數, 十進位與 Cantor 集

林琦焜

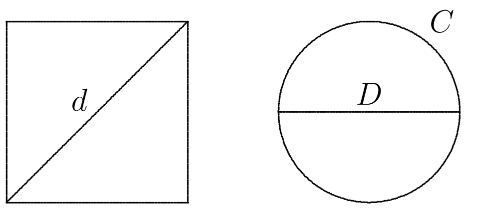
1. 數系簡史

習慣上我們還是先談一下數字的歷史。數字是一個基本的觀念, 甚至小朋友都知道“1”與“很多”之間是有極大之差別。藉由數字, 例如“49”吾人便可將許多不同之事物“量化”並“抽象化”。因此數字在某種意義底下是一個“名字”, 在我們現在看來, 數只是一個符號, 由這個符號我們可以作運算工作, 這觀念雖然簡單, 但是在古代, 即使希臘最偉大的數學家也無法理解。

$1, 2, 5, 143$, 等數稱爲正整數, 這是自人類開始計算以來便使用的數字。而負數的概念則遲至中世紀由印度人發展出來。直觀而言, 負數可視爲“負債”, “虧損”。正整數與負整數之集合則統稱爲整數 (integer), 如果數學只局限於計算 (counting) 那麼整數已足夠使用。但是一旦數學脫離“計算”之範圍, 例如過生日要切蛋糕, 此時由於“分割” (partition) 觀念之引進, 所以有分數之概念, 如

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2\frac{3}{4}, \ldots, -\frac{1}{5}, \cdots$$

這個新的數的成員就通稱爲 *有理數*[*] —— 任何可以用分數形式寫出來的數。而整個數系之推廣則是由於“測量” (measure) 概念之引進, 早在西元前六世紀, 古希臘數學家便發現: *每邊長爲 1 (單位) 的正方形, 其對角線長度是無法正確地測量出來*, 意思是不管用任何尺度來測量 (甚至是很細很細之刻度) 其長度始終無法正確衡量, 也無法寫成分數。



$d = \sqrt{2} = 1.414$ $\qquad \frac{C}{D} = \pi = 3.1415\cdots$

這主要的問題是“工具不對”, 用現存空間之工具來測量並不存在於此空間的事物, 當然怎麼量都有困難, 由此不難理解爲何不同宗教、 不同教派、 不同信仰的人對於“上帝”之理解與認識, 差距是那麼大。如果他

[*] 在英文 ratio 與 ration 之形容詞都是 rational, 因此有理數 是誤譯, 正確之翻譯爲 *比數*, 若要接納爲有理數則應視爲*理性可理解的數*, 而無理數 (非比數) 則是 *理性無法理解的數*, 但是按照希臘文原來的意思, 「無理」 所指的並非“沒有理性”, 而是“無法衡量”, 至少畢達哥拉斯是如此認爲。

的信仰沒有提昇, 則其信仰永遠是那麼狹窄 “Your God is too small”。同理對於有理數系也需要提昇、擴展, 以包含這一類新的數“無理數”, 無理數之發現可溯源至古希臘科學家畢達歌拉斯 (Pythagoras 582–507 B.C.), 最典型的例子除了$\sqrt{2} \approx 1.414\cdots$之外, 就屬圓周與直徑的比率 (圓周率), 現代數學家以希臘字母 π 代表這個比值, 因爲 π 是希臘文“周長”的第一個字母, π 的近似值是分數$\frac{22}{7}$

$$\pi \approx \frac{22}{7} = 3.1415\cdots$$

如果我們知道地球之周長, 便可以算出地球的半徑與每一個經緯度的周長, 假如沒有 π, 哥倫布 (Columbus Christopher 1451-1506) 和史蒂文生 (Rober Louis Stevenson 1850-1894) 便都不可能取得偉大驚人的成就。當人們開始使用圓時, 人類的文明才眞正開始。關於 π 的歷史與典故, 讀者可參考「神奇的π」一書 ([6])。

畢氏定理的直接推論就是正方形對角線的平方等於其中一邊平方的兩倍, 但是並沒有一個“正方形”的數字, 可以拆成兩個相等的平方數, 因此這個問題不能以我們現在所謂的有理數來解決。對角線是不能與邊用同一個標準 (或工具) 來計算。2的平方根, 記爲 $\sqrt{2}^{(*)}$, 是第一個有待發現的無理數, 這無理數在畢達歌拉斯的時代就已經知道了, 並且還發現巧妙的方法來求它的近似值。最好的方法如下: 考慮數列 (a_n, b_n), $n = 1, 2, 3, \cdots$ 滿足遞迴關係

$$a_1 = b_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + b_n,\ b_{n+1} = 2a_n + b_n$$

