

# 碎形專題\* 一

## 從 Cantor 集到碎形

林琦焜

### 一. 前言

我們已經在前文 [8], 談到從十進位的概念來分析 Cantor 集, Cantor 集可以說是歷史上第一個出現的碎形 (fractal)\*。什麼是碎形? 從 Cantor 集來想像; 碎形的基本特徵是它的自我相似性 (self-similar) 與其維數 (dimension) 不必是整數。這正是這篇文章所要談的兩個主題; 所謂自我相似是指無論採取任何大小的尺度 (scale) 對它作測量, 其形不變, 意即在碎形中取某一點之鄰域, 並將此鄰域放大, 你將發現放大後的圖形與原來的並沒有什麼兩樣, 在數學與自然界中都有豐富的碎形。最典型的例子就是 Cantor 集還有與之相關的一序列結果, 如科赫雪片, Peano 填滿空間的曲線...等等都是碎形。

Cantor 集顧名思義與 Georg Cantor (1845–1918) 有密不可分的关系, 他是歷史上第一個對無限 (infinite) 有真正認識的數

學家與哲學家, 關於其生平讀者可參閱 [5]。本文另一主題 — 維數 (相似或碎形維數), 則是與 Georg Cantor 一樣有猶太人血統的 Felix Hausdorff 之貢獻。Felix Hausdorff (1869–1942) 是猶太裔的數學家, 1891年畢業於 Leibzig, 爾後仍留在 Leibzig 直到 1910年才轉往波昂 (Bonn), 1935年之後由於其猶太背景不見容於納粹, 經過數年的痛苦折磨後於 1942年偕妻子與妻子的妹妹一起自殺身亡。

Felix Hausdorff 的主要工作是拓撲學 (topology) 與集合論 (set theory), 其中最重要的著作是在 1914年出版的 “Grundzüge der Mengenlehre” 這本書可視為點集拓撲學 (point set topology) 的里程碑, 自此空間 (space) 被視為有單獨性的結構, 而不再像過去一樣那麼依賴群 (group) 的觀念 (例如; F. Klein (1849–1925) 的 Erlangen Program)。在

---

\* 碎形的英文為 fractal, 源自拉丁文 fractus, 含有破碎的意思, 英文的部分的 (fractional) 與破裂 (fracture) 也源自這個字, Benoit Mandelbrot 於 1975年創造了該詞, 為的是要描述在不同範圍裡都具有相同的不規則的奇怪幾何。本刊十五卷三期 (民國八十年九月) 曾刊登「混沌與碎形專題」, 有興趣的讀者可參閱。

當時 F. Hausdorff 綜合比較現有的理論發現：距離(metric),鄰域(neighborhood),極限(limit) 這三個觀念的關係為：

距離觀念  $\implies$  鄰域觀念  $\implies$  極限觀念

意思是在一個空間 (即一個抽象集合), 若從距離觀念出發就可以定義鄰域與極限; 若從鄰域觀念出發就可以定義極限, 但不能定義距離; 若從極限觀念出發不能定義鄰域也不能定義距離。因此 Hausdorff 選擇鄰域的幾個性質作為拓撲空間 (topological space) 公理化的定義; 也就是說利用鄰域的觀念建立起點集拓撲學公理化的基礎。

Hausdorff 於 1919 年引進 Hausdorff 維數 (Hausdorff dimension) 的概念, 這個新觀念可用來研究科赫雪片 ... 等複雜的曲線, 數十年後的碎形幾何 (或分形幾何) 更是依此來定義碎形維數 (或相似維數): 如果一個碎形  $S$  可以劃分成  $N$  個一樣大小 (在歐氏幾何的意義下) 的子集, 每一個都是原集合  $S$  的  $r$  倍, 則  $S$  之碎形維數  $D$  定義為

$$D \equiv \frac{\log N}{\log(1/r)}$$

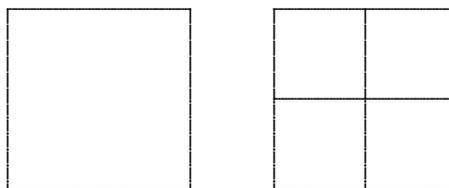
這實際上就是 Hausdorff 維數的簡單翻版。最初 Benoit Mandelbrot 定義碎形為一個集合其 Hausdorff 維數嚴格大於拓撲維數 (一個集合的拓撲維數總是整數), 但無論如何碎形維數是碎形幾何這門新興學問最重要的思想之一。

Hausdorff 除了引進 Hausdorff 維數之外還有 Hausdorff 測度 (Hausdorff measure) 這個重要觀念, 另外在拓撲學與泛函

