

碎形與動態系統

念家興

一. 動態系統簡介

千百年來, 人類仰觀美麗的星空, 引發無數的聯想。更編織了許多動人的神話和星座故事。那時候繁星是受上帝的指使而運動、而閃爍。一直到了牛頓發現萬有引力後, 加上望遠鏡的發明使人們得以收集到更多的天文資料, 驗證了牛頓的萬有引力理論和運動定律同樣適用於天體的運行。

1781年, 業餘天文學家 William Herschel 系統地研究太陽系中行星時, 發現了天王星 (Uranus)。數十年後, 排除了其它行星的影響, 天文資料顯示天王星軌道偏離了其理論軌道達 2 秒弧之多。J. J. Leverrier 和 J. E. Adam 因此分別預測另一顆行星的存在。在 1846 年 9 月 23 日 Galle 發現了海王星 (Neptune)。多年後, 天文學家又發現海王星運行的偏差, 終於在 1930 年, Clyde Tombaugh 發現了冥王星 (Pluto)。

根據萬有引力理論和牛頓運動定律, 計算天體的運行軌道可歸結為求解微分方程組的問題, 也就是鼎鼎有名的多體問題 (N-body problem), 要求得這些方程組的確切

解 (close form) 一般是不可能的, Poincare 因此提出了微分方程的定性理論。早期的動態系統理論便是研究這些解的性質。

在這樣的思維下, 二十世紀初, 微分方程的定性理論得到了長足的發展, Poincare 更提出了所謂的 Poincare map 將微分方程解的性質的研究轉為函數的迭代 (iteration) 的研究。函數迭代的另一個來源也和牛頓有關, 那就是用牛頓法解方程式 $f(x) = 0$ 解的近似值 (對於 $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ 做迭代)。所以研究函數的迭代是有意義的, 也是很實用的!

為了方便討論, 我們先定義一些術語。首先, 本文中 $f^n(x)$ 代表函數 $f(x)$ 的 n 次迭代, 不是 $f(x)$ 的 n 次方, 請讀者明察。

定義一: $f : R \rightarrow R$ 是一個函數, $x \in R$ 。集合 $O^+(x; f) = \{f^n(x) | n \in Z, n \geq 0\}$ 稱為點 x 在 f 下的前進軌道 (forward orbit)。如果 f 具有反函數, 集合 $O^-(x; f) = \{f^n(x) | n \in Z, n \leq 0\}$ 稱為 x 在 f 下的後退軌道 (backward orbit); 而 $O(x; f) = \{f^n(x) | n \in Z\}$ 則稱為 x 在 f

下的軌道 (orbit)。本文只討論前進軌道, 因此也就將它簡稱為軌道。

定義二: $f : R \rightarrow R$ 是一個函數, 點 $p \in R$ 稱為 f 的一個固定點 (fixed point), 如果 $f(p) = p$ 。

定義三: $f : R \rightarrow R$ 是一函數, 點 $p \in R$ 稱為 f 的一個週期點 (periodic point), 如果存在 $n \in N$ 使得 $f^n(p) = p$ 。使得 $f^n(p) = p$ 的最小正整數 k 稱為點 p 的週期。

註: 固定點和週期點可分為吸引性 (attractive) 和排斥性 (repelling) 兩種。

點 p 稱為函數 f 的一個吸引性固定點 (或週期點), 如果存在點 p 的一個鄰域 (neighborhood) U , 使得對於所有的 $x \in U$, x 的軌道趨於此固定點 (或週期軌道)。點 p 稱為一個排斥性固定點 (或週期點, 週期為 k), 如果存在點 p 的一個鄰域 V , 使得對於所有的 $x \in V$, 存在 $n \in N$ 使得 $f^n(x) \notin V$ (或 $f^{nk}(x) \notin V$)。可以證明如果 p 是一個固定點且 $|f'(p)| < 1$, 則 p 是個吸引性固定點。如果 $|f'(p)| > 1$, 則 p 是個排斥性固定點。固定點和週期軌道具有最簡單的軌道結構。同時它們是研究動態系統時首先要找出的軌道。有興趣的讀者可參閱 [1, 8, 9, 14]。

就函數迭代而言, 我們關心的問題是定義域中的每一個點 x 的軌道結構及其迭代行為: 當 n 趨於無限大時, $f^n(x)$ 是趨於某一個固定點, 或是趨於無限大, 還是另有不同的行為?