則最前面六個是 $(1,1)$, $(2,3)$, $(5,7)$, $(12,17)$, $(29,41)$, $(70,99)$, 計算可得

$$2a_n^2 - b_n^2 = \pm 1$$

除以b_n^2並令$n \to \infty$

$$2\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 - 1 = \pm\frac{1}{b_n^2} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

換句話說, $\frac{b_n}{a_n}$ 差不多就是 $\sqrt{2}$ 而且每下一步就越來越接近, 例如讀者將滿意地發現

$$\left(\frac{99}{70}\right)^2 \approx 2.000204$$

該數與2相比可精確至小數點第三位! 畢達哥拉斯學派所發明的這一套方法, 就是以一連串的近似值來尋找這些捉摸不定的數目, 稱之爲連續分割法。數列中, 近似值的位置都在過與不及之間交替出現, 且以逐漸縮小的差額逼近目標, 但是, 基本上這個過程是無限的, 其極限也就是所要尋找的無理數。這個方法指出一個要點: 我們能隨心所欲地求得近似極限值的有理數, 這個特色的確是合於現代的極限觀念。畢達歌拉斯是個謎樣的人物, 但卻是第一個把幾何學當作一種才藝的人, 他還有另一位與他齊名的古希臘數學大師, 泰爾斯 (Thales 640-546 B.C.), 都是腓尼基人的後裔。除了2的平方根, $\sqrt{2}$, 之外其他的無理數在特殊的例子裡也曾經被與蘇格拉底同時代的狄奧多羅斯研究過, 並且曾以更普遍的方式被泰阿泰德研究過, 泰阿泰德與柏拉圖大致同時期或稍早些。

$*$ 西元1522年, 法國的 Adam Riese 就是把平方根寫成這個形式印刷成書。

無理數的發現導致了攸多克索 (Eudoxus 408 - 355 BC) 的比例論, 一門關於比例的幾何理論, 用幾何方法處理同類兩個幾何量之比。在他之前, 只有關於比例的算術理論, 按照這理論

$$ad = bc \quad \Longleftrightarrow \quad a : b = c : d \quad (\frac{a}{b} = \frac{c}{d})$$

這種界說, 在還沒有關於無理數的幾何理論時就只能應用於有理數。但攸多克索提出的的比例論並不受此限制, 其構造的方式暗示了近代的數學分析方法, 其運用的方法本質上類似於 Weierstrass(1815 - 1897) 所介紹給19世紀的數學分析方法, 於是比例論就避免了有關無理數的種種困難。比例論與音樂有極密切之關係, 由於對音樂的興趣, 畢達哥拉斯發現了所謂諧音程的一種簡單的數值 (比例) 關係, 一根調好的弦, 如果長度減半 1/2, 則會發出一個八度音, 同樣的, 如果長度減到3/4, 我們就會得到第四度音程, 如果減至2/3, 則得到第五音程, 第四和第五音程合起來成爲一個八度音也就是 $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, 這些音程與調和級數中的 $2 : \frac{4}{3} : 1$ 的比率一致。畢達哥拉斯發現了數在音樂中的重要性, 數學名詞裡的*調和中項*, *調和級數*, 就仍然保存著畢達哥拉斯爲音樂與數學之間所建立的那種聯繫。這些在音樂上的發現很可能引伸出 “*萬物皆數*”的概念。因此爲了瞭解這圍繞我們的世界, 我們必須在萬物之中找到“數”來。一旦掌握住數的結構, 就掌握住這世界, 這確實是一個非常重要的概念。儘管它的意義在古希臘時代之後曾遭到暫時的隱蔽, 但是當學術復甦之後, 特別是文藝復興, 對古典產生新的興趣時, 它又再度被人們瞭解, 它是現代科學觀的一個重要特徵, 在畢達哥拉斯身上, 我們第一次發現不完全聽命於實際與應用的數學興趣。埃及人曾有一些數學的知識, 但絕對不超過它們所建立的金字塔, 和測量其田地所需。古代中國人也曾有四大發明, 但唯有希臘人開始研究一些事物(純粹爲了研究的緣故), 而畢達哥拉斯就是其中最主要的一位, 是希臘人使得科學成形。例如, 泰爾斯 (Thales) 曾說過: *我認爲天地萬物, 都是由不同形態的水所構成*。那便是一個科學的概念。也許他是錯的, 但這無關緊要, 這就是從事科學研究的方法。泰爾斯 (Thales) 還說過: *所有的圓, 都被它們的直徑所平分*。所以是希臘人發明了幾何, 不是埃及人也不是中國人。傳說泰爾斯 (Thales) 在埃及的時候法老王曾經要他計算金字塔的高度, 他等到太陽照出他自己影子的長度與他的身高相等的時候, 再去量金字塔影子的長度, 這個影子的長度當然就是金字塔的高度。

