結與結的不變量

楊樹文

前言:

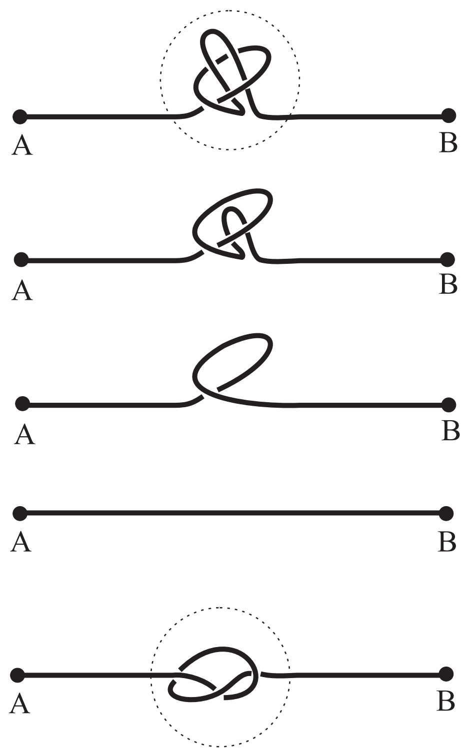
人類很早就會利用打結來處理各種生活上的問題, 然而結的數學理論卻只有百年的歷史。而且, 在這百年之中的絕大部分時間 (1900-1983), 幾乎都是以結的外空間的拓樸爲主要的研究方法。1984年之後, 結的不變量理論的蓬勃發展, 主要就是在結與結之間的關係獲得了突破性的進展。

第一章: 打結或不打結

一、結是什麼?

我們拿一條繩子打上一個結, 將繩子的兩端固定, 而讓中間打結的部分作局部的變動。如果這個結能因變動而消失, 那麼我們就說它是活結或說它是不打結。如果這個結並不會因爲局部性的變動而消失, 我們就說它是死結或說它打了結。

如右上圖中的第一個結, 可逐漸變動成平直的直線, 至於圖中的最後一個結, 如果只能在虛線的圓內作變動, 這個結是“解”不開的。



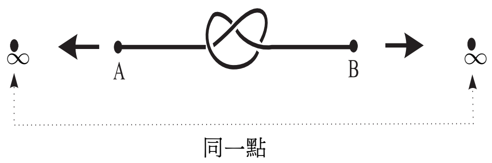
在上面的圖中, 用虛線畫出的圓在空間中其實是一個球。因此在虛線內所作的變動就是在球內的變動, 而球外的部分則保持不動。另外, 我們也要注意到, 繩子在變動時, 是不能破壞繩子的結構的。

現在, 我們從數學的觀點來看, 一條繩子是一個「細長的圓柱」(solid circular cylinder, $[0,1] \times D^2$) 到三維空間的嵌射 (embedding), 而繩子的變動就是嵌射的 isotopy。由於圓柱橫截面是一個小圓盤, 我們通常以繩子的中心線的嵌射 (即 $[0,1]$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的 embedding) 來取代整個圓柱的嵌射。

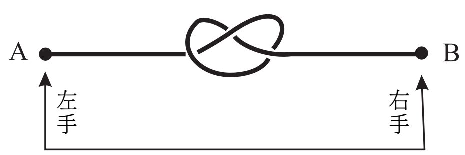
圓到空間的嵌射:

一般的論文或書本之中, 都把圓圈 (circle) 到三維空間嵌射叫做「結」, 這和繩子打結是一致的, 原因如下:

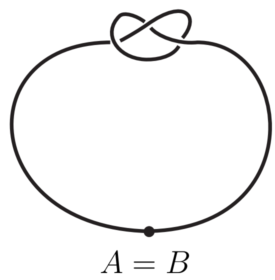
我們如果將繩結的端點 A 與 B, 分別地向左及向右無限延長, 最後在無窮遠點 ∞ 碰頭, 合起來就是一個圓。但是, 這個圓就變成嵌射在三維球 S^3 之中, 因爲我們已將 $\mathbb{R}^3$ 加入無窮遠點 ∞ 而形成一個緊緻空間了。



另一個想法, 是將繩子的兩端 A 與 B 分別由一個人的左手與右手代表, 如此, 左、右手及身體合起來代表額外的不打結的繩子, 再與原有的繩結就合併成圓圈的嵌射了。



簡而言之, 將 A 與 B 分別拉至遠處接起來, 普通的繩結就成了圓的繩結了。以後的部分, 提到的結就是指這種圓圈型的繩結, 亦即圓到三維空間的嵌射。



二、何時不打結?

如果一個圓的繩結, 不用剪斷再接的辦法, 就可以將它擺在平面上如同一圓, 我們說它是不打結的「圓繩結」。

同樣地, 一個圓繩結, 可不經破壞, 變動成另一個圓繩結, 我們就說這兩個結是等價的。意思是說, 這兩個結其實是沒什麼不同的。

通常要證明一個結是個「不打結」的結, 就是想辦法把它解開攤平在一個平面上 (如桌面) 即可。這是比較直接的工作。反過來, 如何才能知道一個結是確實打了結, 而無法被解開的。乍看之下, 這是一個極難的問題。我打不開這個結, 怎知他人也打不開呢? 今天我無法打開, 怎知明天也打不開呢?

或許你會覺得想要瞭解一個結是否打結就像要證明某人無法解答某個數學題目一樣難吧! 但是, 如果湊巧我們能證明這個題目是無解的, 那不就證明了任何人都無法解答它了。因此, 數學家處理這一類型的問題是反其道而行的。我們先不管那些個結是不等價的, 而先去瞭解當兩個結等價時, 它們會如何呢? 它們之間有什麼事情是必須相同的?

結的不變量:

由於數學講求精確性, 我們希望在“結”

之中找出某些量, 而這些量, 對於等價的結, 能給出相同的值。這樣的"量", 我們就叫它爲「不變量」(invariant)。意思是說, 當結作「非破壞性」的變動時, 所得的值是相同不會改變的。古典的作法, 是利用結以外的空間及其基本群 (fundamental group) 來取得不變量。

三、結的外部與結之群 (knot group)

(這一節所提到的結仍指圓型的繩結)

繩結是三度空間的子集, 繩結之外的部分就叫做結的外部。

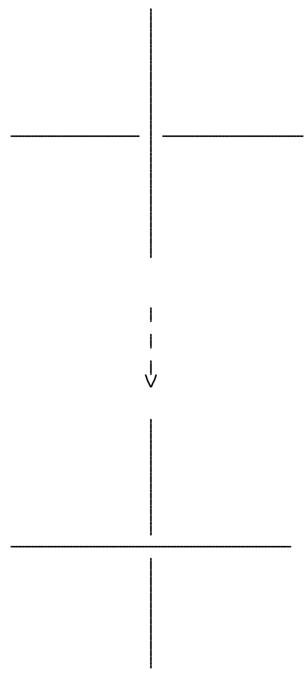
當繩結作「非破壞性」的變動時, 繩結的外部也受到擠壓, 但是未被撕破。因此, 結的外部也像橡皮一樣被扭曲變形, 但仍具有等價的拓樸空間。由此可知, 兩個等價的結, 它們的外部空間的基本群是相同的。(較嚴格的說法, 是同構的。) 這個結的外部的基本群顯然地能給我們很多的不變量, 因此把這個群叫做「結之群」(knot group)。