我們先來考慮幾個函數迭代的例子。

例子 1: 考慮函數 $f(x) = x/2$, 則 $f^2(x) = f(f(x)) = (1/2)^2x$ 。利用數學歸納法, 我們得到 $f^n(x) = (1/2)^nx$ 。同時 $x = 0$ 是 $f(x)$ 唯一的固定點 (解方程式 $f(x) = x$)。對任何實數 $x \in R$, 我們發現 $f^n(x) \rightarrow 0$, 當 $n \rightarrow \infty$ 。此固定點 $x = 0$ 就是一個吸引性固定點。

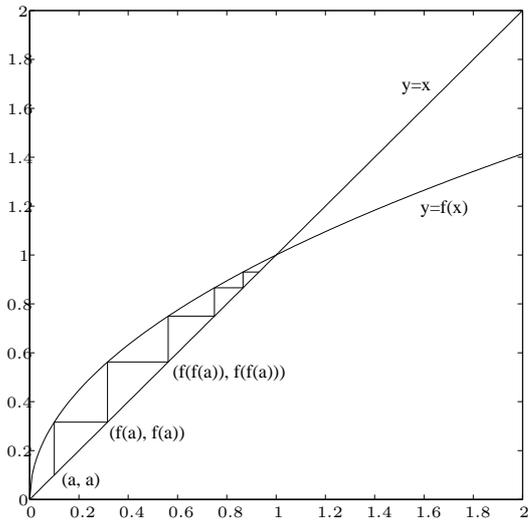
例子 2: 考慮函數 $f(x) = 2x$ 。同樣地 $x = 0$ 也是一個固定點。利用數學歸納法, 我們可以推得 $f^n(x) = 2^n x$ 。所以

$$f^n(x) : \begin{cases} \rightarrow +\infty & x > 0 \\ \rightarrow -\infty & x < 0 \\ = 0 & x = 0 \end{cases} \text{ 當 } n \rightarrow \infty.$$

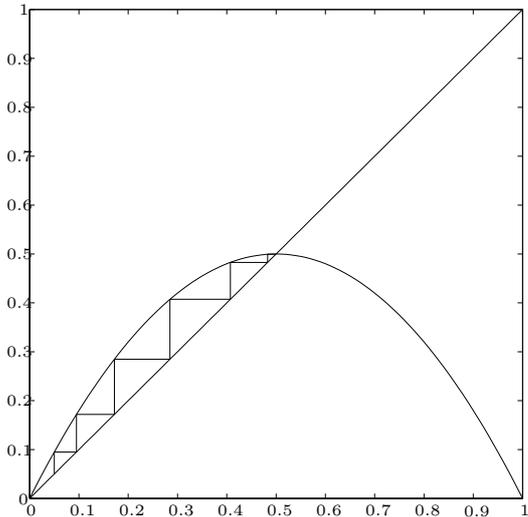
此固定點 $x = 0$ 就是一個排斥性固定點。

以上的兩個例子, $f^n(x)$ 都可以確切地表示出來。因此可以完整地描述出所有軌道的結構。但是一般而言, $f^n(x)$ 的通式是表示不出來的。不但如此, 僅僅是計算前幾次的迭代已是頗為繁雜。不信的話, 請就 $f(x) = 2x(1-x)$ 寫出 $f^2(x)$, $f^3(x)$, \dots , $f^{10}(x)$ 。有趣的是, 雖然 $f^n(x)$ 的通式表示不出來, 我們卻可以利用所謂的圖形分析法 (graphical analysis) 來瞭解 $f(x) = 2x(1-x)$ 的所有軌道的結構。單變數函數 $f : R \rightarrow R$ 的迭代可以在其圖形上進行, 其方法如下: 給定 $a \in R$, 在座標平面上, 畫出 $y = x$ 及 $y = f(x)$ 的圖形。從點 (a, a) 畫一垂直線交 $y = f(x)$ 於 $(a, f(a))$, 再從點 $(a, f(a))$ 畫一水平線交 $y = x$ 於 $(f(a), f(a))$ 。重覆相同的過程便可在直線 $y = x$ 上依次畫出 (a, a) , $(f(a), f(a))$, $(f^2(a), f^2(a))$, \dots ,

$(f^n(a), f^n(a)), \dots$ (如圖一) 如此, 我們便可從直線 $y = x$ 上的這些點得到 a 的軌道的直觀認知。



圖一: 圖形分析法



圖二: 函數的圖形分析

例子 3: 函數 $f(x) = 2x(1 - x)$ 有兩

個固定點: $x = 0, x = 1/2$ 。利用圖形分析法 (圖二), 我們發現

- (i) $x < 0$ 時, $f^n(x) \rightarrow -\infty$, 當 $n \rightarrow \infty$ 。
 - (ii) $x > 1$ 時, $f^2(x) < 0$, 再根據 (i), $f^n(x) \rightarrow -\infty$, 當 $n \rightarrow \infty$ 。
 - (iii) $x \in (0, 1)$ 時, $f^n(x) \rightarrow 1/2$, 當 $n \rightarrow \infty$ 。
 - (iv) $x = 0$ 或 $x = 1$, $f^n(x) = 0$, 當 $n \geq 1$ 。
- 以上的觀察都可嚴格地證明。有興趣的讀者請參閱 [1,8]。

