫一條曲線 C ，比較 C 與 M 的邊界所成的曲線。二者定出平行的方向，計算此二曲線的連結數，其數為 $+2$ ，同理可計算 M^* 的相關連結數得 -2 。

如果 M 可拓樸變形到 M^* ，則相關的鏈結（即當中曲線與邊界所成的鏈結）拓樸等價，所以必有相同的連結數。既然事實不是如此，可知 M 不可變形到 M^* 。

上面我們證明了有二個拓樸不等價的 Möbius 帶，這二個 M -帶正是彼此鏡中的影像，當一件物體在拓樸上不等價於其鏡中像時，叫做 chiral。我們證明了 Möbius 帶的 chirality.

結的三著色

證明三葉結確實是“結”有一個出“色”的證法，證明如下：把三葉結的三個弧 (arc) 塗上三種不同的顏色，比方說紅、藍、紫。注意在標準的三葉結圖上每個跨越點附近都有三種顏色。

現在我們選擇下述的上色規則，“在著色的圖形上，任一跨越點附近不是三種顏色都有，就是只能有一種顏色。”

我們稱一個圖是“著色的”，如果它的弧照上述規則塗了顏色。沒有結的圖只須用單一顏色塗上即可。不見得所有“著色的”圖中

都有三個顏色，如果確有三色則稱為三著色圖。

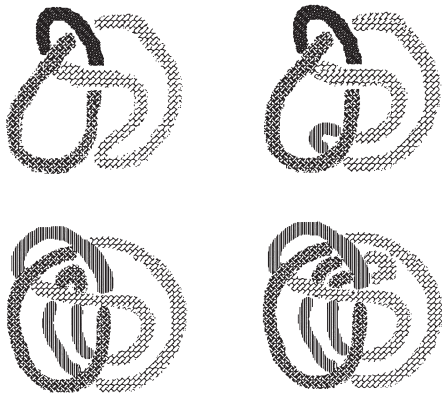


圖十二：三著色的三葉結

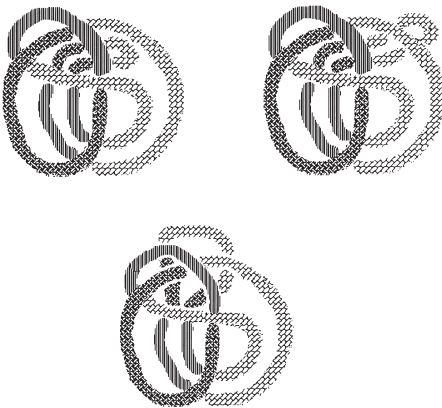
定理：每一種由標準三葉結線圖經芮氏形變所得的圖都是三著色的，所以三葉結線圖的確代表一個“結”。

與其寫下一個正式的證明，我們選擇以圖十三、十四來說明著色的過程。每做一次芮氏形變，總是可能將原有圖解上的著色延續到形變後的圖解。想要證明這行得通最好是自己試一試，圖十三、十四應該是個起頭。

我們注意到如果做第二種芮氏形變將跨越打開，雖然如此一來少了個顏色，但這個顏色一定在線圖中的另一處出現，不然的話這兩個弧在形變之下不可能有不同的顏色（因為結上一定有一條路徑連接這兩個弧）。如此不論芮氏形變使圖形簡化或複雜，圖形的三著色性質都是不變的。由於三葉結可以被“三著色”，則三葉結是確實打結的。原因是這樣的，如果三葉結可以經由芮氏形變逐步變化為不打結的圓（無跨越點的線圖），則每次變化時，其中的顏色的種類並不會改變，但到最後時，在無交叉點的標準圓之中，其顏色就只能有一種。這表示原本三葉結之中也只能是單一顏色。如此就與三葉結的三著色矛盾。