在 1920 年代, Alexander 研究這個「結之群」 的不可交換性從而得到有名的「Alexander 多項式」。它是結不變量之中的佼佼者, 一直到 1984 年, 另一個不變量「Jones 多項式」的出現才結束它獨一無二的地位。

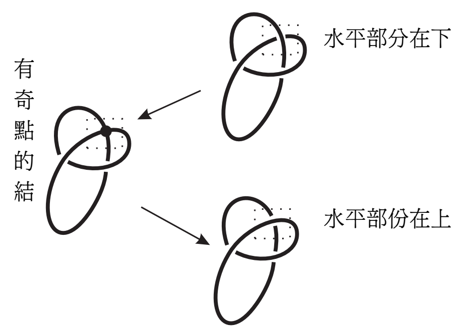
四、結與結之間的關係

結之變動:

一個結如何變動成另一個不等價的結? 在右上方的圖中, 一個水平與一個垂直的線段代表同一個結之中的兩部分, 其中水平的部分在下方。

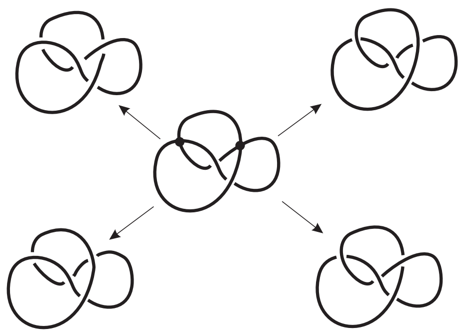


現在要將水平部分移到垂直部分的上方, 只有先剪斷水平的部分, 移到上方之後, 再接起來。如果不剪斷, 純粹就數學的觀點, 仍然可以進行。不過在變動的一瞬間, 水平與垂直兩部分是相交的。當發生相交時, 我們說結是有奇異點 (singularity 簡稱奇點), 這樣的結叫做有奇點的結。(注意: 有奇點的結其實並非結。)



註: 有關「結之群」與「Alexander 多項式」, 請參閱本期的其它文章。

因此有奇點的結就成了不同的結之間的聯絡站。如上圖, 有一個奇點的結可以聯絡兩個不同的結。如果有兩個奇點的話, 就可以聯絡四個不同的結了。

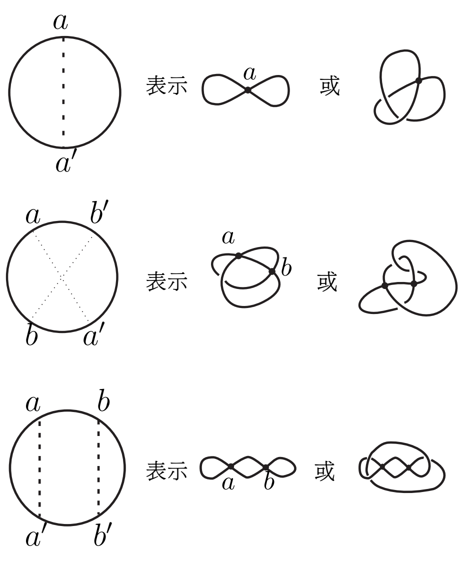


同樣地, 如果有 n 個奇點, 就可以聯繫 2^n 個不同的結了。有奇點的結其實比結還要複雜。

但是, 在1988年, 俄國的數學家 Vassiliev 使用「弦圖」(chord diagram) 來代表有奇點的結, 成功地化無限為有限, 化複雜為簡單。

Vassiliev 的構想就是把奇點的狀態畫在圓上面, 以一個虛線的弦表示。

例:

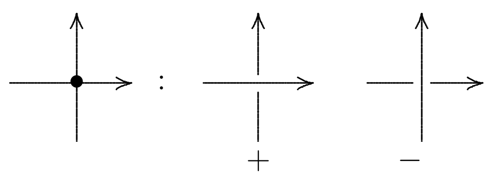


因此一個圓上有弦的「弦圖」其實是代表著一堆具有相同奇點狀態的「有奇點的結」。而 Vassiliev 就以這種弦圖創造出一個超越前人的偉大理論。

由 Vassiliev 的觀點, 弦圖的集合是隔開各種不等價的結的圍牆。用奇點的個數將弦圖分成不同的等級; 因此, 圍牆也隨著分成不同的等級。Vassiliev 的工作就是發現當數個同等級的圍牆如果恰好圍得沒有缺口, 就能對應一個「結的不變量」。後來被發現所有這樣由弦圖製造出的不變量, 可以用一個簡單的辦法來描述, 簡稱為「有限型態的結不變量」(invariant of finite type)。

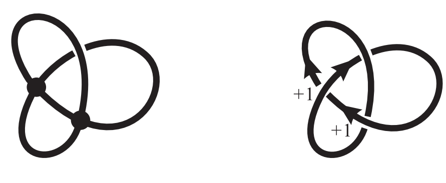
五、有限型態的不變量

一個 k 個奇點的結, 可以分別依上、下解開成 2^k 個不同的結。每一個奇點打開時可分 $+$ 與 $-$ 兩種, 如下圖:

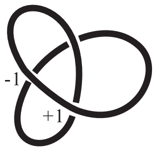


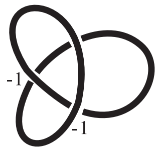
當 k 個奇點全部解開時, 就有 k 個符號。將這 k 個符號乘在一起, 這就是解開後的結與原來「有奇點的結」的「相關符號」。

例:



$S =$ ，$K_1 =$

$K_2 =$ 

，$K_3 =$ 

S 與 K_1, K_2, K_3 的相關符號分別是 $+1$, -1, $+1$。

假設 S 是一個有 k 個奇點的解, 而用 K_1, K_2, $\ldots$, K_{2^k} 表示解開 S 所有可能的 2^k 個結。用 $\epsilon(K_i, S)$ 表示 S 與 K_i 的相關符號。在有限型態的理論之中, 有一個基本的想法是要用這 2^k 個結乘以相關符號之後的和, $\sum_{i=1}^{2^k} \epsilon(K_i, S)K_i$, 來取代這個「有奇點的結」$S$。