到目前為止, 我們所遇到的軌道結構都很單純。下一個例子, 則揭露了另一種複雜的軌道結構。

例子 4: 函數 $f(x) = 5x(1 - x)$ 有兩個固定點: $x = 0, x = 4/5$ 。因為 $(0, 1)$ 區間內有一子區間被對應到 $(1, \infty)$, 因此圖形分析法顯示大部份的點的軌道似乎都趨於 $-\infty$, 請讀者自己試試看。但顯然有些點的軌道不會趨於 $-\infty$ 。例如: $x = 0, x = 4/5, x = 1$, 它們的軌道都一直留在 $[0, 1]$ 區間內。因此, 我們將注意力集中在集合 $B = \{x \in [0, 1] | \forall n \in N, f^n(x) \in [0, 1]\}$ 。首先要提醒大家 $f(B) \subseteq B$ 。令人訝異的是, 集合 B 竟然與大名鼎鼎的 Cantor set 是拓撲同構的。而 Cantor set 也正是古典碎形的代表。利用符號動態學 (symbolic dynamics) 的方法, 我們可以證明下列三個事實:

- (i) 集合 B 中有無限多個週期點, 且在 B 中是稠密的。
- (ii) 對於 B 中任何兩個開集合 U, V (子集拓撲), 存在 $k \in N$ 使得 $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ 。(此性質稱為 topological transitivity)。

- (iii) 對起始值是敏感的 (sensitive dependence on initial condition)。也就是說, 存在一個正數 $\delta > 0$, 對於任一點 $x \in B$, 在 x 的任何一個鄰域 (neighborhood) U 內, 存在 $y \in U$ 和一個自然數 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ 。

由此三個現象, 讀者諸君應能感受到, 在集合 B 中的軌道結構非常混亂。事實上, Devaney 便是用這三個現象來定義所謂的混沌 (chaos)。確切的說, 函數 $f : B \rightarrow B$ 在集合 B 上是混沌的 (chaotic), 如果上述三個現象成立。

註: 數學中的混沌一詞最先出現於 Li 和 Yorke 的論文 [10] 中。該論文證明了一個有趣的事實: 閉區間 J 上的連續函數 $f : J \rightarrow J$, 如果有週期 3 的週期點, 則它在 J 中有任意週期的週期點。而數學家 Sarkovskii 在 1960 年代, 也曾對一維函數的週期點的出現順序做過詳盡而完整的描述 [8, 14]。

Devaney 對混沌的定義中的三個條件並不獨立。在一維的情況下, 條件 (iii) 可由條件 (i) 和 (ii) 推得, 見 [2]。再加上適當的前提, 條件 (i), (iii) 都可由 (ii) 推得, 見 [17]。

例子 3 和 4, 是函數族 $f(x) = ax(1 - x)$, $a > 1$, 的兩個特例。Robert May 在 1976 年的論文 [11] 中介紹了這個簡單的函數族的複雜動態行為, 引起許多數學家的關注與投入。同時也獲得了許多重要的結果, 並且瞭解到從有序到混沌的一種機制。這個函數族也成為學習動態系統的入門例子。關於一

維動態系統的理论相當完整, 有興趣的讀者請參閱 [6]。

註: Yorke 在 [1] 中利用 Liapunov exponent 的觀念定義了所謂的混沌軌道 (chaotic orbit)。Devaney 的定義具有整體的直觀, 而 Yorke 的定義則具有方便進行電腦實驗以檢測混沌軌道的好處。

由以上例子, 我們知道大部分函數的 n 次迭代都是無法確切地寫出它們的通式。恰如大多微分方程的通解不可得一, 因此數學家轉而尋求解的性質, 也就是所謂的定性理論。離散型動態系統研究的便是函數迭代的軌跡的結構。

二. 動態系統中的碎形

大家都知道, 實係數多項式的根不盡然都是實數, 牛頓法也可用來解複變數函數的根的問題。因此, 複動態系統 (complex dynamics) 的研究也就很有意義了。在牛頓法中, 必須要先猜一個起始值 (initial guess), 數值分析中的理論告訴我們只要起始值與解夠接近, 牛頓法保證能收斂到該解。那麼會收斂的起始值所成的集合會是一個什麼樣的集合呢?

