小平邦彥的消沒定理

陳榮凱

前言

小平邦彥 (Kunihiko Kodaira) 可以算是二十世紀最重要的代數幾何學家之一, 筆者認爲他最重要的工作有兩項, 其一是曲面的結構與分類, 其二是消沒定理。本文將試圖介紹消沒定理。消沒定理對之後的代數幾何發展有相當重要的影響, 例如80年代左右的極小模型問題當中, 甚至於在整個分類理論中, 消沒定理一直是一個非常基本的工具。這其中的標準技巧是把幾何問題用適當的同調群來表示, 至於如何計算這些同調群便往往需要利用消沒定理。

本文中基本上都假設流形 (variety) 是複射影流形, 而且爲了簡單起見, 部分專有名詞的定義並沒有完整而嚴格的寫下來, 有需要的讀者請參閱 [4]或 [5]。

關於小平邦彥的工作, 可以參考他的論文集 [1], 至於代數幾何的入門書, 可以參考 [2, 3], 介紹代數幾何較完整的書, 以下兩本是經常被引用的: [4, 5], 關於消沒定理的專門討論可以參考 [6, 7]。

一、射影空間 (projective spaces)

給定平面上的兩相異直線 L_1, L_2, 假設它們不平行, 則必交於一點。然而當兩線平行時, 我們可以想像它們是相交在無窮遠處。所以若考慮加入適當的無窮遠點, 則我們可以說兩相異直線必交於一點。換句話說, 我們可以考慮補上所有無窮遠點的射影空間, 定義如下:

定義 1.1: N-維複射影空間 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 定義爲 $\mathbb{C}^{N+1}$ 中所有通過原點的直線, 沿著 $(z_0, \ldots, z_N)$ 方向的直線我們寫成 $[z_0, \ldots, z_N]$, 則

$$\mathbb{P}^N(\mathbb{C}) := \{[z_0, \ldots, z_N] \mid \overrightarrow{0} \neq (z_0, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^{N+1}\}.$$

我們透過 $i_0 : (x_1, \ldots, x_N) \mapsto [1, x_1, \ldots, x_N]$ 可以將 $\mathbb{C}^N$ 一對一對應到所有 $Z_0 \neq 0$ 的。因此, $Z_0 = 0$ 的點則可以看成是 $\mathbb{C}^N$ 的無窮遠點。例如 $(a_1, \ldots, a_N)$ 方面

的無窮遠點可以寫成

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}[1,a_1t,\ldots,a_Nt]\\=&\lim_{t\to\infty}[\frac{1}{t},a_1,\ldots,a_N]\\=&[0,a_1,\ldots,a_N].\end{aligned}$$

例 1.2: 在 $\mathbb{C}^2$ 上考慮 $V_1 := (y-x^2=0)$, $V_2 := (xy-1=0)$, $V_1\cap V_2$ 有三點 $(1,1)$, (ω,ω^2), (ω^2,ω), 其中 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$。從圖形來看, 不難想像應另外又交於 $(0,1)$ 方面的無窮遠點。詳細的計算如下: 令

$$\begin{aligned}\tilde{V_1} &:= (Z_0Z_2-Z_1^2=0),\\ \tilde{V_2} &:= (Z_1Z_2-Z_1^0=0).\end{aligned}$$

當 $Z_0\neq 0$ 時, 取 $U_0 := \{p\in\mathbb{P}^2(\mathbb{C})|Z_0(p)\neq 0\}$。則 $x:=\frac{Z_1}{Z_0}$, $y:=\frac{Z_2}{Z_0}$ 是 U_0 上的一組坐標。因此我們可透過 $\varphi_0([Z_0, Z_1, Z_2])\mapsto(\frac{Z_1}{Z_0}, \frac{Z_2}{Z_0})$ 將 U_0 視爲 $\mathbb{C}^2$。

$$V_1=\tilde{V_1}\cap U_0, V_2=\tilde{V_2}\cap U_0.$$

即爲原來$\mathbb{C}^2$上的情形。

當 $Z_2\neq 0$ 時, 取 $U_2 := \{p\in\mathbb{P}^2(\mathbb{C})|Z_2(p)\neq 0\}$。則 $s:=\frac{Z_0}{Z_2}$, $t:=\frac{Z_1}{Z_2}$ 是 U_2 上的一組坐標。我們可透過 $\varphi_2([Z_0, Z_1, Z_2])\mapsto(\frac{Z_0}{Z_2}, \frac{Z_1}{Z_2})$ 將 U_2 視爲 $\mathbb{C}^2$。

$$\begin{aligned}&\varphi_2(\tilde{V_1}\cap\tilde{V_2}\cap U_2)\\=&\{(0,0),(1,1),(\omega,\omega^2),(\omega^2,\omega)\}.\end{aligned}$$