另一個比較實際的講法是: 當我們有一個結不變量 v 時, 那麼我們也能賦予 S 一個值, 就是 $v^{(k)}(S) = \sum_{i=1}^{2^k} \epsilon(K_i, S)v(K_i)$。$v^{(k)}$ 表明是由 v 引出的對有 k 個奇點的結所應給的函數。當然, $v^{(k)}$ 也是「有奇點的結」的不變量。不過大家要注意到 S 在變動時, 在奇點的兩個切向量必須保持線性獨立。

我們現在就可以正式地說什麼是有限型態的不變量了。

如果 v 是一個結不變量, 而且 $v^{(n+1)} = 0$, 那麼 v 就是一個有限型態的結不變量, 它的等級小於或等於 n。

- 如果 $n = 0$, 則 v 的等級必定是0。
- 如果 $n = 1$, 則 v 的等級可能是0或1, 其他類推。

注意: $v^{(n+1)} = 0$, 就是說: 對任何有 $n+1$ 個奇點的結 S, $v^{(n+1)}(S) = 0$。

稍後, 我們將寫出一個等級為2的結不變量, 在此之前, 我們先看看 Vassiliev 如何用同調理論計算可能的有限型態的不變量。

第二章: 弦圖、非結空間的拓樸學

一、結空間與非結空間

結就是圓 (S^1)到三維空間 $(\mathbb{R}^3)$的嵌射 (embedding)。全部的嵌射的集合是函數空間 $\mathcal{F} = \{f : S^1 \to \mathbb{R}^3$, f 是一個可微分函數$\}$的子集。我們用 $\mathcal{K}$ 代表所有嵌射造成的空間, 即結空間。我們可以在函數空間 $\mathcal{F}$ 選用適當的「拓樸」(Topology), 而使得 $\mathcal{K}$ 成為 $\mathcal{F}$ 中的開放子空間 (open subspace)。

1990年, Vassiliev 的理論就是起始於這個包含關係:

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$$

由於$\mathcal{F}$ 是一個無窮維的向量空間, 它具有單純的拓樸性質。因此 $\mathcal{K}$ 的拓樸性質就可以透過 $\mathcal{F}$ 反應到 $\mathcal{K}$ 在 $\mathcal{F}$ 的外空間, 即 $\mathcal{F} - \mathcal{K}$。我們用 $\sum$ 表示 $\mathcal{F} - \mathcal{K}$, 那麼 $\sum$ 也就是非結空間, 其中包含有奇點的結。

針對「結空間」$\mathcal{K}$ 而言, 我們有興趣的是它的最低維的拓樸, 即0維的上同調群。透過 $\mathcal{F}$, 反應到「非結空間」$\sum$ 就是它的最高維的拓樸, 即最高維的同調群。但是 $\sum$ 是個無窮維的空間, 如何去瞭解它的最高維的同調群, 這就是 Vassiliev 的理論超越傳統之處。

Vassiliev理論的巧妙就是將 $\sum$ 看成函數空間 $\mathcal{F}$ 之中一組子向量空間 $\sum(t, t')$ 的聯集, 其中 t, t' 都是單位圓 S^1 之中的點。

$\sum(t,t')$ 的定義如下:

1. 當 $t \neq t'$, $\sum(t,t') = \{f : S^1 \to \mathbb{R}^3,\ f(t)=f(t')\}$
2. 當 $t = t'$, $\sum(t,t') = \{f : S^1 \to \mathbb{R}^3,\ f'(t)=0\}$

顯然地, 如果 $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$ 不落在任何 $\sum(t,t')$ 之中, 則 f 是一個嵌射。因此

$$\sum = \bigcup_{(t,t')\in S^1\times S^1} \sum(t,t')$$

雖然每一個 $\sum(t,t')$ 都是無窮維的向量空間, 但它們都與 $\mathcal{F}$ 相差3維, 也就是說, $\mathcal{F}/\sum(t,t')$ 是個3維的向量空間。另外, 由於 $\sum(t,t') = \sum(t',t)$, 實際上這些子空間 $\{\sum(t,t') : (t,t') \in S^1\times S^1\}$ 恰與這二維流形

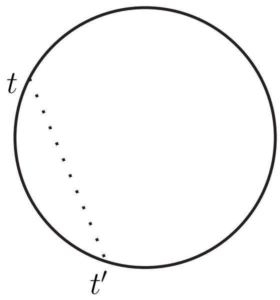
$$M = S^1\times S^1/(t,t')\sim(t',t)$$

成一一對應。而 M 就是大大有名的不可定向的曲面 Möbius 帶子。表面上看起來, $\sum(t,t')$ 與 $\mathcal{F}$ 差3維再加 M, $\sum$ 與 $\mathcal{F}$ 只差1維; 因此 $\sum$ 就能夠把 $\mathcal{K}$ 隔開成爲多個不等價的結。但是實際上的拓樸結構要比表面上看到的複雜許多。眞正的問題出在任何數個不同的 $\sum(t,t')$ 都是有共同交集的。

Möbius 帶子最有名的是: 它的邊界只是一個圓圈, 而 M 的邊界正好就是 $S^1\times S^1$ 的對角空間。

$$\partial M = \{(t,t) : t\in S^1\}.$$

M 之中邊界以外的點 $x = (t,t') = (t',t)$ 就是圓中的弦。



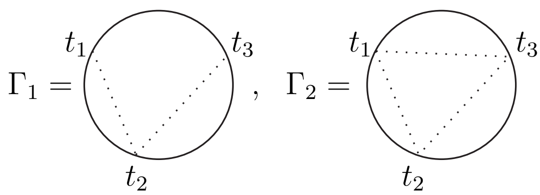
而這一根弦 $x = (t,t')$ 所代表的意義就是 $\mathcal{F}$ 的子向量空間 $\sum(x) = \sum(t,t')$。

如果 $\Gamma = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $x_i = (t_i, t'_i)$, 是一個有 k 根弦的弦圖, 那麼 Γ 所代表的意義就是 $\mathcal{F}$ 的子向量空間。

$$\sum(\Gamma) \overset{\text{def}}{=} \sum(x_1)\cap\sum(x_2)\cap\cdots\cap\sum(x_k),$$

它與原空間 $\mathcal{F}$ 相差的維數是3的倍數。這個相差的維數除以3就是弦圖 Γ 的等級。

例:



Γ_1 有二根弦 (t_1,t_2), (t_2,t_3)。Γ_2 有三根弦 (t_1,t_2), (t_1,t_3), (t_2,t_3)。$\sum(\Gamma_1) = \sum(\Gamma_2) = \{f : S^1 \to \mathbb{R}^3 : f(t_1) = f(t_2) = f(t_3)\}$, 它和 $\mathcal{F}$ 相差的維數是6, 因此 Γ_1 和 Γ_2 的等級是2。

二、$\sum$ 的最高同調群 (Homology group)

