從樓梯模型談起

柳柏濂

一. 上樓梯引發的聯想

我住在六樓, 從地上到我的房子恰好是104級。每天上下班, 在單調的上上落落之中, 自我尋找一點樂趣。當我回家拾級而上, 時而走一級, 時而跨兩級, 甚至跳三級。走的日子長了, 便聯想出一個有趣的問題: 若每步至多走三級, 從下而上可走出多少條不同的路?

先從一個簡單的例子觀察, 以了解我們問題的內容。

若樓梯僅有三級, 因每步至多跨三級, 可列舉出不同的路共有4條。(如圖1)

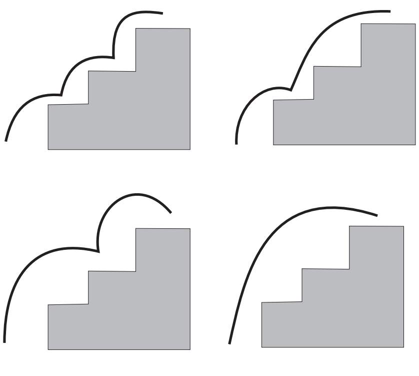


圖 1

回到我們的問題, 設走完104級的一條樓梯, 有 j_1 個1級步, j_2 個2級步, j_3 個3級步, 即 $j_1+2j_2+3j_3=104$。

如果把 j_1 個1級步看作 j_1 個1, j_2 個2級步看作 j_2 個2, j_3 個3級步看作 j_3個3, 易見, 任一條上樓的路, 一一對應於

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{j_1\text{個}}\quad\underbrace{2,2,\cdots,2}_{j_2\text{個}}\quad\underbrace{3,3,\cdots,3}_{j_3\text{個}}$$

的一個排列。例如:

$$1\quad 2\quad 2\quad 1\quad 3\quad 2\quad 3\quad 1\quad 2$$

對應於下面的一條上樓的路。我們把它垂直投影到地面上 (如圖2)

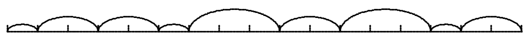


圖 2

由排列組合知識易知, 這樣的路數是

$$\frac{(j_1+j_2+j_3)!}{j_1!j_2!j_3!}$$

考慮到 $j_1+2j_2+3j_3=104$。本文開頭問題的答案是

$$\sum_{j_1+2j_2+3j_3=104}\frac{(j_1+j_2+j_3)!}{j_1!j_2!j_3!}$$

上述 $\sum$ 是對於所有滿足 $j_1+2j_2+3j_3=104$ 的非負整數解 (j_1,j_2,j_3)求和。

自然, 若樓梯僅有3級, 則我們的解是

$$\sum_{j_1+2j_2+3j_3=3}\frac{(j_1+j_2+j_3)!}{j_1!j_2!j_3!} \tag{1}$$

因 $j_1+2j_2+3j_3=3$ 有3組非負整數解 (3,0,0), (1,1,0), (0,0,1)。故 (1) 式爲

$$\frac{3!}{3!0!0!}+\frac{(1+1)!}{1!1!0!}+\frac{1!}{0!0!1!}=1+2+1=4$$

這與窮舉的結果是一致的。

把我們的問題更一般化。若允許每一步不超過 k 級, (k 爲正整數), 走一條有 n 級的樓梯, 一共有多少條不同的路?

設所求的路數是 $f(n)$。我們已經求出 $f(3)=4$。仿照上面的思維, 不難得出

$$f(n)=\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_k)}\frac{(j_1+j_2+\cdots+j_k)!}{j_1!j_2!\cdots j_k!}, \tag{2}$$

其中$(j_1,j_2,\cdots,j_k)$ 是方程 $j_1+2j_2+\cdots+kj_k=n$ 的所有非負整數解。

二. 來一個“倒行逆施”

上一節, 我們用組合方法, 把樓梯問題的一般解 (2) 求出來。現在, 來一個“倒行逆施”, 從樓頂的最後幾級倒過來考慮, 用遞歸的方法, 寫出 $f(n)$ 的一個代數模型。