對應在 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上即爲

$$\{[0,0,1],[1,1,1],[\omega,\omega^2,1],[\omega^2,\omega,1]\}.$$

透過 φ_0 即分別對應到 $(0,1)$ 方面的無窮遠點以及 $(1,1)$, (ω,ω^2), (ω^2,ω) 。

事實上, 在射影平面上, 會有如下的定理:

定理 1.3(Bézout's 定理): 若 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 中兩相異曲線 C_1, C_2 次數分別是 m, n 則 C_1 和 C_2 的交點在計算重數 (multiplicities) 後恰爲 mn。

補上無窮遠點成爲一個射影空間是一個緊緻化 (compactification) 的動作, 透過這樣的動作, 不僅簡化一些問題, 而且可以有更豐富的結構。

二、因子 (divisor) 和線性系 (linear series)

我們先看一個例子再談正式的定義。

例 2.1: 在 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$上, 考慮有理函數

$$f(x)=\frac{(x-2)^4}{(x-1)^2(x-3)},$$

$f(x)$ 的零點 (zero) 和極點 (pole) 有 $\{1,2,3,\infty\}$, 重數分別爲 -2, 4, -1, -1。(負的重數代表極點, 正的重數代表零點。) 或者簡寫成

$$div(f) := -2\{1\}+4\{2\}-1\{3\}-1\{\infty\}.$$

這樣子的形式和 (formal sum) 就是一個因子的例子。簡言之, 一個因子 D 就是低一維的子流形的形式和。顯然的, 兩個因子是可以相加減的, 亦即直接對係數相加減的即可。我們說一個因子 D 是有效的 (effective) 如果它的係數均 ≥ 0, 記成 $D\geq 0$。

在某些好的情況下 (如一維流形或射影空間), 我們可以定義因子的次數 (degree),

記成 $deg(D)$。在一維流形時即爲係數和, 例如在例2.1中, $deg(div(f))=0$。

因子的討論和有理函數是息息相關的, 從上面的例子可知給一個有理函數 f 可以產生一個因子, $div(f)$。更進一步, 給一個因子 $D=\sum n_iY_i$, 我們可以考慮

$$\mathcal{L}(D):=\{f\text{是有理函數}|div(f)+D\geq 0\},$$

以及

$$|D|:=\{div(f)+D|f\in\mathcal{L}(D)\},$$

其中 $|D|$ 即稱爲因子 D 的線性系。我們說兩個因子是線性等價的 (linearly equivalent) 如果它們的差恰爲一個有理函數的因子, 因子 D 的線性系 $|D|$ 可以理解成所有和 D 線性等價的有效因子。

例2.2: 在 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上, 考慮因子 $D=2\{1\}$, 則

$$\mathcal{L}(D)=\{\frac{f(x)}{(x-1)^2}|deg(f(x))\leq 2\}.$$

(若 $deg(f(x))\geq 3$, 則在 ∞ 會有極點)

$$|D|=\{\text{次數等於2的有效因子}\}.$$

顯然的, $\mathcal{L}(D)$ 是一個3維的複向量空間, 取基底

$$\begin{aligned}s_0&:=\frac{1}{(x-1)^2},\\ s_1&:=\frac{x}{(x-1)^2},\\ s_2&:=\frac{x^2}{(x-1)^2},\end{aligned}$$

可以預期產生如下的對應,

$$\begin{aligned}&\varphi_D:\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\to\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\\ &a\mapsto[s_0(a),s_1(a),s_2(a)].\end{aligned}$$

但是注意到這樣的定義在 $a=1$ 這點是不成立的, 爲了克服這個問題, 我們可以修正如下:

取1的一個小鄰域 U, 當 $a\in U$ 時,

$$\varphi_{D,U}:a\mapsto[1(a),x(a),x^2(a)]=[1,a,a^2].$$

當 $a\in V:=\mathbb{P}^1(\mathbb{C})-\{1\}$ 時,

$$\varphi_{D,V}:a\mapsto[s_0(a),s_1(a),s_2(a)].$$

注意到 $U\cup V=\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, 且若 $a\in U\cap V$ 時, $\varphi_{D,U}(a)=\varphi_{D,V}(a)$。所以這樣就成功地定義一個從 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 到 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 的函數 φ_D。

另外我們注意到, 給一個 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 中的超平面, 例如 $H=(Z_0+Z_1=0)$, 不難發現

$$\begin{aligned}&\varphi_D^{-1}(H)\\ &=\{a\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})|s_0(a)+s_1(a)=0\}\\ &=\{-1,\infty\}.\end{aligned}$$

可以將其視爲因子 $1\{-1\}+1\{\infty\}\in|D|$。

事實上當我們用 φ_D 將 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 對應至 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 時, 透過 φ_D^{-1}, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上的超平面恰好一對一對應到線性系 $|D|$ 中的有效因子, 這也是我們研究線性系的一個重要理由。

我們要再一次強調的是: 因子, 線性系和流形間的對應是密不可分的。

例 2.3: 在 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上, 考慮因子 $D=2L$, 其中 $L=(Z_0=0)$。取 $s_0=\frac{Z_1Z_2}{Z_0^2}$,

$s_1=\frac{Z_0Z_2}{Z_0^2}$, $s_2=\frac{Z_0Z_1}{Z_0^2}$ $s_3=\frac{Z_1^2}{Z_0^2}$, $s_4=\frac{Z_2^2}{Z_0^2}\in\mathcal{L}(D)$, 並考慮由此所形成的對應

$$\varphi:\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\longrightarrow\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$$
$$a\mapsto[s_0(a),\ldots,s_4(a)].$$

但是 φ 永遠無法定義在 $[1,0,0]$ 這一點上, 因爲 s_0, ..., s_4 在 $[1,0,0]$ 上同時等於0, 且乘以任何有理函數也無法解決這種情形。這時我們說 $[1,0,0]$ 是一個基點。

三、上同調群 (cohomology groups)

如同例2.2中, 在不同的鄰域 U, V 上分別考慮 $(1,s_0)$, (x,s_1), (x^2,s_2), 兩者之間相差一個有理函數 $(x-1)^2$, 這樣調整過的函數組可視爲 (D 的線叢的) 截影 (section) 的例子。基本上, 討論截影是希望在不同的鄰域中, 調整成不同的函數, 但是要求在交集部分比例是相同, 如此一來有希望將定義擴充到極點和零點上。所有的截影形成的空間記爲 $H^0(X,D)$, 這必然和 $\mathcal{L}(D)$ 是同構 (isomorphic as vector spaces)。

然而如例2.3所示, 有些時候是不可避免會有共同零點, 亦即基點的存在。綜言之, 我們可以有以下幾個等價的條件:

定義 3.1: 給一個有效因子 D (此時 $\mathcal{L}(D)\neq 0$), 則下列條件等價

(i) φ_D 在 P 點不能定義

(ii) 每個 $|D|$ 裏的因子均通過 P

(iii) 每個 $H^0(X,D)$裏的截影均通過 P

此時我們說 P 是 $|D|$ 的基點 (base point)。

事實上, 若考慮局部截影, 則自然形成一個層 (sheaf)。關於基點的問題, 我們可以有如下的短正合序列 (short exact sequence of sheaves):

$$0\to\mathcal{O}(D)\otimes\mathcal{I}_P\to\mathcal{O}(D)\to\mathcal{O}_P\to 0.$$

以及所誘導的上同調群的長正合序列

$$\begin{aligned}&0\to H^0(X,\mathcal{O}(D)\otimes\mathcal{I}_P)\\&\quad\to H^0(X,D)\\&\quad\to H^0(X,\mathcal{O}_P)\cong\mathbb{C}\\&\quad\to H^1(X,\mathcal{O}(D)\otimes\mathcal{I}_P)\ldots\end{aligned}$$