爲了便於描述, 我們可以假設 $\mathcal{F}$ 是一個維數很大的有限維向量空間, 就說是 m 維好

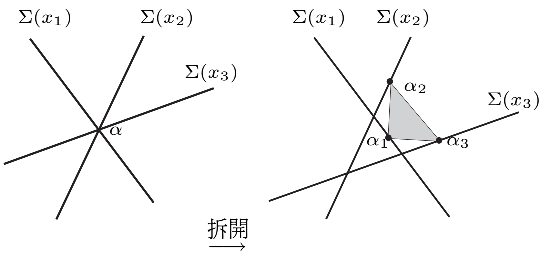
了。那麼, 如果 Γ 的等級是 n, $\sum(\Gamma)$ 就是 $m-3n$ 維的子向量空間了。再者, 我們希望能在一個緊緻的流形 (compact manifold) 之中討論拓樸結構, 就在 $\mathcal{F}$ 之外加進一無窮遠點, 那麼, $\mathcal{F}\cup\{\infty\}$ 就是 m 維的球。因此

$$H^{\circ}\Big(\mathcal{K}\Big) \approx H_{m-1}\big(\sum\cup\{\infty\}\Big)$$

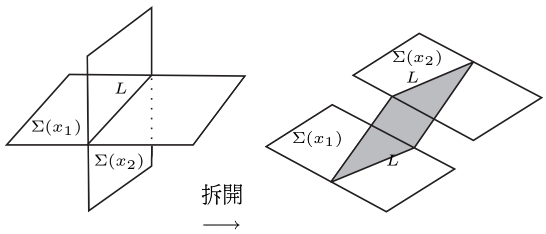
這就是我們所要的最高維的同調群。

三、拆開 $\sum(x)$

如果這些向量空間 $\sum(x)$, $x\in M$, 之間並無交集, 那麼 $\sum$ 的結構就變得容易計算。事實上, $\sum(x)$ 之間有交集, 我們還是可以將他們拆開, 然後在原先相交的點, 此刻被視爲兩點, 用一線段連接這兩點。因此一個點被一線段取代, 這在同倫理論的觀點是沒有差別的。這有點像是: 兩根木條用強力膠黏成十字, 膠未乾時, 就將他們分開, 結果本來集中在一點的強力膠就被拉成一條線。如果有三個木條, 各取一點, 用膠黏在一起, 拉開時, 膠會形成一個三角形。依此類推, 若 $\sum(x_1)$, $\sum(x_2)$, $\sum(x_3)$, $\sum(x_4)$ 四個向量空間有一共同點 α, 當分開時, 成爲四點 α_1, α_2, α_3, α_4 分別在 $\sum(x_1)$, $\sum(x_2)$, $\sum(x_3)$, $\sum(x_4)$ 之中。如果四點之中有「膠水」, 就會產生一個四面體以 α_1, α_2, α_3, α_4 爲其頂點。



在把一點 α 拆爲四點 α_1, α_2, α_3, α_4 之時, 我同時也看到 α 被拆爲 α_1, α_2, α_3, 或 α 被拆爲 α_2, α_4, 等等。因此, 在 α_1, α_2, α_3 之間就有個三角形, α_2, α_4 之間就有一線段, 而這些較低維的東西其實都可以在四面體之間看到, 如上圖之中, 三角形與三個邊 $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_2\alpha_3$ 之間的關係。另外, 要注意的, 當這個 α 連續變動時, 那麼由 α 拆開的這些線段、三角形等等也是隨 α 而連續變動的。譬如, 想像 $\sum(x_1)$ 與 $\sum(x_2)$ 是三維空間的兩個平面交於一直線 L, 當拆開 $\sum(x_1)$ 與 $\sum(x_2)$ 之時, L 中的每一點都變成一線段, 那麼整個 L 也就變成一個面了。



四、層次分明的空間

$\mathcal{F}$ 的子空間 $\sum$ 經過拆解之後, 表面上變得極其複雜, 但也變得層次分明。

將 $\sum(x)$ 分離後產生的空間 Ω_1 屬於第一層次。這一部分是 $\sum$ 原本有的東西, 只是原來的一點現在被看成好幾個點。不過 Ω_1 就整體而言, 只是一棟大樓的鋼架結構, 其他的部分就必須架在 Ω_1 之上。

現在接著來看如何在 Ω_1 之上架上其他部分。假設 $\sum(x_1)$, $\sum(x_2)$, $\ldots$, $\sum(x_k)$ 有一共同點 α, 現在在 Ω_1 之中被拆成 α_1, α_2, $\ldots$, α_k, $\alpha_i\in\sum(x_i)$。那麼, 我們就在 α_1,

$\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ 這些點上面架上一個 $(k-1)$-維的單形錐 (simplex)。這個單形錐只碰到 Ω_1 這 k 個點 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$。由於這個單形錐是和 α 以及 $\Gamma = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ 相關 (α 落在 $\sum(\Gamma)$之中), 因此就把這個單形錐命名爲 $\Delta(\alpha, \Gamma)$。將所有 $\alpha \in \sum(\Gamma)$ 得到的單形錐合起來, $\cup_{\alpha\in\Sigma(\Gamma)}\Delta(\alpha, \Gamma)$ 的結構就像 $\Delta(\alpha, \Gamma) \times \sum(\Gamma)$。

第二層次的空間 Ω_2 是什麼?

就是從主結構 Ω_1 之上架上去所有等級 2的弦圖 Γ 得到的單形錐 $\Delta(\alpha, \Gamma)$, $\alpha \in \sum(\Gamma)$。

依此類推, 第 n 個層次的空間 Ω_n 就是在 Ω_1 上面架上去所有等級 $\leq n$ 的弦圖 Γ 得到的單形錐 $\Delta(\alpha, \Gamma)$, $\alpha \in \sum(\Gamma)$。注意: 如果 $\Gamma = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ 是個等級 n 的弦圖, 則 $k \geq n$; 因此單維錐至少 $(n-1)$-維。所以, 這些空間有越來越大的包含關係:

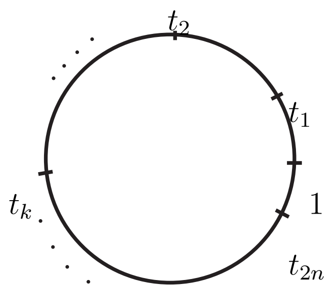
$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_n \subset \cdots$$