攸多克索的比例論後來由歐幾里德 (Euclid 300 – ??? B.C.) 所發揚光大, 由於比例論的成就, 使得幾何學成爲古希臘數學的主流, 代數問題幾乎全用幾何的方法來處理。歐幾里德的“幾何原本”毫無疑問是古往今來最偉大的著作之一, 是古希臘數學的結晶, 人類理智最完美的紀念碑之一。雖然比例論解決了一些無理比 (即無理數) 的問題, 但它卻不把量比當作數, 使得算術與代數的發展受到限制, 這是古希臘數學的最大缺陷。

攸多克索 (Eudoxus) 還發明了 (或者是完成了)“窮盡法” (method of exhaustion), 後來由阿幾米德 (Archimede 287? - 212 B.C.) 所發揚光大, 這個方法是對積分學的一種預見。窮盡法有時候可以得出精確的結果, 例如阿幾米德所做拋物線形之面積, 有時候只能得到不斷的近似, 我們以圓面積爲例, 求圓面積的問題本質上就是決定圓周與直徑的比率問題, 這個比率叫作 π。阿幾米德在計算中使用了 $\frac{22}{7}$ 的近似值, 他做了內接與外切正 96 邊形, 從而證明 $3\frac{10}{71} \le \pi \le 3\frac{1}{7}$。你也可以內接一正 n 邊形 ($n \ge 3$), 這樣一個多邊形無論它是多少邊, 其面積總是與圓的直徑的平方成比例, n 愈大就愈接近圓的面積。可以證明, 只要你能夠使得這一個多邊形有足夠多的邊, 就可以使得它的面積與圓面積之差小於任意預先給定的正數, 無論這一個預先指定的正數是多麼地小。由此就引進了“阿幾米德公理”, 這一公理是說: 任意給定兩個正數, 把較大的一個平分爲兩半, 把一半再平分爲兩半, 如此繼續下去, 則最後就會得到一個新的數小於原來較小的那個數

阿幾米德公理: 已知 $a > b > 0$, 則存在正整數 n 使得 $2^n b > a$ 或 $\frac{a}{2^n} < b$。

無理數的出現豐富了數系的內涵與生命。但似乎還缺了些什麼, 沒錯那就是“0”, 人總是將最親近的人、事、物忽略了。在古羅馬的數系中並沒有“0”。現在所使用的“0”是西元前 600 年左右由印度數學家所提出的, 同時他們也發表關於 0 的運算法則: 任何數與 0 相乘等於 0, 與 0 相加減仍爲原數, 被 0 除無意義: $\frac{0}{0}$ 這種分數形式也是無意義。“0”這個符號在印度文是“sunya”這個字, 它的意思是“空 (empty)”, 把 0 看作“沒有”或“零 (nothing)”則是後來才加進去的。由於“0”或“sunya”的發明, 用它來代表算盤上的空檔, 人類才從算盤框的束縛中掙扎出來, 這在整個數學史可以說是最大的進步, 這是印度文化的特點: 一些並不是大數學家的人卻發明了連古希臘, 亞歷山大數學家們所想不到的符號來代表零 (nothing)。今天我們所稱的阿拉伯數字$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 實際上是印度的貢獻, 而這就是十進位計數法的基礎, 如今已公認是一項劃時代的進步。大約西元830年阿拉伯的梵文數學, 天文學書籍翻譯學者, Mohammed ben Musa Al-Khowarizmi (譯爲花拉子模), 刊行了一本名爲 印度計數法 的書, 這本書在西元十二世紀被譯爲拉丁文。西方就是從這本書學到我們稱爲 阿拉伯數字 的東西。此人又寫一本關於代數學的書*Al-jabr w'al muqabala*, 到十六世紀止這本書曾被西方使用爲教科書, 演算法 (algorithm) 一詞正是源自他的名字, Al-Khowarizmi。