爲了方便說話, 我們把 n 級樓梯由下至上按順序 $1,2,\ldots,n$ 編號。現在, 從上樓路線的最後一步考慮問題。

最後一步只能是1級步, 2級步, $\ldots,k$ 級步, 共 k 種可能。

若最後一步是1級步, 則從第1級到第 $n-1$ 級共有 $f(n-1)$ 條路。

若最後一步是2級步, 則從第1級到第 $n-2$ 級共有 $f(n-2)$ 條路。

$\cdots$

若最後一級是 k 級步, 則從第1級到第 $n-k$ 級共有 $f(n-k)$ 條路。

於是

$$\begin{aligned} f(n)&=f(n-1)+f(n-2)+\cdots+f(n-k)\\ &=\sum_{i=1}^{k}f(n-i) \end{aligned} \tag{3}$$

這是一個關於 $f(n)$ 的遞歸式。

(3) 式看起來是一個很漂亮而整齊的式子。讓我們考慮 $k=2$ 的情形, 這時 (3) 變成

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2) \tag{4}$$

易見, $f(n)$ 的初始値

$$f(1)=1,\ f(2)=2 \tag{5}$$

從初始値開始, 利用關係 (4) 得到 $f(n)$ 的値如下

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
$f(n)$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	$\cdots$

易見, $f(n)$ 是一個菲波那契 (Fibonacci) 數列。事實上, 從 (4) 和 (5), 用特徵方程方法可解得

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt5}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt5}{2}\Big)^{n+1}-\Big(\frac{1-\sqrt5}{2}\Big)^{n+1}\Big] \tag{6}$$

注意到 (2) 式, 從組合模型我們得到

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{j_1+2j_2=n} \frac{(j_1+j_2)!}{j_1!j_2!} \\ &= \sum_{j_2=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(n-2j_2+j_2)!}{(n-2j_2)!j_2!} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(n-\alpha)!}{(n-2\alpha)!\alpha!} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-\alpha}{\alpha} \qquad (7) \end{aligned}$$

(7) 正是菲波那契數列的組合表達式。比較 (6) 和 (7), 還得到一個有趣的恆等式

$$\sum_{\alpha=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\Big]$$

(6) 和 (7) 都是我們熟知的結果。但是, 這一比較, 令我們躍躍欲試, 去探索一些鮮爲人知的結論。例如, 令 k=3, 由 (3) 可得

$$\begin{aligned} &f(n)=f(n-1)+f(n-2)+f(n-3) \\ &f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=4 \qquad (8) \end{aligned}$$

解 (8) 可不像 (4) 那樣得心應手。如果用特徵方程法, 我們需要解一個 $t^3 = t^2 + t + 1$ 的特徵方程, 這可不是好對付的呵! 在這山窮水盡之際, (2) 式給我們一條通向“又一村”的途徑。於是, 我們可得 (8) 的解

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{j_1+2j_2+3j_3=n} \frac{(j_1+j_2+j_3)!}{j_1!j_2!j_3!} \\ &= \sum_{j_3=0}^{[\frac{n}{3}]} \sum_{j_2=0}^{[\frac{n-3j_3}{2}]} \frac{(n-2j_2-3j_3+j_2+j_3)!}{(n-2j_2-3j_3)!j_2!j_3!} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{[\frac{n}{3}]} \sum_{\beta=0}^{[\frac{n-3\alpha}{2}]} \frac{(n-\beta-2\alpha)!}{(n-2\beta-3\alpha)!\beta!\alpha!} \end{aligned}$$

當我們考慮 $k = 2$, $k = 3$ 時, 分別得到了 (4) 和 (8)。然而, 對於一般的 k, 特別是較大的 k, 要完整地寫出遞歸式 (3), 必須完成一系列初值 $f(1), f(2), \ldots, f(k)$。那麼, 我們不得不又要回到 (2) 的組合手法了。

三. 得寸進尺

數學就是這樣奧妙, 它往往“不擇手段”採用一些超乎常理的方法, 以達到它的目的。超常的方法需要我們有超常的思維, 恐怕這就是我們常說的數學靈感吧!

我們解決問題不是常要求“把複雜化爲簡單”嗎? 數學往往反其道而行之。在證明三角恆等式中, 有時需要把 1 變成 $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$ 呢!

