多重碎形 (multifractals)

謝南瑞

一. 碎形與維度

1970年代, B. B. Mandelbrot (耶魯大學教授、IBM 資深研究員、美國科學院院士) 出版了兩本著作, 提出碎形 (fractals) 與其特徵量 — 維度 (dimension) — 的觀念, 及其在自然科學中所扮演的角色。自此, 碎形一詞便不斷地出現在各類文獻中, 由研究論文, 至科普作品, 乃至工藝美術。一般而言, 碎形泛指一個外貌複雜的形體, 但其結構則具有尺度不變性 (scaling invariance), 亦即自相似性 (self-similarity)。利用電腦的快速計算與繪圖功能, 我們可將一個簡單的機制指令, 經由不斷地迭代 (iteration), 而產生一連串的分岔 (bifurcation), 最後電腦螢幕上即出現一個複雜形體, 這是一個人工虛擬碎形。而在自然界中, 我們隨處可見的曲線與形體, 如海岸線的彎折, 天空雲彩繁複的表面, 湍急河川的大小漩渦 $\cdots$ 等等, 在在是我們無法以經典幾何與微分幾何來描述與研究的碎形。

如是的形體 F, 可用一個數值 s 爲其特徵量, 利用邊長爲 n^{-1} (n 爲正整數, 如 100) 的小正方體, 或半徑爲 n^{-1} 的小球體, 來覆蓋 F。由 F 的自相似性, 有效覆蓋數呈現冪律 (power law), 即 n^s, 而 s 介於 0 與 3 之間 (設 F 爲空間中之一形體, 若 F 爲平面的一部份, 則 s 介於 0 與 2)。數值 s 稱爲 F 的維度。在物理學者的思考中, 此值 s 可名爲“分數維”, 因 s 通常爲一個分數, 或以適當分數表出的無理數。值 s 也可名爲自相似維度, 此乃由下列考慮獲得:

設 F 可分解成 $F_1 \ldots F_m$ 個不重疊子集, 每個 F_j 與 F 有 $F_j = r_j F, 0 < r_j < 1$ 之關係; 而每個 F_j 又可分解成 $F_{j,1}, \ldots, F_{j,m}$ 個更小子集, $F_{j,k}$ 和 F_j 亦保有 $F_{j,k} = r_k F_j$ 之關係; 等等重覆地發生。則 s 即爲方程式 $r_1^s + \cdots + r_m^s = 1$ 之解 s。

許多“數學碎形”, 亦即數學者利用迭代函數系 (iterated function system) 所獲得的碎形, 如 Cantor 集、Sierpinski 帆、von Koch 雪花 ... 等等, 都可藉助上述思考獲得其維度。詳見參考資料2第九章。這些數學碎形則用來作爲自然界碎形的數學模擬, 此因自然界碎形的自相似性並不像上述數學碎形的嚴格自相似, 而是以隨機自相似 (stochastic self-similarity) 呈現。

必須附帶說明的是, 上述分數維度或自相似維度的思考與表式, 若以數學者角度觀之, 是有些問題的。考慮 $F:\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\}$, 這是一個可列集, 故合理的維度爲0; 但依上述之分數維思考, 則 F 的維度是 $\frac{1}{2}$! 數學者解決此困境的方法是, 引入所謂 Hausdorff 維度 — 這是在數學分析中有嚴格定義的, 作爲數學者的維度。但, 這又有另一困境產生, 例如 Cantor 集, 利用上述維度公式, 可解出分數維 $s=\ln 2/\ln 3$, 即表式 $(1/3)^s+(1/3)^s=1$ 之解; 但, 若欲嚴格依 Hausdorff 維度之定義來證明 Cantor 集的維度確爲 $\ln 2/\ln 3$, 卻不簡單! 數學者通常在“嚴格推論”制約下, 受到自設的困境所擾!

二. 多重碎形 — 緣起

1980年代中期, 在美國有個包括著名物理學者 M. H. Kadanoff 的研究小組, 發表了一篇名爲“碎形測度與其奇異點: 奇異吸子之刻劃”的研究論文於 Physical Review 上。幾乎同時地, 兩位法國物理學者 U. Frisch 與 G. Parisi 在一個名爲 “地球物理與大氣之紊流與可預測性”的國際研討會上, 發表一篇討論紊流之流速場的奇異性的報告 (收錄於會議論文集中)。兩者之背景雖然不同, 但卻不約而同地指出一個碎形的“新”研究方向, 即碎形的細部結構; 在此之前, 相關的碎形研究者只著眼於認知某形體有碎形的特徵 (冪律、自相似性、維度)。