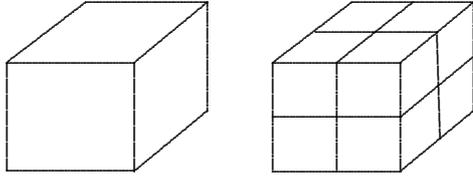
分析 (functional analysis) 中的距離空間 (metric space) 也是他的貢獻並由他所命名。

## 二. Hausdorff 維數

我們已經知道 Cantor 集之長度 (測度) 為零, 但這並不表示沒有東西, 通常歐氏空間的度量方法無法比較碎形之大小, 所以勢必要引進 Hausdorff 維數或碎形維數的概念。例如一個毛線球, 遠看是一點 (0 維), 近看是一個球 (3 維), 再細看又是一維的線所纏繞而成有著更精細的結構, 可見維數是與尺度有密切關係。要談這個新概念當然還是從日常生活中熟悉的觀念著手, 因為任何新的事物絕不會憑空而降, 而是對於原事物有更深入的認識。現在取一邊長都是 1 的正方形, 把它的邊長放大二倍, 所得的圖形為原來的四倍, 如下圖:



因此我們說這個圖形是二維的。同理取一邊長皆為 1 的立方體, 把每個邊都放大二倍, 則新的圖形為 8 個原來的立方體, 如下圖:



因此這是三維的。一般而言把一個  $d$  維的幾何對象，每一維的尺寸都放大  $\ell$  倍，我們得到  $k$  個原來的幾何對象。這三個數的關係為 取對數得

$$\begin{aligned} \ell^d &= k \\ d &= \frac{\ln k}{\ln \ell} \end{aligned}$$

換句話說，維數 (dimension) 可重新由此式而定義，而這正是 Hausdorff 於 1919 年所引進的 Hausdorff 維數 (Hausdorff dimension)。

測量的角度：

維數的看法可以從測量的角度來看，想像一個區域面積為  $S$ ，而利用半徑為  $r$  的小圓來覆蓋，基本上我們需要小圓的數目為

$$N = \frac{S}{\pi r^2} \propto \frac{S}{r^2}.$$

當然球愈小，半徑愈小，我們可以測得更準，但無論如何所需小圓之數目其比例總是  $\frac{S}{r^2}$ 。同理，用半徑為  $r$  的小球來填滿一體積為  $V_3$  之區域，所需小球的數目之比例為

$$N \propto \frac{V_3}{r^3},$$

一般情形在  $d$  維空間利用半徑為  $r$  之小球來填滿體積  $V_d$  之區域，所需之球數為

$$N \propto \frac{V_d}{r^d},$$

如果小球之半徑  $r$  維持不變，而將  $V_d$  之每個邊都放大為  $\ell$  倍，成為  $V_d^\ell = kV_d$ ，因此覆蓋  $V_d^\ell$  之球數為

$$N \propto \frac{V_d^\ell}{r^d} = \frac{kV_d}{r^d}$$

另一方面， $V_d$  維持不變，而把球的半徑縮小  $\ell$  倍，則需球數

$$N \propto \frac{V_d}{(\frac{r}{\ell})^d} = \frac{\ell^d V_d}{r^d},$$

比較這兩式得

$$\ell^d = k \implies d = \frac{\ln k}{\ln \ell}.$$

因此又回到 Hausdorff 之定義，利用此式我們可以用來定義非整數的空間維數。直接由此定義可得通常我們所熟悉的點、線、面、立方塊之 Hausdorff 維數，仍然是 0, 1, 2, 3 與平常的經驗完全吻合。這類整數維數的幾何對象有一個共同的特性：用低一維的尺度來量，得到無窮大  $\infty$ ；用高一維的尺度來量，得到零，唯有使用適當的尺度來量，才得到一個有限的數。例如我們可以說一個邊長為 2 的正方形：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{長度} = \infty & 1 \text{ 維尺度} \\ \text{面積} = 4 & 2 \text{ 維尺度} \\ \text{體積} = 0 & 3 \text{ 維尺度} \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \square \\ \text{2} \\ \text{2} \end{array}$$