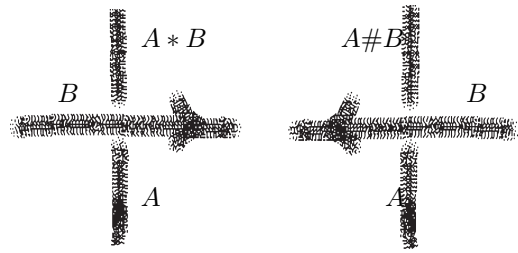
圖十三：三著色的三葉結在第二種芮氏形變下的變化



圖十四：著色的三葉結在第二、三種芮氏形變下的變化

Quandle 和結判別式

著色的論述可有廣泛的推衍。我們將線圖中的每個弧以標籤取代顏色，而著色法則則以結合這些標籤的乘法法則代替。如圖十五所示，我們看到標為 a 的下跨越弧結合標



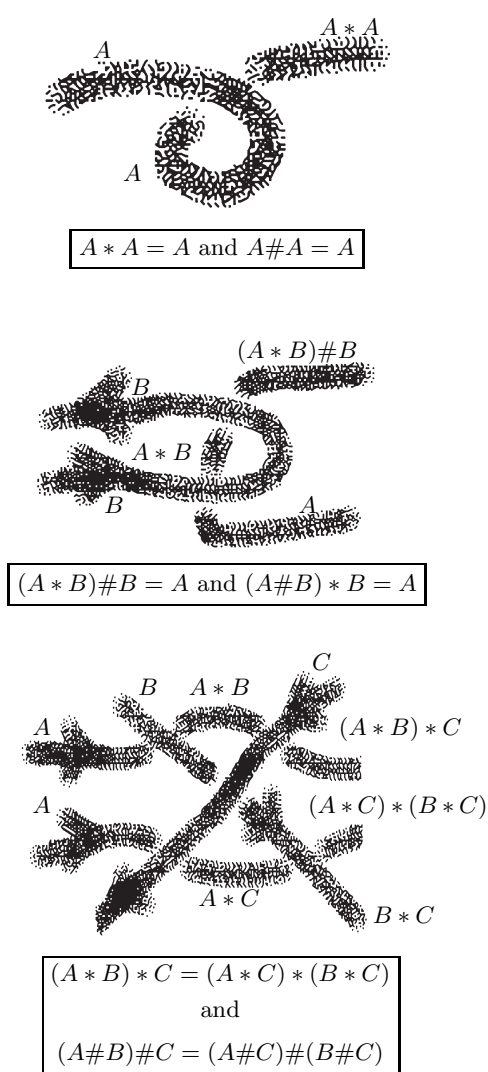
圖十五：Quandle 運算

為 b 的上跨越弧得到 $c = a * b$ 或 $c = a \# b$ ，二者的取捨決定於上弧的定向對於站在 a 弧面向上弧的觀測者是向左或向右。值得注意的是，在相交處只有從下跨越的線段才有二個不同的標籤，如圖十五若從上跨越的線段標籤是 b ，從下穿越線段的下半段標為 a ，則當 b 是向右時從下穿越線段的上半段給它 $a * b$ 的標籤，而當 b 是向左時則標為 $a \# b$ 。二元運算 $*$ 和 $\#$ 並不一定滿足結合律。舉例來說，在三葉結著色中，我們用紅 (R)、藍 (B)、紫 (P) 三色來上色，上述的乘法法則變成 $R * R = R, B * B = B, P * P = P, R * B = P, B * P = R, P * R = B$ 。因此 $R * (B * P) = R * R = R$ 而 $(P * B) * P = P * P = P$ ，二者不等。為了讓這些標籤能與芮氏形變相容，我們將要求這些運算滿足一些等式。在圖十六裡我以圖證明下列關於 $*$ 和 $\#$ 的代數規則，而滿足下述規則的代數系統稱為一個 quandle [6]。

1. 對所有 $a, a * a = a$ and $a \# a = a$
2. 對任意標籤 $a, b, (a * b) \# b = a$ 且 $(a \# b) * b = a$
3. 對任意標籤 $a, b, c, (a * b) * c = (a * c) * (b * c)$, 且 $(a \# b) \# c = (a \# c) \# (b \# c)$.