Kadanoff 小組的研究可描述如下: 考慮某個動力系 $\{\varphi^n\}_{n=1}^{\infty}$ (在某個位相空間 S 中), 令起始者 $\varphi^0=x_0$。考慮空間 S 上的“造訪頻率”測度 $\mu(A)$

$$\mu(A)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\#\{k:1\le k\le m,\ \varphi^k(x_0)\in A\}, A\subset S;$$

上式中 $\#$ 表集合之元素個數。此測度之質量集中處 (即, 台集 (support)) 爲系統的奇異吸子 (strange attractor) — 爲一碎形 F。經由精密的觀測, 他們發現測度 μ 在吸子 F 上呈現出高度不均勻的特性。即, μ 在不同之小塊區域上呈現出不同“強度”(讀者自行思考, 如何描述強度一詞), 再者, 吸子 F 由一些 F_α “交織”而成, 而 F_α 表示由有相同強度之小塊區域構成。電腦螢幕上呈現一個有藍 (強度低) 紅 (強度高) 交織而成的碎形。他們也敍述, 利用凸分析中之 Legendre 法, 可構繪出一條曲線 $\alpha\to f(\alpha)=\dim F_\alpha, \alpha\in[\alpha_-,\alpha_+]$, dim 表維度。

Frisch 與 Parisi 之研究則可描述如下: 考慮紊流的流速場 $\vec{v}(x)$, 於場中某點 x, 若 $|\vec{v}(x+x')-\vec{v}(x)|$ 呈現形如 $|x'|^{-\alpha}$ 之形, 則稱 α 爲流速場在 x 的奇異指標 ($|\cdot|$ 表 x 之歐氏距)。較精密的觀測, 得知指標 α 爲隨點 x 而異, 而非想像中的指標是處處相同。將有相同指標 α 的 x 所成區域名爲 S_α, 則紊流區所在 — 其亦爲碎形 — 可表成 S_α 之交織。他們也發現 Legendre 法可用來描繪曲線 $\alpha\to h(\alpha)=\dim S_\alpha$。此曲線可視爲 A. N. Kolmogorov 在1941 年所提出有關紊流場冪律之假說 (此假說中, 冪律爲一恆常數) 的一大突破性發現。在 Frisch 與 Parisi 之論

文中, 他們使用了"multifractal"一詞來描述他們的發現, 這是多重碎形一詞之首次登場。

三. 多重碎形 — 一個數學例子

我們考慮 Cantor 集上的一個多重碎形結構。如衆所知, Cantor 集 F 可表成 $F=\bigcup_{k=0}^{\infty}E_k, E_0=[0,1]$, 而 $E_k, k=1,2,\ldots$, 是 2^k 個長度爲 3^{-k} 的小區間聯集。將 E_0 想像成質量爲1的均勻密度質量棒。分割此質量如下: 將 $1/3$ 質量壓到 E_1 的左小間$[0,1/3]$ 上, 且將 $2/3$ 質量壓到 E_1 之右小區間 $[2/3,1]$上。則形成兩個小質量棒, 兩者的密度比爲 $1:2$。再次分解質量如下: 將 $[0,1/3]$ 所具有的 $1/3$ 質量壓到 E_2 的兩個左小區間 $[0,1/9]$ 與 $[3/9,4/9]$ 上, 而使兩者質量比仍爲 $1:2$ (是以, $[0,1/9]$ 分配到原有質量的 $1/3\cdot1/3=1/9$, 而 $[3/9,4/9]$ 則分配到原有質量的 $1/3\cdot2/3=2/9$); 另將 $[2/3,1]$ 所具有的 $2/3$ 質量壓到 E_2 的兩個右小區間 $[5/9,6/9]$ 與 $[8/9,1]$ 上, 而使兩者質量比亦仍爲 $1:2$ (是以, $[5/9,6/9]$ 分配到原有質量的 $2/3\cdot1/3=2/9$, 而 $[8/9,1]$ 則分配到原有質量的 $2/3\cdot2/3=4/9$)。依此方式重覆進行, 以使 E_k 中每個小區間被分割成 E_{k+1} 之兩個更小區間恆有質量密度比 $1:2$。這重覆進行程序的"極限"爲台集是 Cantor 集 F 上的一個測度 μ (即, 一個質量分配)。對此測度 μ, 由上述的構造程序, 即可察知其具有不均勻的質量 "強度" 特性。如圖1所示者。我們作較精密的估計如下。將