當含有“位”的意義之計數法出現時, 同時印度人也發現了近代數學的基礎 — 代數 (Algebra)。法國大數學家 Laplace, 作過底下之評語:

印度人帶給我們這種精采的方法, 可以藉由十個符號來表示所有的數。每一個符號除了它本身所表示的絕對數值之外, 還有“位”的意義, 這是一個極重要且非常奧妙的觀念, 它使得算術 (arithmetic) 被列爲最有用的發明。這個方法連人類歷史上最偉

大的數學家阿基米德與阿波羅尼斯都未能想到, 這可讓我們體會其成就之偉大。

無窮大"∞"的概念是由阿基米德首次提及。有了零和無窮大的概念, 對數系才有完整的認識。但是整個故事卻並不因此而結束, 最直接的難題是衆所周知任一實數的平方皆非負數, 那麼是否存在一個數x, 其平方爲負數, 例如 $x^2 = -3$, 歷史上第一個遇見這個問題是義大利數學家 Cardano (1545), 問題如下: 已知一線段長度等於10, 試將線段分成兩段並圍成面積等於40的矩形? 常識告訴我們這個線段所能圍成的最大面積是25的正方形, 因此這問題沒有眞實解 (real solution), 但代數卻給我們一個解:

$$x(10-x)=40 \quad \Longrightarrow \quad x^2-10x+40=0$$

由代數的運算法則可得其解爲 $5+\sqrt{-15}$, $5-\sqrt{-15}$ 而且

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=25-(-15)=40$$

此時便發生這樣的問題: -15 或 -1 的平方根是甚麼? 這個問題直到瑞士數學家 Euler 提出虛數的概念 $i=\sqrt{-1}$, 才告完全解決。包含 i 的數皆稱爲虛數 (實則虛也, 虛則實也), 而複數則包含實數與虛數兩部份, 例如 $2+3i$。最早遇見這種奇怪的數的數學家稱之爲"虛數 (imaginary number)", 似乎是把它們扔到虛空中去, 事實上, 在高斯 (Gauss) 的複數理論, 我們眞的可以在"虛"之中找到這些數。

我們無法想像 -4 公尺的平方是什麼樣子, 然而虛數在物理及工程上卻很有用, 這實在是有點不可思議。雖然乍看之下, 負數的平方根似乎是不可能的, 它違背了負負得正的規定, 但無庸置疑的是, 虛數已經發展的非常完整, 儼然是數字家族正式的成員之一, 且是不可或缺的一員。許多數學定理如果用實變數的函數來證明, 都不如用複變數 (實數加虛數) 函數來得簡單、完整。我們以一般的 Fibonacci 數列爲例

$$x_{n+2}=px_{n+1}+qx_n, \quad x_0, x_1\text{爲已知}$$

若 $p=q=1$ 時這就是著名 Fibonacci 數列, 爲著方便, 我們考慮 $p=4, q=-8, x_0=x_1=1$, 簡單地計算可得前面幾項

$$1,1,-4,-24,-64,-64\cdots$$

至於第 n 項是否有一般的公式呢? 答案是肯定的, 運用二次方程式之根與係數的關係, 我們可以將原數列化成兩個等比數列 (參考 [8]), 或者就乾脆直接假設 (想像成等比數列)

$$x_n=kz^n$$

代回原來的遞迴關係式

$$kz^{n+2}=4kz^{n+1}-8kz^n \Leftrightarrow z^2=4z-8$$

這個二次方程式的兩個根是

$$z=\frac{4\pm\sqrt{16-32}}{2}=2\pm 2i=2^{\frac{3}{2}}e^{\pm i\pi/4}$$

值得注意的是此時我們有兩個 z 值 (等比級數只有一個 z 值) 所以底下兩個都是解

$$\hat{x}_n=k_1 2^{\frac{3n}{2}}e^{in\pi/4}, \quad \tilde{x}_n=k_2 2^{\frac{3n}{2}}e^{-in\pi/4}$$