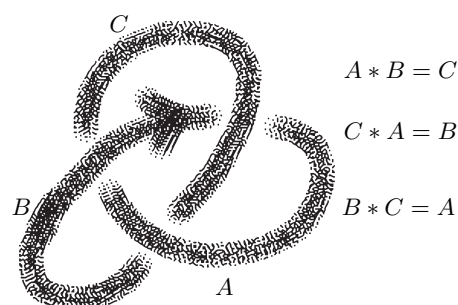
這些規則相對應於芮氏形變 1, 2, 3。

滿足這些規則的標籤可以用類似於三著色的方法處理。標記一個結的線圖，意味著此圖的任何經一連串芮氏形變而得的線圖都可遵循相同的標籤法則而得到標記。不過不是每一個標籤都會出現在相關的線圖上，而且對於每個著色的方式和每個特定的結，可能會有某些特定的限制。



圖十六: Quandle 等式

比方說，考慮對於數字，這樣的著色法則： $a * b = a \# b = 2b - a$ 。這個法則滿足上面 1, 2, 3 的要求，圖十七顯示在三葉結上這種著色必須滿足下述方程： $a * b = c, c * a = b, b * c = a$ ，所以 $2b - a = c, 2a - c = b, 2c - b = a$ ，假如 $a = 0, b = 1$ 則 $c = 2b - a = 2$ ，且 $a = 2c - b = 4 - 1 = 3$ ，我們需要 “ $3=0$ ”。所以若以 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 中元素做為標籤則可滿足這個方程組， $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 是以三為模的數系。



圖十七: 三葉結的方程組

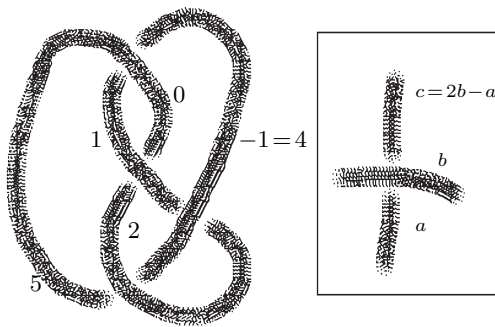
對於不熟悉模數系觀念的讀者，可以考慮一個標準的時鐘，上面有 1 到 12 的刻度，如果我們問 10 點過後 4 個小時是幾點？答案是 2 點，我們可以說時鐘的計算法則是 $10 + 4 = 2$ 。事實上，在這個計算中 $12 = 0$ ，因為加 12 個小時並不會改變鐘面上所顯示的時間。我們在鐘面計算中任意 12 的倍數都視為零，同理也可用乘法。現在時間的平方是 1 點，請問現在幾點？除了明顯的答案 1 之外，5, 7, 11 都是可能的答案，因為 5 的平方是 25，7 的平方是 49，11 的平方是 121，在鐘面計算下等同於 1，鐘面所代表的是以 12 為模的模數系

$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 。數學裡一個簡便的方法是將 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 想成 $\{0, 1, 2, \dots, 11\}$ 的集合, 因為 $0 = 12$, 這些數字代表了所有的鐘點。

一般而言我們可考慮以任意正整數 n 為模的模數系 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 它的元素是 $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, 其運作就像是 n 而非 12 的鐘面, 在這樣的系統裡我們說 $x = y \pmod{n}$ 如果 $x - y$ 可被 n 整除, 譬如 $49 = 1 \pmod{12}$ 因為 $49 - 1 = 48$ 可被 12 整除。

模數系 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 恰好可以再製三葉結的三著色, 而“3”正是與此結相關的方程組的特徵。事實上, “3”是此相關方程組的行列式值, 而其絕對值是此結的不變量, 詳見 [10, Part 1, Chapter 13]。

這裡有另一個例子, 8字結 E , 其模為 5, 這顯示了 E 確實是個“結”, 而且是異於三葉結的結, 我們可以循以下規則用五種顏色 0, 1, 2, 3, 4, 來著色 (或標記)8字結: $a * b = 2b - a \pmod{5}$, 見圖十八。



用以五為模的整數來標記8字結

圖十八: 五著色的8字結

注意我們只用了四種顏色。圖十八用了 0, 1, 2, 4。在 [12], 我們定結或鏈結 K 的著色數

(Coloring number) 為用 $2b - a$ 這種方式來著色 K 的“任意”線圖所需的最少 (而大於 1) 顏色數。一個很好的習作是證明 8 字結的著色數的確是 4, 一般而言結或鏈結的著色數並不容易決定, 這是拓樸不變量具有隱晦的組合性質的例子。