Hausdorff 維數的抽象定義為：

$$d_f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} \right)$$

我們再回到 Cantor 集，由前面的製造過程中，若取  $(0, \frac{1}{3})$  為考慮對象，把尺度放大

$l = 3$  倍, 則與原來  $(0, 1)$  完全相符。同理, 對  $(\frac{2}{3}, 1)$  亦然, 因此  $k = 2$ , 於是由定義知

$$d_f = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.6309 \dots,$$

它的維數介於 0 (點) 和 1 (線) 之間, 不是一個整數, 而這也解釋了在前面所談 Cantor 集, 像點又不像點, 像線段又非像線段點之現象。

另外也可以由抽象定義這麼看  $C_n$  其線段長度為  $\epsilon = (\frac{1}{3})^n$ , 共有  $N(\epsilon) = 2^n$  個區間, 故

$$\begin{aligned} d_f &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} \\ &= \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.6309 \end{aligned}$$

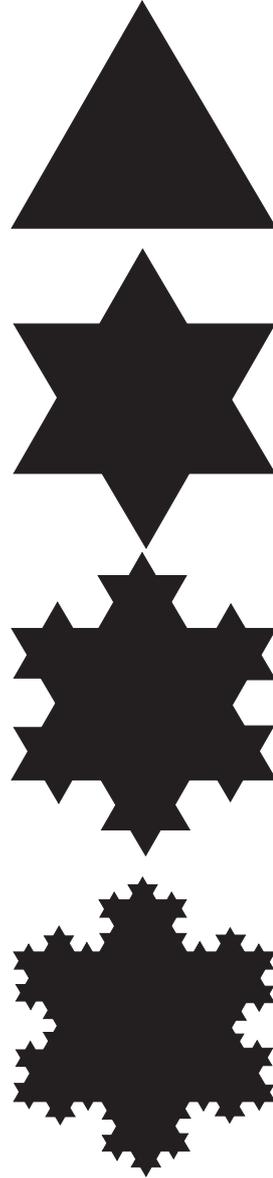
維數可以不是正整數! 這是全新的經驗, 同時也說明古典歐幾里得幾何的限制,  $d_f$  為非正整數也解釋了 Cantor 集的碎形 (fractal) 之本質。這是近代數學中最富革命性的發展, 藉著對 Cantor 集有更深入之瞭解, 也幫助動力系統 (dynamical system) 有長足之進展。

### 三. 二維的 Cantor 集

#### 科赫雪片

這個出名的例子是瑞典數學家科赫 (Helge von Koch, 1870-1924) 於 1904 年發現的, 我們從正三角形著手: 利用三分法將每一邊三等分後取中間那段造一新的正三角形向外豎立在原三角形各邊的中間, 於是得到六個為原三角形九分之一的正三角形: 第

二階段則在這新的六個正三角形重覆第一階段之作法, 而後依此步驟無限地繼續下去, 其極限之圖形就稱之為 科赫雪片。



科赫雪片前四個階段的構造

假設原正三角形之邊長等於 3 則科赫雪片之邊長可如此計算: 由正三角形之對稱性

我們僅需考慮其中一邊，新的圖形之邊長為前一個線段的三分之一，而數目則增加為四個，因此由歸納法知科赫雪片之邊長為

$$3 \times \left(\frac{1}{3} \times 4\right), 3 \times \left(\frac{1}{3^2} \times 4 \times 4\right), \dots,$$

$$3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n, \dots$$

$$\text{科赫雪片之邊長} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

而面積則仿邊長之討論：第一階段只增加一個正三角形第二階段增加四個正三角形依此類推故

$$1 + 3 \times \left(\frac{1}{9} \times 1\right) + 3 \times \left(\frac{1}{9^2} \times 4\right)$$

$$+ 3 \times \left(\frac{1}{9^3} \times 4^2\right) + \dots$$

$$= 1 + 3 \times \frac{1}{9} \left[1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \dots\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8}{5}$$

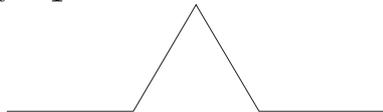
原正三角形之面積等於  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，因此科赫雪片之面積為  $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{\sqrt{3}}{10}$ ，以無限長的曲線卻僅圍住有限的面積，這實在是令人費解，其 Hausdorff 維數等於  $(l = 3, k = 4)$