* 代數 (algebra) 一詞源自阿拉伯文 Al-jabr 意即 還原與簡化, 阿拉伯人所用的簡化形式, 就是我們所說的方程式 (equation), 因此所謂解方程式, 乃是指將它用一種易於瞭解的形式寫出來。

因此通解則是

$$x_n=\hat{x}_n+\tilde{x}_n=k_1 2^{\frac{3n}{2}}e^{in\pi/4}+k_2 2^{\frac{3n}{2}}e^{-in\pi/4}$$

係數k_1,k_2可由初值來決定 ($x_0=x_1=1$)

$$k_1+k_2=1,\quad k_1 2^{\frac{3n}{2}}e^{in\pi/4}+k_2 2^{\frac{3n}{2}}e^{-in\pi/4}=1$$

解此聯立方程組

$$\begin{aligned} k_1&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i=\frac{1}{4}\sqrt{5}e^{i\tan^{-1}(1/2)}\\ k_2&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i=\frac{1}{4}\sqrt{5}e^{-i\tan^{-1}(1/2)}\end{aligned}$$

由此可得 (有點複雜)

$$x_n=2^{\frac{3n}{2}-2}\sqrt{5}\Big[e^{i\{(n\pi/4)+\tan^{-1}(1/2)\}}+e^{-i\{(n\pi/4)+\tan^{-1}(1/2)\}}\Big]$$

再由 Euler 公式化簡為

$$x_n=2^{\frac{3n}{2}-2}\sqrt{5}\cdot 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}+\tan^{-1}(\frac{1}{2})\right)$$

令

$$\begin{aligned}\cos\Big(\tan^{-1}(\frac{1}{2})\Big)&=\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \sin\Big(\tan^{-1}(\frac{1}{2})\Big)&=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

所以由三角公式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 得到 x_n 的公式

$$x_n=2^{\frac{3n}{2}-1}\Big[2\cos(\frac{n\pi}{4})-\sin(\frac{n\pi}{4})\Big],\quad n=0,1,2,\cdots$$

我們驗證一下這個公式很容易就知道

$$\begin{aligned}x_0&=2^{-1}(2\cos 0-\sin 0)=1\\ x_1&=2^{\frac{1}{2}}\Big(2\cos\tfrac{\pi}{4}-\sin\tfrac{\pi}{4}\Big)=1\end{aligned}$$

另外由遞迴公式直接計算$x_{11}=-98,304$, 但由這個公式

$$\begin{aligned}x_{11}&=2^{\frac{33}{2}-1}\Big(2\cos(\frac{11\pi}{4})-\sin(\frac{11\pi}{4})\Big)\\ &=2^{15}\sqrt{2}\Big(2\cos(\frac{3\pi}{4})-\sin(\frac{3\pi}{4})\Big)\\ &=2^{15}\sqrt{2}\Big(-\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\\ &=-3\cdot 2^{15}=-98,304\end{aligned}$$

如果回到 Fibonacci 數列 ($p=q=1$) 則

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}-\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}\Big],\quad n=0,1,2,\cdots$$

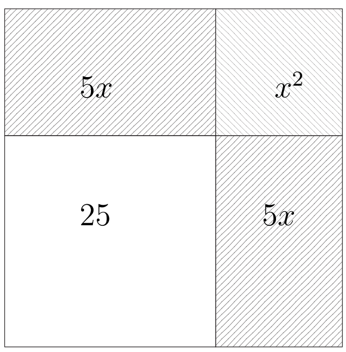
如果方程式含有複變數, 我們可以把該方程式分成實數部份及虛數部份來分開計算 (例如量子力學的 Schrödinger 方程), 複變數包含有兩個分量的特性與向量頗為相似。實際上, 複數可以表為平面向量, 從此就可以"看"出來它像什麼。

在直流電路裡, 電壓通常用實數來表示, 而在交流電路裡, 則可用複數來描述電壓的振幅及相位。在無損耗的介質裡, 折射率通常是實數; 而在有損耗的介質裡, 折射率會包含一虛數項用來表示光被介質吸收的情況。至於量子力學, 複數的使用更是家常便飯, Schrödinger方程就公然包含 -1 的平方根, $\sqrt{-1}=i$。在狹義相對論 (special relativity) 裡, 假如時間以虛數來表達, 那麼我們寫出來的四維方程式就相當漂亮。