其中 $e_P: H^0(X,D)\to H^0(X,\mathcal{O}_P)\cong\mathbb{C}$ 相當於是截影在 P 點的取值, 所以 P 是基點另一個充要條件是 $e_P=0$。一個立即的應用是, 若 $H^1(X,\mathcal{O}(D)\otimes\mathcal{I}_P)=0$, 則 e_P 必是蓋射, P 必不是基點, 換言之, 我們有一個用上同調群判別基點的辦法。

在我們目前考慮的情形下, 上同調群均是有限維的向量空間, 所以我們的目的便是透過上同調群的計算來了解截影的多寡以及其他的幾何問題。一個重要的定理是

定理 3.2(Riemann-Roch 定理):

1. 當 X 是一維流形時, D 是一個因子, 0 代表0因子

$$\begin{aligned}&h^0(X,D)-h^1(X,D)\\&=h^0(X,0)-h^1(X,0)+deg(D)\\&=1-g(X)+deg(D).\end{aligned}$$

2. 當 X 是二維流形時, D 是一個因子, K 是正則因子 (canonical divisor)

$$\begin{aligned}&h^0(X,D)-h^1(X,D)+h^2(X,D)\\=&h^0(X,0)-h^1(X,0)+h^2(X,D)\\&+\frac{1}{2}(D\cdot D-D\cdot K)\\=&1-q(X)+g(X)+\frac{1}{2}(D\cdot D–D\cdot K).\end{aligned}$$

其中 $h^i(X,*)$ 代表 $dimH^i(X,*)$, $g(x)$ 代表虧格數 (genus), $q(x)$ 是 irregularity, 而 $D{\cdot}D, D{\cdot}K$ 是 intesection number。

3. 當 X 是一般維度的流形時, 也有類似的結果, 但式子過於複雜, 在此我們不列出來。

四、消沒定理 (vanishing theorem) 及嵌入定理 (embedding theorem)

小平邦彥的消沒定理一個主要的動機是考慮一個緊緻的解析流形何時會是代數流形的問題。在一維的時候, 一個緊緻的解析流形, 亦即緊黎曼曲面, 由古典的 Riemann-Roch 定理可知必定可以嵌入至射影空間, 視爲其中的代數曲線, 換句話說, 視爲一些多項式的解集合。小平當初即是考慮二維的緊緻的解析曲面, 以及其上的 Riemann-Roch 定理。爲了要將緊緻的解析曲面嵌入至射影空間, 需要足夠多的截影。然而若要透過 Riemann-Roch 定理來計算截影的多寡便希望其中很多項爲0以方便計算。所以便發展出如下的 *消沒定理* (vanishing theorem):

定理 4.1(消沒定理 Kodaira vanishing theorem): 若一個緊緻的解析流形 X 上有正因子 D (positive divisor, 亦即D的線叢上可以定義一個 positive hermitian metric), 則

$$H^i(X,K+D)=0,\quad \forall i>0.$$

則又可以證明:

定理 4.2(嵌入定理 Kodaira embedding theorem): 若一個緊緻的解析流形 X 上有正因子, 則 X 可以嵌入至射影空間成爲一個代數流形。

所以一個正因子D, 取夠大的倍數 mD 一定是極充足 (very ample) 因子。

除了嵌入定理, 消沒定理一個非常重要的應用是可以用來討論基點的問題, 如前所述, 若是可以用消沒定理證明 $H^1(X, \mathcal{O}(D)\otimes\mathcal{I}_P)=0$, 就證明 $|D|$ 在 P 不是基點。

另一個非常重要的應用是我們可以將問題限制到子流形上, 特別是維度小一維的子流形。例如我們可以對維度做歸納法而證明如下的結果:

例 4.3: 若 X 是 n 維流形, D 是其上的極充足因子, 則 $|K+mD|$ 對所有$m\geq n+1$ 沒有基點 。

證明: 當 $n=1$ 時 X 是代數曲線, D 是正因子, 所以 $deg(D)\geq 1$, $deg(K+mD)\geq 2g-2+m\geq 2g$, 其中 g 是 X

的虧格數 (genus)。由 Riemann-Roch 定理可知 $deg \geq 2g$ 的因子必沒有基點。至於一般情形, 取 Y 是 $|D|$ 中的一平滑子流形 (由 Bertini 定理知道這樣的 Y 必定存在), 考慮以下的短正合序列