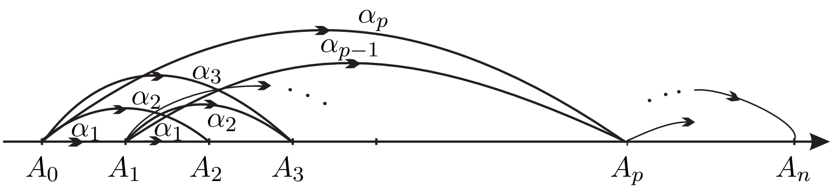
上一節, 我們把一個樓梯模型表達成代數遞歸式, 使數學的味道更濃了。可是, 從 (8) 的求解, 我們得到啓示: 何不得寸進尺, 把一般常係數齊次差分方程退回到一個樓梯模型去求解。

一般地, 我們考慮常係數齊次差分方程

$$\begin{aligned} f(n) &= \alpha_1 f(n-1) + \alpha_2 f(n-2) + \cdots \\ &\quad + \alpha_p f(n-p) \\ f(0) &= C_0 \quad, f(1) = C_1, \ldots, f(p-1) \\ &= C_{p-1} \qquad (9) \end{aligned}$$

$\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ 及 $C_i (i = 0, 1, \ldots, p-1)$ 均是常數。衆所周知, 要寫出解 $f(n)$ 的顯式可不是一件容易的事。(9) 和 (3) 的不同是, 它的 $f(n-i)$ 的係數不一定是1。於是, 我們構造一個經過改良的樓梯模型。

我們的模型是一個賦權有向圖 G: 設 $A_i(i=0,1,2,\ldots)$ 是數軸上座標爲 i 的點, 對任意的 $A_i(i=0,1,2,\ldots)$, A_i 與 $A_j(j=i+1,i+2,\ldots,i+p)$ 有邊 $\overrightarrow{A_iA_j}$ (從 A_i 指向 A_j 的有向邊) 相連, $\overrightarrow{A_iA_j}$ 的權爲 α_{j-i}。



G

設 n 是任一正整數, ℓ 是 G 中由 A_0 到 A_n 的任一條有向路徑。ℓ 中各有下邊的權之積定義爲 ℓ 的權。以 F_n 表示 G 中由 A_0 到 A_n 的所有路徑的權之和, 並令 $F_0=1$。例如, 若 ℓ 取 $A_0\to A_1\to A_3\to A_p\to A_n$ $(p>\frac{n}{2})$, 則 ℓ 的權是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{p-3},\alpha_{n-p}$ 我們試對 $n=3$, $p=3$, 計算 F_3 。因爲由 A_0 到 A_3 有4條路徑, 它們是

ℓ_1 : $A_0\to A_1\to A_2\to A_3$, 權是 α_1^3
ℓ_2 : $A_0\to A_1\to A_3$ 權是 $\alpha_1\alpha_2$
ℓ_3 : $A_0\to A_2\to A_3$ 權是 $\alpha_1\alpha_2$
ℓ_4 : $A_0\to A_3$ 權是 α_3

於是, 由定義 $F_3=\alpha_1^3+2\alpha_1\alpha_2+\alpha_3$。

對於圖 G 的 F_n 的計算, 我們有下列引理

$$F_n=\sum_{j_1+\cdots+pj_p=n}\frac{M}{N}\cdot\alpha_1^{j_1}\cdots\alpha_p^{j_p},$$
$$\text{其中 } M=(j_1+\cdots+j_p)!,$$
$$N=j_1!\cdots j_p!\quad n\geq 0 \tag{10}$$

其中, $j_1,j_2,\ldots,j_p$ 是非負整數, 若 $\alpha_t=j_t=0$, 則令 $\alpha_t^{j_t}=1(1\leq t\leq p)$。

證明: 設 ℓ 是 G 中由 A_0 到 A_n 的任一條有向路徑, 且在 ℓ 中有 $j_t(t=1,2,\ldots,p)$ 條權爲 α_t 的有向邊, 則 ℓ 的權爲 $\alpha_1^{j_1}\alpha_2^{j_2}\cdots\alpha_p^{j_p}$, 且

$$j_1+2j_2+\ldots+pj_p=n \tag{11}$$

又因對不定方程 (11) 的任一組非負整數解 $j_1,j_2,\ldots,j_p$, G 中有 $\frac{(j_1+j_2+\ldots+j_p)!}{j_1!j_2!\ldots j_p!}$ 條不同的由 A_0 到 A_n 的有向路徑, 故 (10) 式成立。證畢。

現在, 可以用改良了的樓梯模型 G, 得到差分方程 (9) 的一般解。我們有

定理: 差分方程 (9) 的一般解爲

$$f(n)=\sum_{k=0}^{p-1}\Big(\sum_{i=k}^{p-1}C_i\alpha_{p-i+k}\Big)F_{n-p-k},\ n\geq p \tag{12}$$