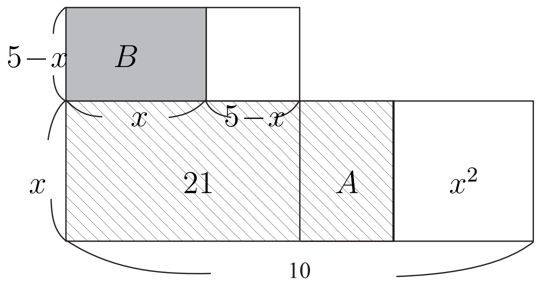
關於數系的來源, 我們可利用代數方程式根的問題來討論。我們的前提是 *所有的方程式都有解*, 而問題是"解在何方?"

$$
\begin{array}{cccc}
x-1=0 & \Longleftrightarrow & \text{正整數} & \mathbb{N} \\
x+1=0 & \Longleftrightarrow & \text{整數} & \mathbb{Z} \\
2x+1=0 & \Longleftrightarrow & \text{有理數} & \mathbb{Q} \\
x^2-2=0 & \Longleftrightarrow & \text{實數} & \mathbb{R} \\
x^2+1=0 & \Longleftrightarrow & \text{複數} & \mathbb{C} \\
 & \vdots & &
\end{array}
$$

換句話說, 整個數系可以利用擴張 (extension) 的概念來處理。上面最後兩個方程式, 稱爲二次方程式 (quadratic equation), 這個字是從拉丁文 (quadratum) 演變而來意思是“四方形”。例如, 在花拉子模的代數學名著, *Al-jabr w'al muqabala*, 有兩個例題; 第一個例題 $x^2+10x=39$, 他先畫一個邊長等於 x 的正方形代表 x^2, 相鄰兩邊各延長五單位, 再和 x 長的邊形成兩個長方形以代表 $10x=5x+5x$, 方程式告訴我們這一個 L 形的圖形的面積等於39, 把邊長等於5的正方形畫出來, 則全面積等於 $25+39=64=8^2$, 因此 $x+5=8$, 所以 $x=3$, 同理可得 $x=-13$。



另一個例題; $x^2-10x+21=0$, 或 $x^2+21=10x$, 此時 x 一次項之係數爲負, 因此需要不同的圖形, 一樣先畫一個邊長等於 x 的正方形代表 x^2, 再將正方形延長成爲一邊長分別是10和 x 長的矩形以代表 $10x$, 方程式告訴我們增加出來之矩形的面積等於 $10x-x^2=21$, 其次將大的矩形分成兩半畫一個邊長等於 5 的正方形, 由圖形可知陰影部份之面積等於小的矩形之面積, $10x-x^2=21$, 所以空白正方形之面積等於 $25-21=2^2=(5-x)^2$, 故$x=3$, 同理可得$x=7$。現在的教科書已不再用圖形來解方程式。



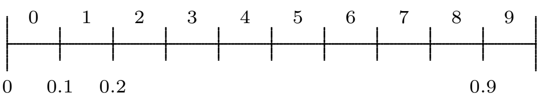
現在一般使用的數系是來自阿拉伯的數系, 阿拉伯數系則根基於印度。此一數系之每一個數的位置都有意義, (個位, 十位, 百位, 千位,...), 使用基本數字 (即阿拉伯數字) $0,1,\ldots,9$ 就可構成任何數。這種十進位法是 阿德拉德 (Adelard) (享譽於12世紀) 於西元1120年左右引進歐洲, 而到西元1600年時幾乎被世界各國所採用。巴斯 (Bath) 的阿德拉德在西元1120年化裝成回教徒到 Cordova 讀書, 把歐幾里德與花拉子模 (Mohammed ben Musa Al-Khowarizmi) 等人的著作翻譯成拉丁文, 並加進阿拉伯的天文表。從此之後, 對古希臘數學 (特別是幾何學) 的研究逐漸在西方復活起

來, 但是一直要到文藝復興的晚期才有重大的進展。

我們現在就談十進位的深一層意義: 任意數可表爲以 10 爲底的級數, 例如

$$124 = 1\times 10^2 + 2\times 10^1 + 4\times 10^0$$
$$3.75 = 3\times 10^0 + 7\times 10^{-1} + 5\times 10^{-2}$$
$$0.a_1a_2\cdots a_n = a_1\times 10^{-1} + a_2\times 10^{-2} + \cdots + a_n\times 10^{-n}$$
$$a_i\in\{0,1,2,\ldots,9\},\ 1\le i\le n$$