著名英國數學家 Arthur Cayley (1821-1895) 在 1879 年的論文 [5] 中, 就曾提出過這樣的問題: 那些起始值會分別收斂到 $z^3 - 1 = 0$ 的三個根 $1, (-1 \pm \sqrt{3}i)/2$ 。也就是要考慮函數 $g(z) = z - (z^3 - 1)/(3z^2)$ 的

迭代的軌道結構。深受這個問題的影響，法國數學家 Gaston Julia(1893-1978) 開始了他對複變數函數動態系統的研究。用 A_1, A_2, A_3 分別代表會收斂到 $1, (-1 + \sqrt{3}i)/2, (-1 - \sqrt{3}i)/2$ 的起始值的集合。Julia 能夠證明集合 A_1, A_2, A_3 具有共同的邊界集 (boundary)。可是什麼樣的三個平面上的非空子集會有相同的邊界呢？集合 A_1, A_2, A_3 到底長相如何？在那個沒有電腦繪圖的黑白年代，這一切都是很難想像的。此共同邊界集，便是現在所謂的函數 $g(z)$ 的 Julia set。Julia 的研究結果早在 1918 年便已發表，然而因為時局的動盪不安和電腦科技尚未萌芽，一直到了 1970 年代末期才受到世人的重視。Julia set 遇到了電腦繪圖就好像白雪公主遇到了白馬王子，一下子就被吻醒了。從此世界變得多彩多姿。而我們也終於能看到集合 A_1, A_2, A_3 的長相。此集合正是一個碎形。事實上，絕大多數的 Julia set 都是碎形。

複變數函數的 Julia set 的正式定義涉及所謂的正規函數族 (normal family)。爲了避免過多的術語惹人厭煩，我們就不在這裡詳述。有興趣的讀者可參閱 [3, 4, 12, 13]。所幸，我們感興趣的複變數函數族 $f(z) = z^2 + c$ 有下列兩個性質：

- (1) 在一個有限的範圍以外的所有點，它們的軌道都會趨於無限大。
- (2) 集合 $B = \{z \in C | z \text{ 的軌道是有界的}\} \neq \emptyset$ ，也就是一切有界軌道所成的集合是非空的。

可以證明，函數 $f(z) = z^2 + c$ 的 Julia set，記作 $J(f)$ ，就等於集合 B 的邊界集， ∂B 。因此 $J(f)$ 是一個非空有界的集合。這些性質也提供了一個用電腦繪圖製作 Julia set 的方法。我們先來看一個簡單的例子。

例子 5: 考慮函數 $f(z) = z^2$ ，則 $z = 0, 1$ 是 f 的所有固定點。可以簡單證明：當 $n \rightarrow \infty$ 時，

$$|f^n(z)| = |z|^{2^n} \rightarrow \begin{cases} 0 & |z| < 1 \\ \infty & |z| > 1 \\ 1 & |z| = 1 \end{cases}$$

所以集合 $B = \{z \in C | |z| \leq 1\}$ ，也就是閉的單位圓盤。所以 $J(f) = \{z \in C | |z| = 1\} =$ 單位圓。函數 f 在單位圓上的迭代行爲相當複雜，事實上容易證明 f 在 $J(f)$ 上是混沌的。

這個例子中的 Julia set 結構非常簡單。其它的 Julia set 可就必須藉助電腦繪圖了。我們在此介紹兩種繪製 $J(f)$ 的方法。

方法一：繪製集合 B

特性：簡單省時但圖形檔案所佔記憶較多。

步驟：

- (1) 大致決定 Julia set 的範圍，比如說長方形 $A = \{z | a \leq \operatorname{Re} z \leq b, c \leq \operatorname{Im} z \leq d\}$ 。
- (2) 將長方形 A 細分成 n^2 個網格， n 的大小視所須的解析度而定。(一般而言， n 取不超過 1000)。
- (3) 對網格內的每個格點 z 進行迭代，如果對所有的 $k \leq N, f^k(z) \in A$ ，則畫出此點。不然，則捨棄此點。對下一個格點

重複步驟 (3)。(一般而言, N 取不超過 100)。

如此得到的圖形便是集合 B , 其邊界就是 $J(f)$ 。

方法二: 繪製 Julia set(描邊法)