$$d_f = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.26 \dots$$

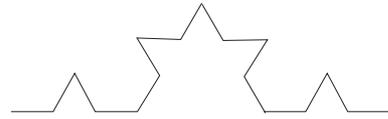
$n = 0$



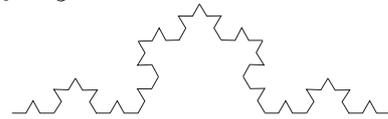
$n = 1$



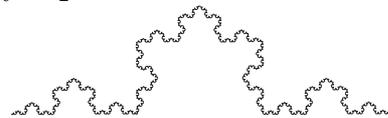
$n = 2$



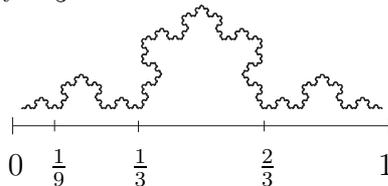
$n = 3$



$n = 4$



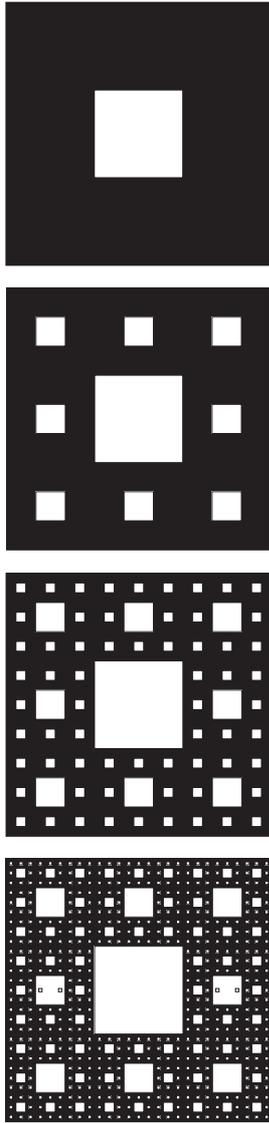
$n = 5$



三分法科赫曲線的構成，每一曲線所標示的  $n$  為曲線產生的階段。

### Sierpinski 地毯

處理完  $[0, 1]$  線段之 Cantor 集後，自然我們會猜測同樣的方法能否推廣至二維、三維空間等，答案是肯定的。由波蘭數學家 Sierpinski 作出例子是將正方形分成九個小正方形並挖去中間的一個。而餘下的八個正方形，每一個再分成九個小正方形並挖去當中的一個。這情形就像細胞分裂一般，新的小正方形如果用放大鏡來看，它必須與原先第一個正方形一樣，這過程就是自我相似 (self-similar)。



Sierpinski 地毯前四階段的結構，  
Hausdorff 維數  $d_f = \ln 8 / \ln 3 \doteq$   
1.89

$S_n$  可以用三進位的方式表達出來，其靈感與一維的 Cantor 集完全一致，只是現在同時要考慮  $y$  軸，依照三進位之法則； $x$  軸  $y$  軸都標記  $\{0, 1, 2\}$ ，因此仿照一維 Cantor 集

可知

$$S_{00} = \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \begin{aligned} x &= \frac{0}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots a_k \in \{0, 1, 2\} \\ y &= \frac{0}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \frac{b_3}{3^3} + \cdots b_k \in \{0, 1, 2\} \end{aligned} \right\}$$

$$\vdots$$

$$S_{22} = \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \begin{aligned} x &= \frac{2}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots a_k \in \{0, 1, 2\} \\ y &= \frac{2}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \frac{b_3}{3^3} + \cdots b_k \in \{0, 1, 2\} \end{aligned} \right\}$$

$$S_{ij} = \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \begin{aligned} x &= \frac{i}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots \\ y &= \frac{j}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \frac{b_3}{3^3} + \cdots \\ a_k, b_k &\in \{0, 1, 2\}, i, j \in \{0, 1, 2\} \end{aligned} \right\}$$

而現在  $S_1$  是將中間的正方形挖去，這相當於不取  $(1, 1)$ ，即

$$S_1 = \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \begin{aligned} x &= \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots, \\ y &= \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \cdots \\ (a_1, b_1) &\neq (1, 1), \\ a_k, b_k &\in \{0, 1, 2\}, k \geq 2 \end{aligned} \right\}$$

依此類推

$$S = \lim_n S_n = \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \begin{aligned} x &= \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots, \\ y &= \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \cdots, \\ (a_n, b_n) &\neq (1, 1), \\ a_k, b_k &\in \{0, 1, 2\} \end{aligned} \right\}$$

其面積之算法為如下：

$$\begin{aligned} S_1 &: (3^2 - 1) \times \frac{1}{3^2} \\ S_2 &: (3^2 - 1)^2 \times \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 \\ &\vdots \\ S_n &: (3^2 - 1)^n \times \left(\frac{1}{3^2}\right)^n \end{aligned}$$

即  $S_n$  由  $(3^2 - 1)^n$  個面積為  $\left(\frac{1}{3^2}\right)^n$  之正方形所構成

$$a(S_n) = (3^2 - 1)^n \times \left(\frac{1}{3^2}\right)^n = \left(\frac{8}{9}\right)^n,$$