其中, 當$n-p-k<0$時, $F_{n-p-k}=0$。

證明: 以 A_i 表示數軸上坐標爲 $i(i=0,1,2,\ldots)$ 的點, G′是以 $\{A_0,A_1,A_2,\ldots\}$ 爲頂點的一個賦權有向圖: A_0 與 A_i $(i=1,2,\ldots,p)$ 之間有邊 $\overrightarrow{A_0A_i}$, 其方向由 A_0 指向 A_i。$\overrightarrow{A_0A_i}(i=1,2,\ldots,p-1)$ 的權

爲 C_i, $\overrightarrow{A_0A_p}$ 的權爲 $C_0\alpha_p$。對任一自然數 j, 當 $j \le p-1$ 時, A_j 與 $A_s(s=p,p+1,\ldots,p+j)$ 之間有邊 $\overrightarrow{A_jA_s}$; 當 $j>p-1$ 時, A_j 與 $A_s(s=j+1,j+2,\ldots,j+p)$ 之間有邊 $\overrightarrow{A_jA_s}$。每一有向邊 $\overrightarrow{A_jA_s}$ 的權爲 α_{s-j}, 其方向由 A_j 指向 A_s。(仿照圖 G, 讀者可自行描繪出 G′)。

設 ℓ 是 G′中由 A_0 到 A_n 的任一條有向路徑, ℓ 中各條有向邊的權之積定義爲 ℓ 的權。以 b_n 表示 G′中由 A_0 到 A_n 的所有不同路徑之權的和。並令 $b_0=c_0$。由 G′的構造, 易見 $b_i=c_i(i=1,2,\ldots,p-1)$

$$b_p=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i c_{p-i}=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i b_{p-i}$$

當 $n>p$ 時, 在由 A_0 到 A_n 的一條有向路徑中, 最後一條邊必帶權 $\alpha_j(1\le j\le p)$。於是

$$b_n=\sum_{j=1}^{p}\alpha_j b_{n-j}$$

從而有

$$\begin{cases} b_n=\alpha_1 b_{n-1}+\alpha_1 b_{n-2}+\ldots+\alpha_p b_{n-p}, \\ \qquad n\ge p \\ b_0=c_0, b_1=c_1,\ldots,b_{p-1}=C_{p-1} \end{cases} \tag{13}$$

比較 (9) 和 (13), 得 $f(n)=b_n(n=0,1,2,\ldots)$。

現在求 b_n, 在 A_0 到 A_n 的任一條有向路徑中, 其第一邊只能是 $\overrightarrow{A_0A_i}(1\le i\le p)$。我們把第一邊是 $\overrightarrow{A_0A_p}$ 的路徑稱爲0類路徑, 把第一邊是 $\overrightarrow{A_0A_i}(1\le i\le p-1)$ 的路徑稱爲第 i 類路徑。易知, 第 $i(0\le i\le p-1)$ 類路徑的權之和爲 $C_i\sum_{k=0}^{i}\alpha_{p-i+k}F_{n-p-k}$。於是

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{i=0}^{p-1} C_i\sum_{k=0}^{i}\alpha_{p-i+k}F_{n-p-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1}\Big(\sum_{i=k}^{p-1}C_i\alpha_{p-i+k}\Big)F_{n-p-k}。\end{aligned}$$

由 $f(n)=b_n$, 即得 (12)。證畢。

誠然, (9) 式的解我們也以用生成函數的方法得到。(見參考文獻 [3])。然而, 這裡, 用一個中學生也能接受的方法, 我們得到了常係數線性齊次差分方程的一般解的顯式。更進一步, 如果我們把模型稍加改進, 亦能解決非齊次的情形, 有興趣的讀者可參看文獻 [2]。

參考文獻

1. 曹汝成、柳柏濂, 常係數線性齊次遞歸式的一般解公式, 數學的實踐與認識, 1987, 3, 80-82。
2. Bolian Liu, A matrix method to solve linear recurrences with constant coeffients, Fibonacci Quarterly, Feb(1992), 1-9.
3. 柳柏濂, 別瞧不起它, 那個中學教材中的公式, 數學傳播, 第二十二卷第二期, 63-71。

—本文作者任教於中國廣州華南師範大學數學系和廣東職業技術師範學院計算機系—