特性: 計算量較大, 圖形檔案較小, $J(f)$ 一目了然。

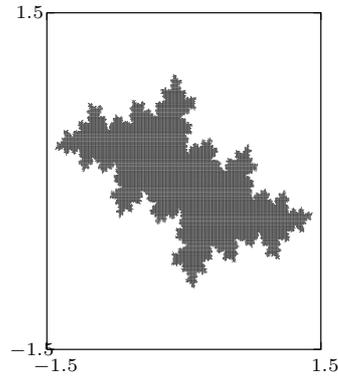
步驟:

- (1) (2) 同方法一。
- (3) 對網格內的每一個格點 z 及其鄰近的格點進行迭代。如果對於所有的 $k \leq N$, $f^k(z) \in A$ 。且其鄰近格點有不同之行為, 則畫出此點。不然, 則對下一個格點重複步驟 (3)。

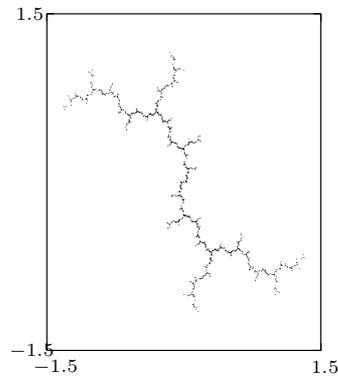
如此得到的圖形便是 $J(f)$ 。注意, 格點若為內點, 則它有 4 個鄰近格點分別位於該點的上、下、左、右。所以此方法在計算量上大約增加 4 倍。

註: 當 $|c| < 2$ 時, A 可以取作 $\{z \in C \mid -2 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, -2 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\}$ 。在方法一中, 也可用使得 $f^k(z) \notin A$ 的最小 k 值來對點 z 著色, 其結果便是常見的美侖美奐的圖形。選擇恰當的範圍還可以對 Julia set 做局部的放大。由此, 我們可以觀察 Julia set 一些更細緻的結構。

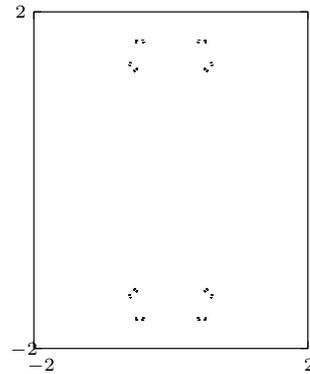
圖三便是利用方法一所繪製的 Julia sets。



(a)



(b)



(c)

圖三: (a) 函數 $f(z) = z^2 - 0.5 + 0.5i$ 的 Julia set, (b) 函數 $f(z) = z^2 + i$ 的 Julia set, (c) 函數 $f(z) = z^2 + 2.001$ 的 Julia set。

接下來我們討論 $f(z) = z^2 + c$ 的 Julia sets $J(f)$ 的性質。對它們的證明有興趣的讀者可參閱 [3, 4, 8]。

性質 (1): $J(f) \neq \emptyset$ 且是不可數 (uncountable) 無限多。

性質 (2): $J(f)$ 在 f 下是完全不變的 (completely invariant), 也就是說 $f(J(f)) \subseteq J(f)$ 且 $f^{-1}(J(f)) \subseteq J(f)$ 。

性質 (3): $f : J(f) \rightarrow J(f)$ 是混沌的。(Devaney 的定義)

性質 (4): 若 z_0 是 $J(f)$ 中的任一點, U 是 z_0 的任一鄰域, 則 $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ 包含所有的複數, 除了一個可能的例外點 (exceptional point)。另外, $J(f)$ 也是 f 所有的排斥性週期點所成集合的閉包 (closure)。

性質 (5): 如果 $|c| > 2$, 則對任何複數 z 且 $|z| > |c|$, $f^n(z) \rightarrow \infty$ 當 $n \rightarrow \infty$ 。

性質 (6): 如果 $|c| < \frac{1}{4}$, 則 $J(f)$ 是一不自相交的封閉曲線。

性質 (7): 如果 $|c|$ 夠大, 則 $J(f)$ 是一個 Cantor set。

性質 (8): 如果當 $n \rightarrow \infty$, $f^n(0)$ 不趨近無限大, 則所有有界軌道所成的集合 B 是連通的。如果 $f^n(0) \rightarrow \infty$ 當 $n \rightarrow \infty$, 則集合 B 是由無限多個成分 (component) 所構成 (例如 Cantor set)。

註: 對於定義在里曼球面 ($= C \cup \{\infty\}$) 上的有理函數 $R(x)/Q(x)$, 如果 $\deg(R) \geq 2$ 則性質 (1)、(2)、(3)、(4) 也同樣成立 [3], 其中 $\deg(R) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ 。有趣的是, 數學家 Lattes 在 1918 年證明了函