圖1

$[0,1]$分成長度爲 δ 之小區間 I_i, 對 $q:-\infty<q<\infty$, 令

$$S_\delta(q)=\sum_i \mu(I_i)^\delta$$

當然, 若 $I_i\cap F=\phi$, 則 $\mu(I_i)=0$。當 $\delta=3^{-k}$, $k=1,2\ldots$, 由二項分佈

$$\begin{aligned}S_\delta(q)&=\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{qj}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{q\left(k-j\right)}\\&=\Big[(\frac{1}{3})^q+(\frac{2}{3})^q\Big]^k\\&=\delta^{\{\frac{\ln[(\frac{1}{3})^q+(\frac{2}{3})^q]}{\ln 3}\}}\end{aligned}$$

我們有興趣於 $f(\alpha)=\dim F_\alpha$, 而

$$F_\alpha=\{x:\lim_{\delta\to0}\frac{\ln\mu(I(x,\delta))}{\ln\delta}=\alpha\},$$

其中 $I(x,\delta)$ 表包含 x 之長度 δ 的小區間。由維度之意義, 我們知, 使 $\delta^{\alpha+\epsilon}<\mu(I_i)<\delta^\alpha$ (ϵ : 小的正數) 之小區間 I_i 之個數爲

$\delta^{-f(\alpha)}$, 將和以積分代之, 我們得關係式

$$\begin{aligned}S_\delta(q) &\sim \int_0^\infty \delta^{q\alpha}\delta^{-f(\alpha)}d\alpha\\ &= \int_0^\infty \delta^{-\big(f(\alpha)-q\alpha\big)}d\alpha\\ &\sim \delta^{-\tau(q)}\end{aligned}$$

而 $\tau(q)$ 爲對應於使 $f(\alpha)-q\alpha$ 爲極大之 α 的極大值。因其爲極值, 故

$$\frac{d}{d\alpha}(f(\alpha)-q\alpha)=0,$$

即

$$q=\frac{df}{d\alpha}(\alpha(q))$$

而

$$\tau(q)=f(\alpha(q))-q\alpha(q)$$

故有

$$\frac{d\tau}{dq}=\frac{df}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dq}-\alpha-q\frac{d\alpha}{dq},$$

設 α 對 q 可微分, 是以

$$\frac{d\tau}{dq}(q)=-\alpha(q)$$

上述關係是一般表式。而在我們所在之情況, $\tau(q)$ 已被計算得

$$\tau(q)=\frac{\ln[(\frac{1}{3})^q+(\frac{2}{3})^q]}{\ln 3},$$

是以

$$\alpha(q)=-\frac{[(\frac{1}{3})^q\ln(\frac{1}{3})+(\frac{2}{3})^q\ln(\frac{2}{3})]}{[(\frac{1}{3})^q+(\frac{2}{3})^q]\ln 3}$$

因而, 得到 $f(\alpha)=f(\alpha(q))$ 的明確表示與圖形, 圖2, 如下:

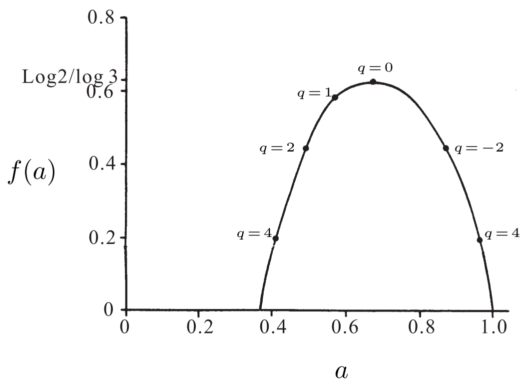

圖2

$$f(\alpha(q))=\frac{\ln[(\frac{1}{3})^q+\ln(\frac{2}{3})^q]-\frac{q[(\frac{1}{3})^q\ln(\frac{1}{3})+(\frac{2}{3})^q\ln(\frac{2}{3})]}{(\frac{1}{3})^q+(\frac{2}{3})^q}}{\ln 3}$$

註: α 雖然爲 q 的函數, 但在凸分析中, α 可視爲自變數。

四. 多重碎形 — 一個物理實驗

我們考慮一個簡單的電解實驗。在一個圓形淺皿中裝入硫酸銅溶液, 在皿正中置一銅棒作爲陰極, 在皿周圍圍一銅絲作爲陽極。通電後, 硫酸銅分解成正二價銅離子與負二價硫酸根, 兩者皆在溶液中“隨機地運動”, 正二價銅離子在陰極收到二個電子而還原成銅 (設銅離子撞擊到陰極), 逐漸地, 在陰極周遭形成一個銅聚落。此聚落狀如一個有若干“樹枝”往外延伸的形體, 且樹枝的尖端部增長得較樹枝根部迅速, 因此, 時間愈長, 則樹枝形結構愈明顯。我們可作一個 xy 平面的模擬如下: 令含原點 O 的一小塊方形區爲核心, 在一個以 O 爲中心之大圓圓周上釋放粒子, 粒子在圓周上之位置爲“隨機”, 讓此粒子從