故

$$a(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0.$$

我們同時也計算一下周長

$$\begin{aligned} \ell(S_1) &= 4 + \frac{4}{3} \\ \ell(S_2) &= 4 + \frac{4}{3} + 4 \times \frac{4}{3^2} = 4 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ &\vdots \\ \ell(S_n) &= 4 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n \\ \ell(S) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(S_n) = \infty, \end{aligned}$$

0 與  $\infty$  之間的差距實在是太大了，看來只有使用介於 1 與 2 之間的非整數維數才能測量出一個有限的“面積”，利用 Hausdorff 之方法知

$$k = 8, \quad \ell = 3,$$

因此 Hausdorff 維數為

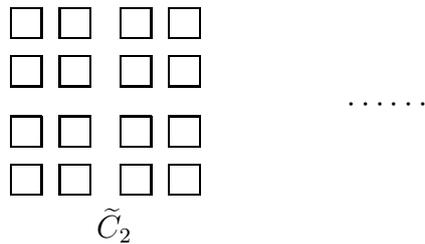
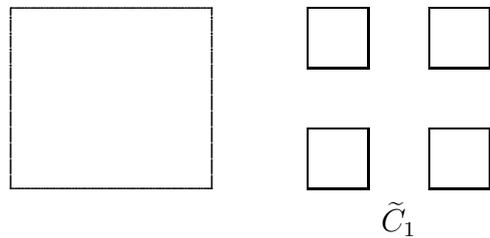
$$d_f = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 3 \frac{\ln 2}{\ln 3} = 1.8927 \dots$$

集合  $S$  我們稱為 Sierpinski 地毯，實際上它不再像地毯，而是一個很奇怪的曲線！

## 二維 Cantor 集

通常我們會以為 Sierpinski 地毯是二維的 Cantor 集，但這是錯的，原因是在一維的 Cantor 集我們是挖去中間的部份，同理對二維 Cantor 集，對  $x$  軸， $y$  軸都必須實行這個動作，這相當於挖去的是中間十字的部份，用三進位來表示為

$$\begin{aligned} \tilde{C}_n &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \right. \\ &\quad \left. y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}, a_i, b_i \in \{0, 2\}, 1 \leq i \leq n, \right. \\ &\quad \left. a_i, b_i \in \{0, 1, 2\}, i \geq n + 1 \right\} \\ \tilde{C} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{C}_n = \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \right. \\ &\quad \left. x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}, a_i, b_i \in \{0, 2\} \right\} \end{aligned}$$



還可以證明的是

$$\begin{aligned} a(\tilde{C}_1) &= \text{面積} \times \text{個數} = \frac{1}{3^2} \times 2^2 \\ a(\tilde{C}_2) &= \text{面積} \times \text{個數} = \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 \times (2^2)^2 \end{aligned}$$

∴

$$a(\tilde{C}_n) = \text{面積} \times \text{個數} = \left(\frac{1}{3^2}\right)^n \times (2^2)^n$$

$$a(\tilde{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(\tilde{C}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^n = 0$$

另外可證明的是

$$\tilde{C} = C \times C \text{ (二維Cantor 集)}$$

$$= (\text{一維Cantor 集}) \times (\text{一維Cantor 集})$$

關於其證明我們就此省略，讀者有興趣可嘗試看看。同理可計算其邊長

$$\ell(\tilde{C}_1) = \text{長度} \times \text{個數} = \left(\frac{1}{3} \times 4\right) = 4 \cdot \frac{4}{3}$$

$$\ell(\tilde{C}_2) = \text{長度} \times \text{個數} = \left(\frac{1}{3^2} \times 4\right) \times 4^2 = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

∴

$$\ell(\tilde{C}_n) = \text{長度} \times \text{個數} = \left(\frac{1}{3^n} \times 4\right) \times 4^n = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\ell(\tilde{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty.$$

利用 Hausdorff 之方法知

$$k = 4, \quad \ell = 3,$$

因此 Hausdorff 維數為

$$d_f = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 2 \frac{\ln 2}{\ln 3} = 1.2618 \dots,$$

而這個數目也正好是一維 Cantor 集之兩倍。這也說明為何  $\tilde{C}$  是二維 Cantor 集。

### Sierpinski 三角形

碎形中另一個著名的例子是 Sierpinski 三角形，由 Sierpinski 於 1915 年發展出來，其造法是從一正三角形出發：取每一邊之中

點而後將之連接起來形成四個新的小正三角形挖去中間的正三角形，於是得到三個為原正三角形四分之一的正三角形：第二階段則在這新的三個正三角形重覆第一階段之作法，而後依此步驟無限地繼續下去，其極限之圖形就稱之為 Sierpinski 三角形。