全部的 Ω_n 合起來就是 Ω。我們把 Ω 叫做 $\sum$ 的「解」。$\sum$ 是一個糾纏不淸的空間, 將 $\sum$ 拆解開來而得到 Ω。

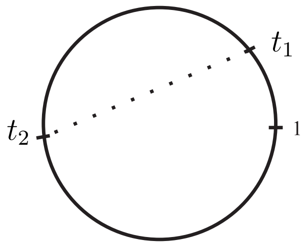
我們仍須在這些空間 Ω_n 上面加上無窮遠點 ∞, 那麼每個 $\Omega_n \cup \{\infty\}$ 都是緊緻空間, 但 $\Omega \cup \{\infty\}$ 並非緊緻空間。而我們眞正有興趣的是這個同調群 $H_{m-1}(\Omega \cup \{\infty\})$。從同調群來看, 它就是 $\varinjlim_{n} H_{m-1}(\Omega_n \cup \{\infty\})$, 意思是說, 只要逐步瞭解 $H_{m-1}(\Omega_n \cup \{\infty\})$ 就可以了。另外, 我們也可以利用層次的結構, 先瞭解 $G_n = H_{m-1}(\Omega_n \cup \{\infty\}, \Omega_{n-1} \cup \{\infty\}), n = 1, 2, 3, \ldots$ 運氣好的話, 這些群 G_n 合起來 $\oplus_n G_n$ 就是原來的 $H_{m-1}(\Omega \cup \{\infty\})$。運氣不好, 我們也可透過這些群 G_n, 再設法去得到 $H_{m-1}(\Omega \cup \{\infty\})$。Vassiliev 的主要工作就是在弦圖之中找到一個自然的幾何結構, 而 G_n 就是「等級n」的弦圖在這個結構下的同調群。

五、弦圖的幾何與群 G_n

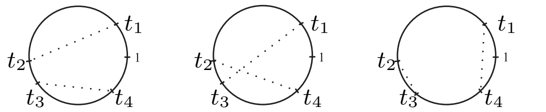
Ω_n 中的主要角色就是等級 $\leq n$ 的弦圖 Γ, $G_n = H_{m-1}(\Omega_n \cup \{\infty\}, \Omega_{n-1} \cup \{\infty\})$ 就是忽略等級 $\leq n-1$ 的弦圖。因此 G_n 的計算就是要用到這些等級 n 的弦圖, 而其中最重要的部份就是有 n 根弦的弦圖。當 n 根弦的端點完全不同時就等於在圓上選擇 $2n$ 個點。如果固定一個弦圖在討論時, $2n$ 點的秩序是不能隨意調換的。爲了方便起見就從單位圓上的 1 延著逆時針方向取名 t_1, t_2, $\ldots$, 一直到 t_{2n}。



例: 等級 1 的弦圖

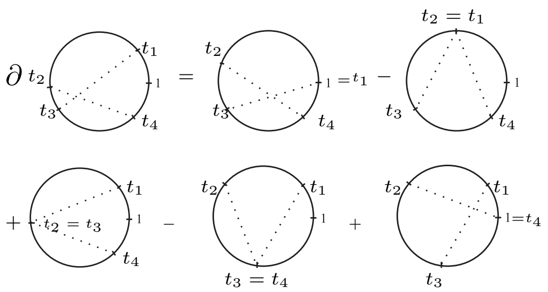


等級2的弦圖有三種不同形態:

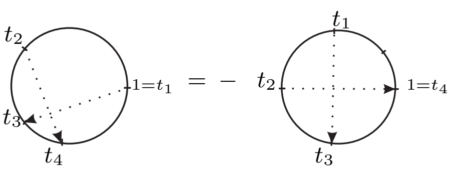


從實例中可以看出, 當 t_i 略作移動時, 雖是不同的弦圖但是形態是一樣的。而把同樣形態的弦圖放在一起恰好構成一個 $2n$ 維的單形錐 (simplex), 其邊界也如同單形錐一樣有 $2n+1$ 個不同形態的弦圖。如此一來, 弦圖同調理論的主要架構就出現了。

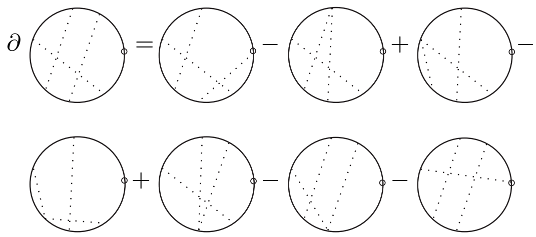
例:

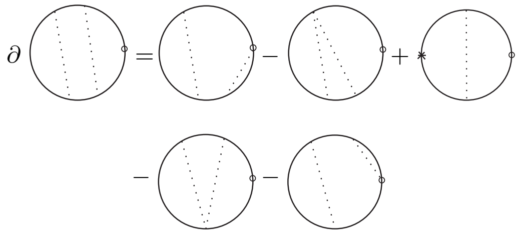


經過仔細的瞭解, 其實這些弦是須要有方向性的。如果一開始取爲 $t_1 \to t_3$, $t_2 \to t_4$, 那麼它的邊界中的第一個和第五個弦圖則因爲弦的方向相反而差一負號。故這二個邊界恰好互相抵消。



同樣的, 我們也可以取得如下的邊界式子:



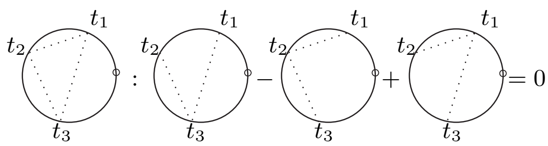


注意: 以上二個式子之中的最後一個邊界圖都是由於方向的關係而導致符號是負的。

另外, 在邊界圖中 (參考上圖中有星號者), 有一星號, 這來自原圖中的一根弦自縮而得。而星號是代表在該點的微分爲0。(回憶: $\sum(t,t) = \{f : S^1 \to \mathbb{R}^3 : f'(t) = 0\}$)

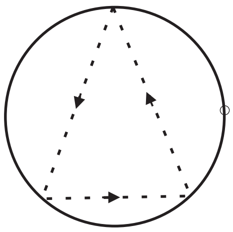
我們一開始只想討論的弦圖是有 n 根弦具有 $2n$ 個不同的端點, 而且都不是1, 這種弦圖我們叫它們爲簡單弦圖。那麼其它的複雜弦圖是否就可以避掉呢? 這也是 Vassiliev 一個重要的發現。我們確實可以忽略其他的複雜的弦圖, 只要考慮下列的三角形關係即可:

三角形的關係:



當 (t_1, t_2), (t_1, t_3), (t_2, t_3) 三根弦同時出現在某弦圖之中時, 將這個弦圖分別去掉這三

根弦中的一根而得到三個弦圖, 則這三個弦圖之和爲0。不過上面的敍述要注意到這三根弦的方向必須是繞著三角形走的才可以。

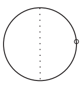
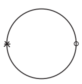


那麼, 由以上的簡單弦圖的邊界計算以及三角關係, 我們就能清楚地說明 G_n 是什麼了。

G_n 就是所有由簡單弦圖組合起來, 而其邊界在三角形關係之下爲0的。

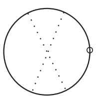
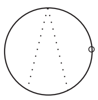
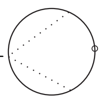
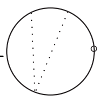
底下, 對於 $n = 1, 2, 3,$ 的情形略作討論:

(1) $G_1 =?$

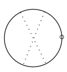
由於 ∂  $=$ 

不爲0, 故 G_1 之內沒有有趣的東西, 只有0元素。

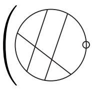
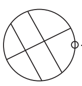
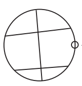
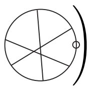
(2) $G_2 =?$

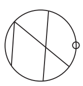
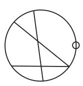
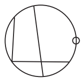
∂  $= -$  $+$  $-$ 

$= 0$ (三角形關形)

故 $G_2 =<$  $>$

(3) $G_3 =?$

$\partial \Big($  $+$  $+$  $+2$  $\Big) = 0$

在計算之中會用到  $+$  $-$  $= 0, \ldots$ 等等之三角形關係。

因此 G_3 也和 G_2 一樣只有一個生成元。

同樣的辦法使用其他等級的弦圖, 可算出其他 G_n。如此算是解決了 $H_{m-1}(\Omega_n \cup \{\infty\}, \Omega_{n-1} \cup \{\infty\})$ 之中的同調類的問題了。但是由這些同調類是否能取得 $\Omega_n \cup \{\infty\}$, 甚或 $\Omega \cup \{\infty\}$ 之中的同調類呢? 縱使這個問題解決了, 我們又如何從 $\Omega \cup \{\infty\}$ 的同調類去確實定義出結的不變量呢?

這兩個大問題卻很快地被 Kontsevich 一下子解決掉了。Kontsevich 的辦法就是對弦作積分, 而得到結空間的函數, 而這些函數的計算又回到類似 Vassiliev 計算弦圖邊界的方法, 這些事情將在下一章講到。

第三章: 結空間的函數

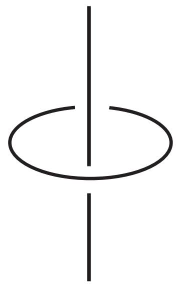
所有 S^1 到 $\mathbb{R}^3$ 的嵌射 (embedding) 形成了結空間 $\mathcal{K}$。本章將討論如何有系統的製造出結空間的函數。不過, 在此之前要先介紹高斯的扣數與積分的關係。

一、高斯的扣數

一百多年前, 高斯爲瞭解兩個圓環互相糾纏的情形定出一個整數, 叫做「扣數 (linking number)」(亦可做連結數)。

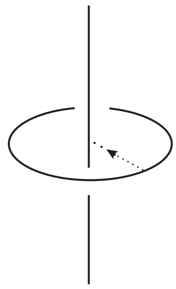
底下, 我們來看這樣一個狀況:

空間中有一根直線形的長柱及一圓環圍繞著柱子。圓環若要遠離柱子必然得穿越柱子 , 因此柱子與圓環之一就必須被破壞。如果我們不要破壞圓環及柱子, 一定就會有某些量是不變的。



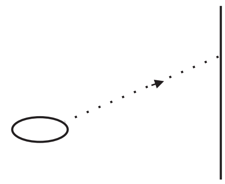
「弦」的積分:

在圓環取一點及在柱子上取一點, 在兩點之間連一根弦, 並給它一個方向, 由環中的點到柱子上的點。很湊巧的, 所有這樣的弦恰好蓋住了所有 $\mathbb{R}^3$ 中南北極以外的各個方向。



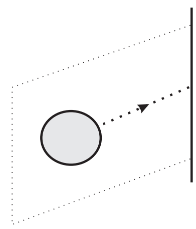
我們用單位球 S^2 代表 $\mathbb{R}^3$ 中所有不同方向的集合。因此對於所有環到柱子的弦, 我們就利用它們的方向所能蓋到球的面積, 得到了一個量。當然目前的情形所得的值恰是球的面積 4π (南北極雖未蓋到, 但並不影響其面積)。這可以說是利用弦的方向變化在弦的集合之上的一種積分, 要簡稱爲「弦的方向積分」或「弦積分」均可。

我們再來看另一種情形, 如下圖中, 圓環並未扣住柱子, 此時弦的方向都在球的東側。

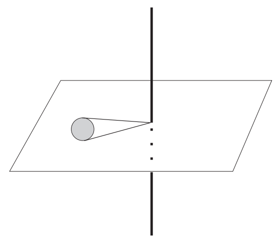


可以再細分成幾種情形討論:

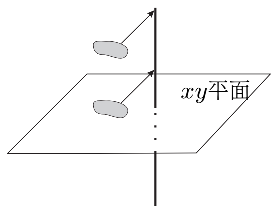
(1) 圓環所在平面包含柱子。這種情形, 弦的方向都是在同一條經線上, 因此蓋到的球面積爲0, 也就是弦積分等於0。



(2) 圓環所在的平面垂直於柱子。這種情形, 弦的方向僅涵蓋部分的經線, 而且被蓋到的經線都被蓋了兩次。若仔細計算, 會發現兩次的面積恰好相消掉, 因此積分也是0。



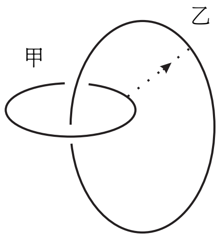
(3) 圓環並不在一個平面上。爲了方便說明, 可以假設柱子的直線是在z-軸上, 並且把圓環垂直投影到 (x, y) 平面上。我們發現投影的圓環取得的弦與原來的圓環的弦, 其方向並無不同, 作弦積分的值也就相同了。因此這就回到 (2) 的情形, 因此弦積分也是0。



如果我們將弦積分的值除以 4π, 則以上的情形弦積分的值都是整數, 1或0, 那麼這就是環與柱子的扣數的定義了。

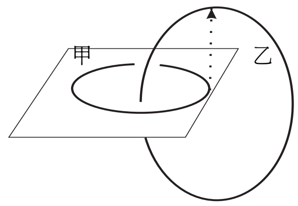
二、圓環之間的扣數

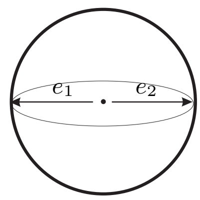
現在回到兩個圓環相扣的情形。如下圖中, 有甲、乙二個環。



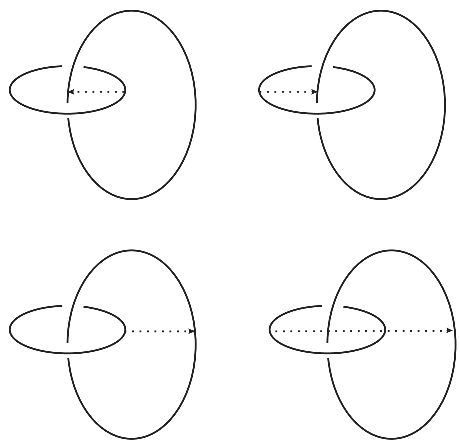
我們取所有從甲環出發到乙環的有方向的弦, 並看看這樣的弦, 它們的方向能蓋住球面多少面積。所得的面積值除以 4π 就是弦積分之值。這個值也必定是個整數, 原因如下: 所有弦的集合正是甲環和乙環的乘積, 也就是 $S^1\times S^1$。由弦對到方向就給出了一自然的映射從 $S^1\times S^1$ 到 S^2。此時, $S^1\times S^1$ 和 S^2 都是緊緻的無邊界的流形, 因此映射蓋到的面積必是 S^2 的面積的整倍數, 這個倍數正是映射蓋的次數。而且, 在每一 S^2 的點被蓋到的次數都是一樣的, 因此這個數也就可以在任何一個 S^2 上的點給計算出來。