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathcal{O}(K+(m-1)D) \\ &\to \mathcal{O}(K+(m-1)D+Y) \\ &\to \mathcal{O}_Y(K_Y+(m-1)D|_Y) \\ &\to 0. \end{aligned}$$

因而產生長正合序列,

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(X,\mathcal{O}(K+(m-1)D)) \\ &\to H^0(X,\mathcal{O}(K+(m-1)D+Y)) \\ &\to H^0(Y,\mathcal{O}_Y(K_Y+(m-1)D|_Y)) \\ &\to H^1(X,\mathcal{O}(K+(m-1)D)) \\ &\to \ldots \end{aligned}$$

由消沒定理定理知道 $H^1(X,\mathcal{O}(K+(m-1)D))=0$, 所以

$$H^0(X,\mathcal{O}(K+(m-1)D+Y)) \to H^0(X,\mathcal{O}_Y(K_Y+(m-1)D|_Y))$$ 是蓋射。

由歸納法假設知 $K_Y+(m-1)D|_Y$ 在 Y 上沒有基點, 所以 $K+(m-1)D+Y$ 在 Y 上沒有基點, 然而 Y 屬於 $|D|$, 所以相當於 $|K+mD|$ 在 Y 上沒有基點, 最後讓 Y 在 X 中變動即可。

五、Kawamata-Viehweg 消沒定理

在 Kodaira 之後, 消沒定理有各式各樣的推廣, 例如 Kawamata-Viehweg 消沒定理, Nadel消沒定理, Kollár 消沒定理, 其中特別值的一提的是 Kawamata-Viehweg 消沒定理, 當我們討論一個正因子時, 一般來說其線性系有可能是空集合, 所以類似前一節歸納法的手法在此便行不通, 然而, 一個補救的辦法是考慮 mD, 我們已知道, 當 D 是正因子時, 夠大的倍數 mD 一定是極充足因子, 特別的 $|mD|$ 一定非空。取 $|mD|$ 中的一個因子 B, 若我們考慮 $\frac{B}{m}$, 則 $\frac{B}{m}$ 所扮演的角色便如同是 D 一般。而 Kawamata-Viehweg 消沒定理基本上是說

定理 5.1(Kawamata-Viehweg 消沒定理): 若 D 是正因子, 取 $|mD|$ 中的一個因子 B。若 $\lceil\frac{B}{m}\rceil$ 代表將 $\frac{B}{m}$ 的係數取大於它的最小整數, $\{\frac{B}{m}\}$ 代表將 $\frac{B}{m}$ 的係數取它的小數部分, 且假設 $\mathrm{supp}(\{\frac{B}{m}\})$ 是simple normal crossing。則

$$H^i(X,\mathcal{O}(K+\lceil\frac{B}{m}\rceil), \quad \forall i>0.$$

我們可以利用 Kawamata-Viehweg 消沒定理證明 Fujita-type 的基點定理:

定理 5.2(Base point freeness theorem): 一個維度 ≤ 4 的流形 X 上有正因子 D, 則 $|K+mD|$ 對所有 $m \geq dim(X)+1$ 沒有基點 。

這樣子的推廣不僅是將原來因子的討論放寬到有理因子 ($\mathbb{Q}$-divisor) 的討論。而且也可以用來處理許多重要的問題, 例如80年代由 Mori , Kollár, Kawamata等人所發

展的極小模型理論當中, 這樣子的消沒定理是一項極關鍵的工具。

參考文獻

1. K. Kodaira, Collected Works, Vol. I, II, III., 1975, Princeton University Press.
2. 伍鴻熙, 緊黎曼曲面引論, 聯經出版社, 1990。
3. M. Reid, Undergraduate Algebraic Geometry, Cambridge University Press, 1988.
4. R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.
5. P. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley-Interscience, 1978
6. J. Kollár, Vanishing theorems for cohomology groups, Algebraic Geometry, Bowdoin 1985, Proc. Symp. Pure Math., vol 46, 1987.
7. H. Esnault, E. Viehweg, Lectures on vanishing theorems, Birkhäuser Verlag, 1992

—本文作者任教於國立中正大學數學系—