數 $R(z) = (z^2 + 1)^2 / (4z(z^2 - 1))$ 的 Julia set 是整個里曼球面。另一個例子是, 數學家 Misiurewicz 在 1981 年證明了指數函數 $f(z) = e^z$ 的 Julia set 是整個複數平面 C 。在性質 (6) 和 (7) 的兩種截然不同的現象之間, 有所謂的樹狀 (dendrite) 結構的 Julia set, 作為其間的過渡現象 (圖三 (b))。性質 (8) 說明奇異點 (critical point) $z = 0$ 的軌道結構與 Julia set 的結構間有密切關係。下個單元的主題—Mandelbrot set 就是以性質 (8) 為基礎來定義的。

三. Mandelbrot Set

B. Mandelbrot 生於 1924 年的波蘭, 1936 年時全家移民法國。他的研究工作深受 Julia 的影響與啓發, 在碎形方面的卓越貢獻, 為他贏得了碎形幾何之父的美名。1979 年, Mandelbrot 借電腦之助首次製作出所謂的 Mandelbrot set。之後, 此圖形在數以萬計的個人電腦上被複製、被讚嘆。人們首次有機會親眼目睹這個被稱為數學中最美麗同時也是最複雜的圖形。底下我們就來說明到底什麼是 Mandelbrot set。

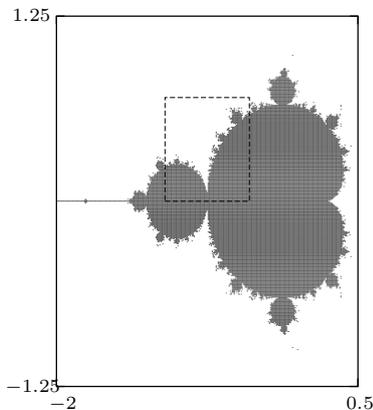
在上個單元性質 (8) 中, 我們知道 $f(z) = z^2 + c$ 的奇異點 $z = 0$ 的軌道與 $J(f)$ 有密切關係。Mandelbrot set, M , 就定義為:

$$M = \{c \in C \mid f(z) = z^2 + c \text{ 的奇異點軌道不趨於無限大}\} \\ = \{c \in C \mid J(f) \text{ 是連通的}\} \text{ (根據性質 (8))}$$

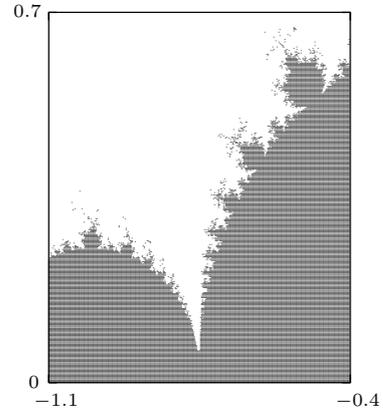
如果 $|c| > 2$, 則 $|f(0)| = |c|$, 因此 $|f(c)| = |f^2(0)| = |c||c+1| > |c|$ 。根據性質 (5), $f^n(0) = f^{n-2}(f(c)) \rightarrow \infty$ 當 $n \rightarrow \infty$ 。所以 Mandelbrot set 是個有界的集合且包含於集合 $\{c \in C ||c| \leq 2\}$ 。根據此事實, Mandelbrot set 的繪製也就很容易了。方法如下:

步驟 (1) 將正方形 $A = \{c \in C ||c| \leq 2\}$ 細分成 n^2 個網格 (一般而言, n 取不超過 1000)。(2) 依序對網格內的格點, 以起始值 $z = c$ 進行迭代。如果對所有 $k \leq N$ 都有 $f^k(c) \in A$, 這裏 $f(z) = z^2 + c$, 則畫出此點。不然則對下一個格點重複步驟 (2)。(一般而言, N 取不超過 100)

如此便得到了 Mandelbrot set 的圖形。在附錄中, 我們附上兩個以 C 語言所寫的程式, 一個繪製 Julia set, 另一個繪製 Mandelbrot set。請各位讀者就不同的 c 值和範圍, 進行一些自己的數學實驗。選擇恰當的範圍還可以對 Julia set 和 Mandelbrot set 做細部的放大。由此, 我們可以觀察 Julia set 和 Mandelbrot set 一些更細緻的結構。



(a)



(b)