在本節中提到的其他的結或鏈結都可利用模數系的方法證明確實是結或鏈結, 讀者不妨試試 Borromean 環和 Whitehead 鏈結。

我們所列出的著色 (或標記) 法則可以描述成與此結相關的代數的公設。這被稱為 quandle [6] 並被推廣為晶體 (crystal) [10], interlock algebra [11], 和 rack [4], 而 quandle 本身則是結的餘集的基本群 (fundamental group) 的推廣 [3]。

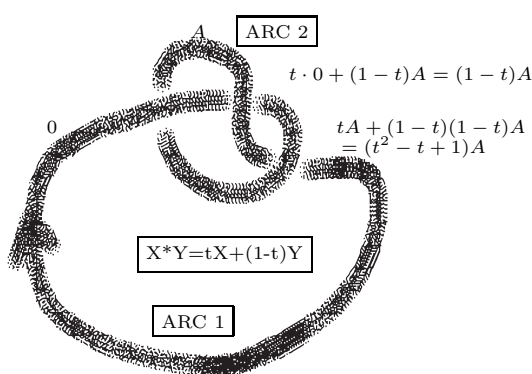
亞歷山大多項式 (The Alexander Polynomial)

模標記方式可以巧妙的推廣到結的亞歷山大多項式。這是通過推廣著色法則 $a * b$ 為 $ta + (1 - t)b$, 而 $a \# b = t^{-1}a + (1 - t^{-1})b$, t 為一不定元。

習作: 證明這個法則滿足成為 quandle 的公設, 這個代數結構被稱為亞歷山大模 (Alexander Module)。

當 $t = -1$, 得到上面已提到的 $2b - a$ 的法則。用任意的 t 來著色線圖, 則可得到一個推廣模 (modules) 的多項式, 這個多項式即為亞歷山大多項式。亞歷山大 [1] 在原作從不同的觀點算出這個多項式, 這段發展的歷

史饒富趣味, 詳見 [3], [5], [2], [7], [8], [9]。可由標記如圖十九所示的三葉結這個小小的實驗領略其間的關係。由於線圖本身封閉成環導出在模運算下必須滿足的關係, 像圖十九中我們如果將弧1標為0, 弧2標為A, 則導出 $t + (1-t)^2 A = 0$, 事實上, $t + (1-t)^2 = t^2 - t + 1$ 就是三葉結的亞歷山大多項式, 亞歷山大多項式是結的代數模數。



圖十九: 三葉結的亞歷山大多項式

參考文獻

1. J. W. Alexander, Topological invariants of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc., **30**(1928), 275-306.
2. J. H. Conway, An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties, 1970, Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, New York, 1970, 329-358.
3. R. H. Crowell and R. H. Fox, Introduction to Knot Theory, Blaisdell Pub. Co. (1963).
4. R. A. Fenn and C. P. Rourke, Racks and links in codimension two, J.

Knot Theory and Its Ramifications, **1**(4)(1992), 343-406.

5. R. H. Fox, A quick trip through knot theory, In Topology of 3-Manifolds and related topics, ed. by Fort Jr., Prentice Hall (1962), 120-167.
6. D. Joyce, A classifying invariant of knots, the knot quandle, J. Pure Appl. Algebra **23**(1982), 37-65.
7. L. H. Kauffman, The Conway polynomial, Topology, **20**(1980), 101-108.
8. L. H. Kauffman, Formal Knot theory, Lecture Notes No.30, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983.
9. L. H. Kauffman, On Knots, Annals of Mathematics Studies Number 115, Princeton University Press, 1987.
10. L. H. Kauffman, Knots and Physics, World Scientific Pub., 1993.
11. L. H. Kauffman, Knots Logic, In Knots and Applications, ed. by L. H. Kauffman World Scientific Pub. Co., 1994.
12. L. H. Kauffman and F. Harary, Knots and Graphs I. (in preparation).
13. K. Reidemeister, Knotentheorie, Chelsea Pub. Co. N. Y., Springer, Berlin, 1948.

(本文原是作者為 *Encyclopedia of Natural and Physical Science* 所寫)

—本文作者任教於美國伊利諾大學, 譯者為中央研究院數學所研究人員—

—(下期待續)—