我們可以摹仿 Cantor 集的三進位表現式將 Sierpinski 三角形也表為類似的表現式，假設 Sierpinski 三角形的三個頂點  $A, B, C$  之座標分別是  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  則  $\triangle ABC$  (包含內部) 可表為  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  之凸組合 (convex combination);

$$\triangle ABC = \left\{ \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} \mid \begin{array}{l} 0 \leq \lambda, \mu, \nu \leq 1; \\ \lambda + \mu + \nu = 1 \end{array} \right\}$$

其次假設三角形  $\triangle ABC$  三邊  $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$  的中點為  $A' = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), B' = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}), C' = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$  則  $A, B', C'$  三點之凸組合為

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \nu_1 \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2}(\lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b} + \nu_1 \vec{c}), \\ & \quad 0 \leq \lambda_1, \mu_1, \nu_1 \leq 1; \quad \lambda_1 + \mu_1 + \nu_1 = 1 \end{aligned}$$

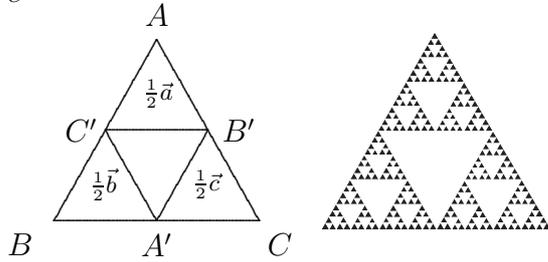
換句話說

$$\triangle AB'C' = \left\{ \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2}(\lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b} + \nu_1 \vec{c}) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \lambda_1, \mu_1, \nu_1 \leq 1; \\ \lambda_1 + \mu_1 + \nu_1 = 1 \end{array} \right\}$$

同理可得

$$\begin{aligned} \triangle A'BC' &= \left\{ \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2}(\lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b} + \nu_1 \vec{c}) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \lambda_1, \mu_1, \nu_1 \leq 1; \\ \lambda_1 + \mu_1 + \nu_1 = 1 \end{array} \right\} \\ \triangle A'B'C &= \left\{ \frac{1}{2} \vec{c} + \frac{1}{2}(\lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b} + \nu_1 \vec{c}) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \lambda_1, \mu_1, \nu_1 \leq 1; \\ \lambda_1 + \mu_1 + \nu_1 = 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

因此我們可以將這三個三角形分別標示  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$



由於 Sierpinski 三角形的造法是每次取三邊的中點，這個動作相當於將三個參數  $\lambda, \mu, \nu$  表為二進位

$$\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{2^i}, \quad \mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{2^i}$$

$$\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu_i}{2^i}, \quad \lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \{0, 1\}$$

三角形  $\triangle AB'C'$ ,  $\triangle A'BC'$ ,  $\triangle A'B'C$  裡面的  $\frac{1}{2}\vec{a}$ ,  $\frac{1}{2}\vec{b}$ ,  $\frac{1}{2}\vec{c}$  則表示第一次細胞分裂後分別取標明  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  的  $\frac{1}{4}$  正三角形，同理  $\frac{1}{2^2}\vec{a}$ ,  $\frac{1}{2^2}\vec{b}$ ,  $\frac{1}{2^2}\vec{c}$  則表示第二次細胞分裂後分別取標明  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  的  $\frac{1}{4}$  正三角形；所以各階段之 Sierpinski 三角形可表為

$$T_1 = \left\{ \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} \mid \lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{2^i}, \right.$$

$$\left. \mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{2^i}, \nu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu_i}{2^i}, \right.$$

$$\lambda_1 + \mu_1 + \nu_1 = 1;$$

$$\lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \{0, 1\};$$

$$\left. i = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

$$T_2 = \left\{ \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} \mid \lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{2^i}, \right.$$

$$\left. \mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{2^i}, \nu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu_i}{2^i}, \right.$$

$$\lambda_1 + \mu_1 + \nu_1 = \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2 = 1;$$

$$\lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \{0, 1\};$$

$$i = 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\dots\dots\dots$$

顯然我們可得底下之關係

$$T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \dots\dots\dots$$

Sierpinski 三角形則是  $T_n$  的極限； $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$

$$T = \left\{ \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} \mid \lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{2^i}, \right.$$

$$\left. \mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{2^i}, \nu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu_i}{2^i}, \right.$$

$$\lambda_i + \mu_i + \nu_i = 1; \lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \{0, 1\};$$