事 Brown 運動, 直到其撞擊到核心, 它就粘附於核心。再次進行釋放粒子、進行 Brown 運動, 撞擊核心且粘附其上的程序, 設若我們進行 $N = 50,000$ 次, 則可獲得一形體; 如圖3所示。令結構之直徑爲L,

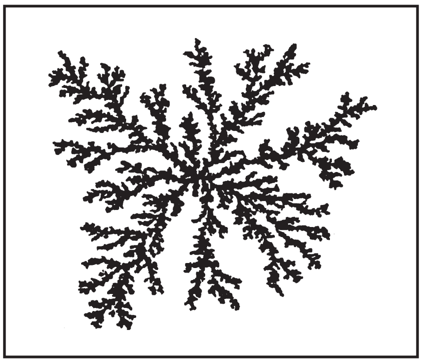

圖3

則有冪律

$$N \sim L^D$$

而 D 值爲1.71 是以此結構爲“維度”爲 $D = 1.71$ 的碎形。我們方才提到, 樹枝尖端部增長較根部迅速 (何故?), 是以此碎形應有某種多重碎形結構。將形體環周作個 δ-分割, 以 N_k 表第 k 區的受撞粒子數, 且令 $p_k = N_k/N$ 此爲“撞擊機率”。則我們可估計

$$N(q, L) = \sum_k p_k^q \sim (\frac{\delta}{L})^{-\tau(q)} \sim L^{\tau(q)}$$

再利用 Legendre 法求則曲線 $f(\alpha)$, 如圖4所示。詳見參考資料1, 第六章11節。

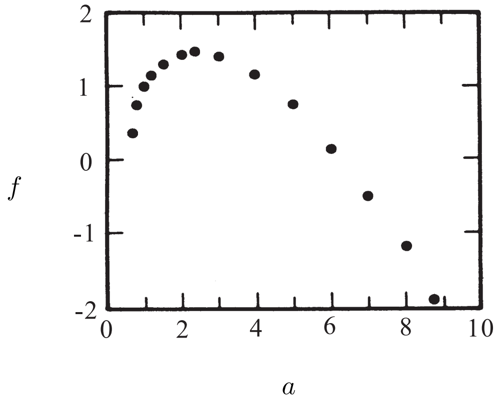

圖4

五. 結語 — 燦爛的混沌

多重碎形討論一個碎形的細部結構。這個主題大大地豐富了碎形的內涵。是以, 1985年以降, 幾乎所有有關碎形的研究論文, 是以討論多重碎形爲標的。Mandelbrot 也宣稱, 他的一篇1972 年發表於流體力學期刊的論文, 才是多重碎形理論的起點。對數學者而言, 這也是值得作“數學研究”的主題。此與1970年代, 數學者冷眼看待碎形有相當地不同。此乃因, 以數學者而言, 多重碎形確是一個“新”領域; 不若碎形, 僅是20世紀初期若干數學者的“圖形遊戲”(或云“病態特例”), 而被 Mandelbrot 妙手闡示而已。在1998 年與 1999 年, 分別在德國格來瓦大學與英國劍橋大學, 都有以數學者爲主的碎形理論與應用的大型會議。此會議中, 確立了碎形理論的五個研究方向, 概與多重碎形有關。此五個方向分別是: 幾何測度與碎形、迭代函數系、隨機碎形、動力系與碎形、相關於碎形的微分方程。我們不僅僅是認知碎形與估計維度而已, 細部結構與相關研究才是主要

的關切。K. Falconer (英國聖安德魯大學講座教授, 劍橋大學 Corpus Christi 學院院士) 的新著 (詳見參考資料 3), 其封面即是一幅彩色的螺旋展開的多重碎形結構, 其中包含兩個自相似但強度不同的子結構, 兩者交織共構。我們若讚嘆碎形的繁複之美, 則對多重碎形結構, 我想最好的稱述語, 或許是: 燦爛的混沌。

參考文獻

1. J. Feder: Fractals, Plenum Publishing, 1988.
2. K. Falconer: Fractal Geometry, John Wiley, 1990.
3. K. Falconer: Techniques in Fractal Geometry, John Wiley, 1997.

—本文作者任教於台灣大學數學系, 謝南瑞教授亦為「碎形專題」策畫人—