現在我們來算算有兩環相扣的情形, 究竟弦的方向蓋在球 S^2 之上的次數是多少? 爲了方便可以假設甲環在 xy 平面上, 而乙環在 yz 平面上, 那麼由甲環到乙環的弦當方向向著北極就只有一點。





如果在 S^2 上取 $e_1=(0,-1,0)$ 與 $e_2=(0,1,0)$, 即 e_1 向西, e_2 向東。我們發現弦向著西的就只有一個, 但是向著東的弦卻有三個。

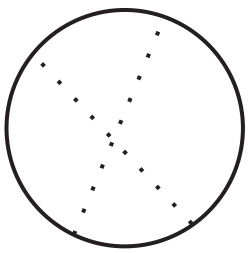


經仔細計算, 其實向東的三個弦, 依其符號有兩個是互消的, 其實正確答案還是1。這些例子, 大家可以看到, 雖然理論是利用弦的方向去做弦積分, 但實際上, 這些結果都是可以「看得到」的。

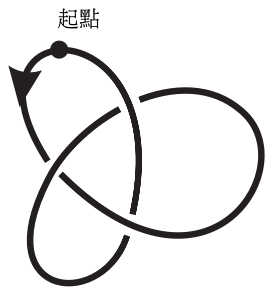
三、弦積分與自我糾纏

高斯在研究扣數之時, 用到在「弦」上的積分, 很顯然, Vassiliev 理論中, 二個弦或多個弦的情形, 弦的積分也是可行的。前面, 單弦的積分是用在兩圓環之間的互相糾纏, 現在我們將弦積分推廣到二根弦的情形, 想要處理在「結」之中自我糾纏的狀況。

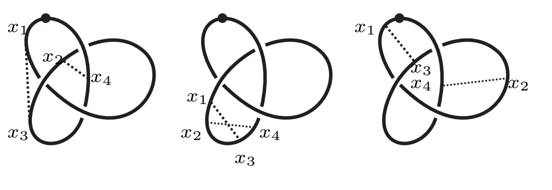
由第二章的弦圖理論, 我們已經知道在等級2的弦圖之中有一個同調類 (如下圖), 將它稱 X 弦圖。



假設 K 是一個結, 如下圖, 有一個起點



及一個方向。把所有 K 上面的 X 弦圖都抓出來, 用 $C(X)$ 代表所有 X 弦圖所成的集合。底下是 K 中幾個 X 弦圖的例子:



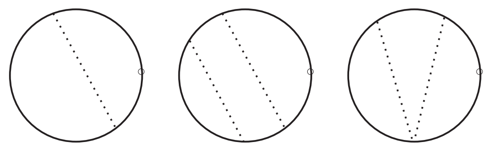
表面上這三個「二根弦」的弦圖差異很大, 但仔細看一下 x_1, x_2, x_3, x_4 都是照著秩序的, 的確是 X 弦圖。因此, $C(X)$ 其實就是

$$\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in K\times K\times K\times K:\ \text{只要}\ x_1,x_2,x_3,x_4\ \text{在}K\text{上是依著}K\text{的方向從起點排過來即可}\}$$

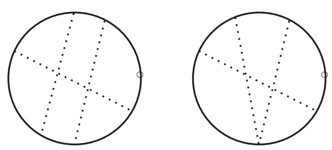
而 (x_1,x_2,x_3,x_4) 所對應到弦的方向即是

$$\left(\frac{x_3-x_1}{|x_3-x_1|},\frac{x_4-x_2}{|x_4-x_2|}\right),$$

那麼弦積分就是要求出這二個方向在 $S^2\times S^2$ 之中所蓋到的4維體積。不過, 爲了能有比較整齊的結果, 我們將這個4維體積除以 $(4\pi)^2$。因此從每一個結K都可做如上的「弦積分」而取得一個值, 如此就得到了一個結空間的函數, 取名 $\omega(X)$。當然, 每一個弦圖 Γ, 都能相對地取得 $\omega(\Gamma)$, 譬如下圖等等。



(1)　　(2)　　(3)



(4)　　(5)

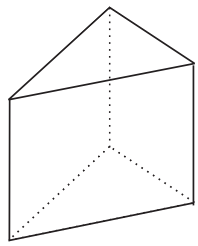
但如第 (3) 與第 (5), 其弦積分得到並非函數, 而是第1階的微分形式。(函數屬第0階)

四、結空間的函數微分

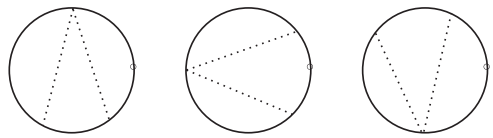
爲了想要瞭解這些結空間的函數 $\omega(\Gamma)$ 是否爲結不變量, 我們必須看看它們的微分

是什麼? 經過計算之後將會發現 $\omega(X)$ 的微分與 $C(X)$ 的邊界相關, 進一步我們也可以知道如何補救 $\omega(X)$ 來得到結不變量。

$\mathcal{K}$ 雖然是個無窮維的空間, 我們仍然可以把它當作有限維的可微流形考慮其上的函數並作微分。為了讓微分表現得具體些, 我們對某個結 K 作連續的變動, 即 K_s, $0 \leq s \leq 1$, $K_0 = K$。在變動之中, 這些結 K_s 都是和 K 等價的。用函數來寫, 就是 $F : S^1 \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, 當 s 固定時, $0 \leq s \leq 1$, $f_s(x) = F(x,s)$ 都是嵌射 (當然 K_s 就是 f_s)。現在 X 弦圖可在每一個 K_s 得到弦積分之值, 而我們想要知道 K_0 與 K_1 二個結所取得的值的差異。由於每一 K_s 都擁有不同的 $C(X)$, 就用 $C(X,s)$ 或 $C(X,K_s)$ 表明它們的不同, 全部合起來 $\cup_s C(X,s)$ 用 $C(X,F)$ 表示。$C(X,F)$ 的拓樸結構與 $C(X)\times[0,1]$ 無異。由於 $C(X)$ 到 $S^2 \times S^2$ 的映射是個自然映射, 它就自動地變成 $C(X,F)$ 到 $S^2 \times S^2$ 的可微映射。$C(X,F)$ 是個5維的流形, 它的邊界就是一個封閉的4維流形, 正好與 $S^2 \times S^2$ 的維數相同; 在這種情形下, $C(X,F)$ 的邊界蓋住 $S^2 \times S^2$ 的次數必定是0次。也就是說, 在所有 $C(X,F)$ 的邊界作弦積分, 它們的值適當的加起來等於0。要眞正瞭解這一句話的意義, 就必須仔細去看看 $C(X,F)$ 的邊界有那些部分了。剛剛, 我們提到 $C(X,F)$ 其實就像 $C(X)\times[0,1]$ 。譬如, 我們把 $C(X)$ 想成一個三角形, 那麼 $C(X)\times[0,1]$ 就像個三角形的柱子。這個三角柱的邊界主要有三部分, 上底、下底以及側面, 側面又分成三個平面。