$$\left. i = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

我們計算一下 Sierpinski 三角形的周長與面積

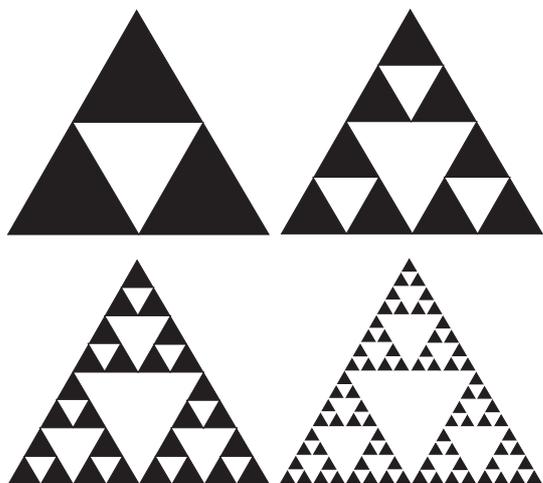
$$\text{周長} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \times 3^n \cdot l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot l = \infty$$

$$\text{面積} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} \times 3^n \cdot A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot A = 0$$

其中  $l$  與  $A$  是原正三角形的周長與面積。製造 Sierpinski 三角形的過程中新的正三角形的邊長為原正三角形的二分之一，而個數為三即， $l = 2$ ,  $k = 3$  所以 Hausdorff 維數等於

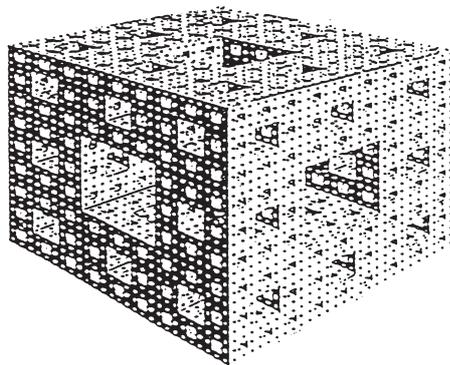
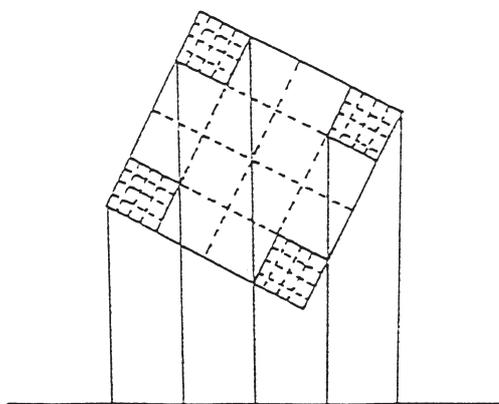
$$d_f = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585\dots$$

Sierpinski 三角形在極限的情形實際上並非一三角形，而是一條很詭異的曲線，實質上它是 Cantor 集在二維空間的一種變體。



Sierpinski 三角形創作過程中的前四階段的圖

可能你會懷疑所有經過自我相似過程之後，所得的幾何對象其 Hausdorff 維數必然是非整數，這顯然是誤導。考慮一正方形，將邊長4等分之後，得到16個正方形，只保留在角落上的4個正方形，而後再利用自我相似之過程繼續這個過程，如此分割下去，則最後之幾何對象之 Hausdorff 維數為  $d_f = \frac{\ln 4}{\ln 4} = 1$ ，由維數之意義而言，這是一直線，果真是如此嗎？



作個旋轉之後，將正方形按圖中之橫線投影到  $x$  軸，則無論分割多少次，留下來圖形始終將  $x$  軸之線段填滿，因此說明了  $d_f = 1$ 。

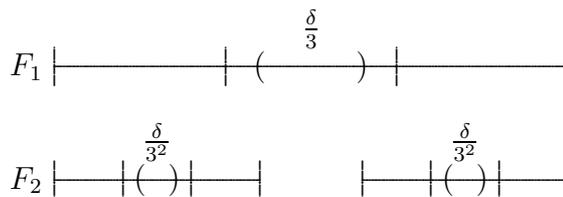
關於三維的立方塊 Sierpinski 海棉，我們也可以利用前面之方法可得

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \infty, & \text{體積} &= 0, \\ k &= 8 \times 2 + 4 = 20, & \ell &= 3, \end{aligned}$$

$$\text{Hausdorff 維數 } d_f = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2.7268 \dots$$