圖四: (a) Mandelbrot Set, (b) 是 (a) 中方框的放大。

除了美不勝收之外, Mandelbrot set, M , 有許多令人訝異的性質。首先, A. Douady 和 J. H. Hubbard [7] 於 1982 年證明了集合 M 是連通的。接著 1991 年, 日本年輕數學家 M. Shishikura [15] 證明了 (M 的邊界集) 的碎形維度是 2。然後 Colorado 州立大學計算機科學系研究生 Dave Boll 在 1991 年爲了確定集合 M 的最大區塊和第二大區塊是否相切於一點 $c = -0.75$, 對 $c = -0.75 + ai$ 記錄下 a 與逃離給定區域所需的迭次數 $N(a)$ 間之關係, 結果得到下表:

a 值	疊代次數 $N(a)$
0.1	33
0.01	315
0.001	3143
0.0001	31417
0.00001	314160
0.000001	3141593
0.0000001	31415928

Boll發現: $aN(a) \rightarrow \pi$ 當 $a \rightarrow 0$ 。接著他將注意力集中在 M 的第一大區塊的尖點 $c = 0.25$ 處, 對 $c = 0.25 + a$ 記錄 a 值與 $N(a)$ 的關係, 並列表如下:

a 值	疊代次數 $N(a)$
0.1	8
0.01	30
0.001	97
0.0001	312
0.00001	991
0.000001	3140
0.0000001	9933
0.00000001	31414
0.000000001	99344
0.0000000001	314157
0.00000000001	993457
0.000000000001	3141625

這一次似乎有 $\sqrt{a} \cdot N(a) \rightarrow \pi$ 當 $a \rightarrow 0$ 。在 $c = 0.25$ 處的現象, 之前已被發現過, 也曾有過直觀的解釋。不過尚無數學上的嚴格證明。至於在 $c = -0.75$ 處的現象則不但沒有直觀的解釋, 更別談嚴格的證明了。最後, 如果 $c_0 \in M$ 且是一個所謂的 Misiurewicz point, 則在 c_0 點附近的 Mandelbort set 和 $f(z) = z^2 + c_0$ 的 Julia set 具有所謂的漸近自我相似性 (asymptotically self-similarity), 有興趣的讀者請參閱 [16]。

四. 結語

實數動態系統與複數動態系統充滿了許多有趣的課題, 應用的範圍更涉及許多不同學門。使用的理論和方法也遍及數學中許多不同分支。碎形與混沌更是二十世紀數學中兩個新興且重要的觀念。本文旨在拋磚引玉, 希望能引起讀者對它們的興趣與投入, 讓我

們數學人口更加蓬勃, 讓台灣的數學水平更上層樓。

五. 附錄

本附錄中收錄兩個程式, Julia.c 和 Mandelbort.c。程式執行後會將結果分別存在資料檔 Julia.dat 和 Mandelbort.dat。使用者可利用一些繪圖軟體將這些資料畫在電腦螢幕上。讀者如果熟悉 Turbo C 或 Borland C, 更大可輕易修改程式直接呼叫內建繪圖指令將點畫在螢幕上, 不必再存資料檔。

程式 Julia.c 繪製 fill-in Julia set。使用者必需輸入 6 個實數 $c_1, c_2, x_{\min}, y_{\min}, x_{\max}$ 及 y_{\max} , 其中 $c = c_1 + c_2i$, (x_{\min}, y_{\min}) 和 (x_{\max}, y_{\max}) 分別是選定的長方形的左下角及右上角的座標。例如, 欲繪製在 $\{z \in C \mid -1.5 \leq \operatorname{Re} z \leq 1.5, -1.2 \leq \operatorname{Im} z \leq 1.2\}$ 範圍內 $f(z) = z^2 + 0.1 + 0.2i$ 的 Julia set 則輸入 0.1 0.2 -1.5 -1.2 1.5 1.2 ($c_1=0.1, c_2=0.2, x_{\min}=-1.5, y_{\min}=-1.2, x_{\max}=1.5$ 及 $y_{\max}=1.2$)。

```

/***** Julia.c *****/
#include <stdio.h>
#include <math.h>

void main()
{
    int i, j, k, n=200, N=30, PLOT=1;
    double c1, c2, x0, y0, x1, y1, x2,
           y2, xmin, ymin, xmax, ymax,
           hx, hy;