回到 $C(X,\ F)$, 上、下底其實就是 $C(X,$ $K_0)$ 與 $C(X,\ K_1)$。邊界弦積分總和為0, 就是說, X 弦圖在 K_0 與 K_1 二結的弦積分之差就等於「三角柱體」的側面之「弦積分」。而這些側面其實來自 $C(X)$ 的邊界, 如第二章中所言, 也就是下面三個弦圖:



由於這幾個弦圖像 V 字型, 我們就依序叫它們 V_1, V_2, V_3, 或含糊地說是 V 弦圖。V 弦圖的端點只有三個, 因此 $C(V_1)$, $C(V_2)$, $C(V_3)$ 都是三維流形, 並不足以蓋住 $S^2\times S^2$ "有效"的4維體積。但是當結在變動, 考慮整個 $C(V_1,F)$, $C(V_2,F)$, $C(V_3,F)$, 反而湊足了4維, 正好可以得到「弦積分」之值。而且在這些集合 $\bigcup_{i=1}^{3} C(V_i,F)$ 的弦積分正是 $\omega(X)$ 在 K_0 與 K_1 的差異。如果 $C(X)$ 原本沒有邊界, 那麼我們就可認定 $\omega(X)$ 是個結不變量。但是眞實的狀況是 $C(X)$ 有三個邊界 $C(V_1)$, $C(V_2)$, $C(V_3)$, 那我們就無法認定 $\omega(X)$ 在 K_0 與 K_1 之值會相等。如果想要清楚地理解這些差異, 那我們就得確定這些 V 弦圖的地位究竟是什麼。

$F: S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 代表結的變化, 它也可以看成結空間的一條曲線。V 弦圖在結空間的曲線上的弦積分, 其實可看成是一個線積分。那麼, V 弦圖就應該被看成是第一階的微分形式 (1-form), 而記成 $\omega(V_1)$, $\omega(V_2)$, $\omega(V_3)$, 而上面的結果, 就可寫成如下的定理。

定理: $d\omega(X) = \omega(V_1) - \omega(V_2) + \omega(V_3)$。

定理的結果與弦圖同調理論之中"$\partial X = V_1 - V_2 + V_3$"是一致的。

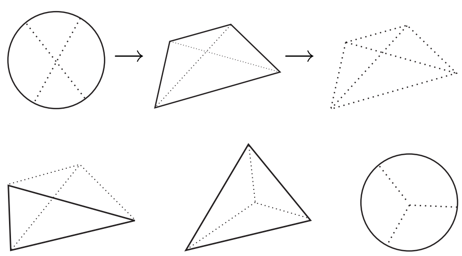
五、三叉圖與三角形關係

回憶第二章之中, X 弦圖之所以是一個同調類, 是因爲"省略"的複雜弦圖提供了三角形關係。本章的結空間函數之中,「三叉圖」也能提供三角形關係, 適切地將 X 弦圖補成結不變量。

三叉圖:

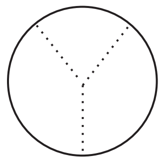
通常把點和線段組成的幾何形體叫做「圖」, 而三叉圖就是一個圖, 其中每一個頂點都恰有三個線段接到這一點。仔細看, 弦圖也可算是三叉圖, 只要將圓弧也看成線段。

底下, 我們看看如何將 X 弦圖變化成另一個三叉圖, Y 圖:

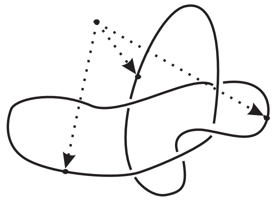


$\rightarrow$ $\rightarrow$ $\rightarrow$

首先將 X 弦圖中的圓畫成四邊形, 整體看起來就是四頂點、六個邊的圖, 再選擇其中一個三角形當做圓。最後轉換爲虛線部分像 Y 字型的圖, 叫做 Y 圖。

Y圖: 

Y 圖有三個頂點在圓上, 而有一個頂點在圓之外。現在看一個結K上面的 Y 圖, 當然, 如同 X 弦圖, Y 圖中, 圓上的三個點反應在結上面, 就是 K 上面三個點, 而圓外的一點, 就是 K 外面的一個點, 也就是任何 $\mathbb{R}^3 - K$ 的點都是有可能的。因此, 就結 K 而言, $C(Y)$ 的可能共有6維 (K 上之三點: 3維, K 外之點: 3維)。但是現在 Y 圖之中虛線代表的弦有三個, 方向的表現是在 $S^2 \times S^2 \times S^2$ 上面, 也是6維的空間, 因此, 我們仍然可以考慮 $C(Y)$ 的三個弦的方向所蓋到的6維體積, 仍舊除以 $(4\pi)^3$, 是爲弦積分。

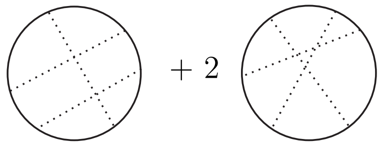


如此, 由 Y 圖, 也得到一個結空間的函數叫做 $\omega(Y)$, 它恰好能代表三角形關係。因爲它的外微分

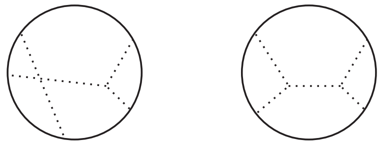
$$d\omega(Y) = \omega(V_1) - \omega(V_2) + \omega(V_3)$$

恰好是 V 弦圖代表的微分形式。換句話說 $\omega(X)-\omega(Y)$ 的外微分爲0, 那麼它就是一個結不變量了。

這就告訴我們, 由 Vassiliev 的弦圖同調理論之中的「弦圖同調類」都可以用弦積分的辦法, 再加上三叉圖補足, 而得到結不變量。例如在等級3之中, 我們可得到如下的弦圖同調類。



而這個同調類可用同爲等級3的三叉圖補足:



—本文作者任教於臺灣大學數學系—