#### 四. 廣義 Cantor 集 (generalized Cantor set)

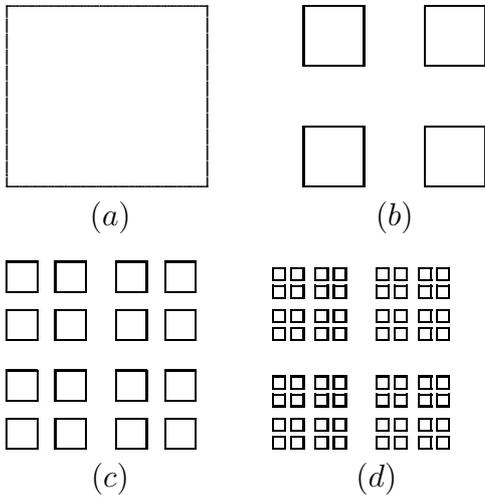
到目前為止，可能我們會有這樣的主觀認定，以為 Cantor 集的長度 (或面積、體積) 都是零，這完全是因為我們所作的圖形過於中規中矩所致，因此就有人突發異想如果不是挖去  $\frac{1}{3}$  而是  $\frac{\delta}{3}$ ,  $0 < \delta < 1$  呢？



此時  $F = \lim_n F_n$  之長度為

$$\begin{aligned} \ell(F) &= 1 - \left[ \frac{\delta}{3} + 2 \cdot \frac{\delta}{3^2} + 2^2 \cdot \frac{\delta}{3^3} + \dots \right] \\ &= 1 - \frac{\delta}{3} \left[ 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots \right] \\ &= 1 - \frac{\delta}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \delta \end{aligned}$$

同理也可試試平面的情形



我們可以如此假設，割去的十字形可以取其寬度使得十字形的面積為  $\frac{1}{4}$ ，同理第二次再割去  $\frac{1}{8}$  而後  $\frac{1}{16} \dots$  等，故二維 Cantor 集之面積為

$$\begin{aligned} a(\tilde{Q}) &= 1 - \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

而前面提到  $\tilde{Q}$  已經不再是平面的圖形，而是一條“詭異的線”竟然有面積，這與傳統上歐幾里得所定義曲線為“有長無寬”是完全相悖，

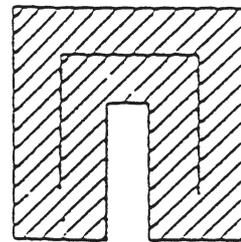
這其中的差別就是極限(limit) 的概念，畢竟牛頓與歐幾里得是相差將近二千年！我們說說這曲線怎麼造？首先得四個正方形的彎曲長條（ $\cap$ 字形），而後接在一起，然後再用自我相似的原則進行第二步驟等等所取的集合（長條）記之為  $B_n$ ，其關係為

$$\begin{aligned} B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots \\ B \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \end{aligned}$$

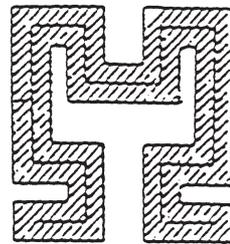
而且與  $\tilde{Q}_n$  比較可知

$$\begin{aligned} B_n \supseteq \tilde{F}_n, \quad \forall n \\ a(B) \geq a(\tilde{F}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

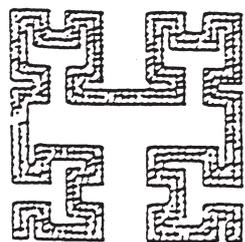
由圖形直觀而言， $B$  是非常“曲折的”且有面積的曲線。



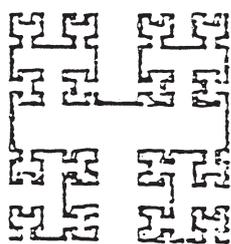
(a)



(b)



(c)



(d)

## 參考文獻

1. 拓樸學奇趣: 巴爾佳斯基, 葉弗來曼維契著,

亞東書局。

2. 混沌 (Chaos): James Gleick 著, 林和譯, 天下文化出版 (1991)。
3. 渾沌魔鏡 (Turbulent Mirror): John Briggs and F. David Peat 著, 王彥文譯, 牛頓出版公司 (1993)。
4. 漫談碎形: 張志三著, 新世紀物理研習叢書 2, 牛頓出版公司 (1996)。
5. 引起紛爭的金蘋果: 哲人科學家 — 康托爾, 業強出版社 (1997)。
6. N. Ya. Vilenkin; Stories about Sets (集的故事), 九章出版社, (1997).
7. E. Hairer and G. Wanner; Analysis by Its History, UTM Reading in Mathematics, Springer-Verlag (1995).
8. 數, 十進位與 Cantor 集: 林琦焜著, 數學傳播 (中央研究院數學所), 24卷4期, 民89年12月, 76-86。

—本文作者任教於成功大學數學系暨應用數學研究所—