```

```

FILE *fp,*fopen();
fp=fopen("Julia.dat","w");
printf("Input c1 and c2 for the
      parameter c=c1+c2*i, \n");
printf("and xmin ymin xmax ymax.
      Total six numbers. \n");
scanf("%lf %lf %lf %lf %lf %lf",
      &c1, &c2, &xmin, &ymin,
      &xmax, &ymax);
hx = (xmax - xmin)/ (1.0*n) ;
hy = (ymax - ymin)/ (1.0*n) ;

for (i=0; i< n; i++){
  x0 = xmin + i*hx;
  for (j=0; j< n; j++){
    x1 = x0;
    y1 = y0 = ymin+ j*hy;
    for (k=0;k < N ;k++){
      x2 = x1*x1 - y1*y1 + c1;
      y2 = 2*x1*y1 + c2;
      if ( sqrt(x2*x2+y2*y2) > 2){
        PLOT=0;
        break;
      }
      x1 = x2;
      y1 = y2;
    }
    if (PLOT == 1) fprintf(fp,"%6.5f FILE *fp,*fopen();
      %6.5f \n",x0, y0); fp=fopen("Mandelbrot.dat","w");
    else PLOT = 1;
  }
}

```

```
fclose(fp);
}
```

程式 Mandelbort.c 繪製 Mandelbort set。使用者必需輸入4個實數 $c1min$ 、 $c2min$ 、 $c1max$ 及 $c2max$ 。 $(c1min, c2min)$ 和 $(c1max, c2max)$ 分別是選定長方形的左下角和右上角的座標。例如，欲繪製在 $\{c \in C \mid -2 \leq \text{Re } c \leq 1.5, -1 \leq \text{Im } c \leq 1\}$ 範圍內的 Mandelbort set，則輸入 $-2 -1.5 \ 1$ ($c1min = -2, c2min = -1, c1max = 1.5, c2max = 1$)。

```

/***** Mandelbrot.c *****/
/* Draw Mandelbrot set in a specified
region. */

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define ITER 50

void main()
{
  int i, j, k, n=300, PLOT=1;
  double c1, c2, c1min, c2min, c1max,
         c2max, x0, y0, x1, y1, hstep,
         vstep;
}

```

```

scanf("%lf %lf %lf %lf",&c1min,
      &c2min, &c1max, &c2max);

hstep = (c1max - c1min)/ (1.0*n) ;
vstep = (c2max - c2min)/ (1.0*n);
for (k=0;k< n;k++){
  for (j=0;j< n;j++){
    c1 = c1min + k*hstep;
    c2 = c2min + j*vstep;
    x0 = c1;
    y0 = c2;
    for (i=0;i < ITER ;i++){
      x1 = x0*x0 - y0*y0 + c1;
      y1 = 2*x0*y0 +c2;
      if ( x1*x1+y1*y1 > 4) {
        PLOT = 0;
        break;
      }
      x0 = x1;
      y0 = y1;
    }
    if (PLOT == 1) fprintf(fp,"%5.4f
      %5.4f\n",c1, c2);
    PLOT = 1;
  }
}
fclose(fp);
}

```

六. 參考文獻

1. K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke [1997] Chaos :an introduction to dynamical systems. Springer Verlag: New York.
2. J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey [1992] On Devaney's Definition of Chaos. Amer. Math. Monthly, 99, 332-334.
3. A. F. Beardon [1991] Iteration of rational functions :complex analytic dynamical systems. Springer Verlag: New York.
4. L. Carleson, T. W. Gamelin [1993] Complex dynamics. Springer Verlag: New York.
5. A. Cayley [1879] The Newton-Fourier imaginary problem, Amer. Jour. of Math. 2.
6. P. Collet and J.-P. Eckmann [1980] Iterated maps of the interval as dynamical systems. Birkhauser, Boston.
7. A. Douady and J. H. Hubbard [1982] Iterated des polynomes quadratiques complexes, CRAS Paris 294, 123-126.
8. R. L. Devaney [1989] An introduction to chaotic dynamical systems. Addison-Wesley, Reading, MA.
9. A. Katok, B. Hasselblatt [1995] Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge University Press: Cambridge.
10. T-Y Li and J. A. Yorke [1975] Period Three Implies Chaos. Amer. Math. Monthly, 82, 985-992.
11. R. May [1976] Simple mathematical models with very complicated dynamical behavior. Nature 261, 459-467.
12. J. Milnor [2000] Dynamics in One Complex Variable, 2nd edi. Vieweg: Braunschweig.

13. H-O Peitgen, H. Jurgens, and D. Saupe [1992] *Chaos and Fractals: New Frontiers in Science*. New York: Springer-Verlag.
14. C. Robinson [1995] *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*. CRC Press: Boca Raton.
15. M. Shishikura [1998] The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia Sets. *Annals of Math.*, 147, 225-267.
16. L. Tan [1990] Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets, *Commun. Math. Phys.*, 134, 587-617.
17. M. Vellekoop and R. Berglund [1994] On Intervals, Transitivity = Chaos. *Amer. Math. Monthly* 101, 353-355.

—本文作者任教於靜宜大學應數系—