爲了簡便, 我們只討論介於 0 與 1 之間的實數。由於是十進位, 其精神基本上就是十等分



而任一數被 10 除之後的餘數是 $\{0,1,\ldots,9\}$, 這正是阿拉伯數字。而在線段 $[0,1]$ 之間則分別代表第一段至第十段

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 第一段 \\ 1 & \longrightarrow & 第二段 \\ & \vdots & \\ 9 & \longrightarrow & 第十段 \end{array}$$

而且此時除了代表該位置之外, 同時也指出其表現式

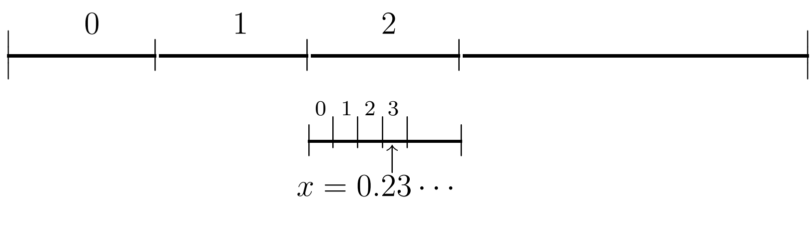
$$\begin{array}{ccc} 第一段 & \longrightarrow & 0.0a_2a_3\cdots \\ & \vdots & \\ 第十段 & \longrightarrow & 0.9a_2a_3\cdots \end{array}$$

同理, 我們將上述的動作再重複一次就好比細胞分裂一般, 這個過程就稱之爲自我相似 (self–similar), 而後再依此類推, 由此可知在 $[0,1]$ 之間的數表爲十進位

$$x = 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots$$

a_1 所代表的就是第一次細胞分裂所代表的位置, 而 a_2 則代表該段再經過第二次細胞分裂後所取的位置, 例如

$$x = 0.23\cdots = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots$$

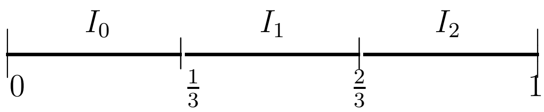


這就是十進位的精神, 當然取十等分是十進位, 如果取二等分, 三等分 ... 則分別是二進位, 三進位, 其基本原則都是一樣 —— 細胞分裂。然而透過這個簡單原理, 卻是足以描述這複雜的世界, 近 20 年來由於電腦的進步導致我們對這複雜的世界有更深刻的認識, 同

時也對傳統的數學提出嚴厲的挑戰, 最典型的就是碎形 (fractal) 及其相關的混沌理論 (Chaos), 在下一節我們就介紹其中最著名的例子—— Cantor 集。

2. Cantor 集

我們在這節從三進位來談 Cantor 集, 這對近代數學有極大的影響。我們從 $[0,1]$ 這個區間來談起, 首先將之三等分 I_0, I_1, I_2



$I_0=[0,\frac{1}{3}],\quad I_1=[\frac{1}{3},\frac{2}{3}],\quad I_2=[\frac{2}{3},1],$

我們現在用三進位來討論所作這個動作的代數意義

$$x\in I_0=[0,\frac{1}{3}] \qquad \Longrightarrow \qquad 0\le x\le \frac{1}{3}$$

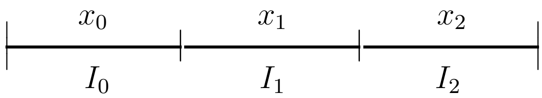
因爲最大爲 $\frac{1}{3}$, 若以三進位來表示爲

$$x_0=\frac{0}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots\in I_0, \quad a_i\in\{0,1,2\},\ i\ge 2$$

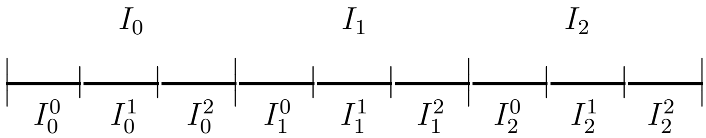
同理

$$x_1=\frac{1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots\in I_1, \quad a_i\in\{0,1,2\},\ i\ge 2$$
$$x_2=\frac{2}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots\in I_2, \quad a_i\in\{0,1,2\},\ i\ge 2$$

這說明了一件事實 $a_1=\{0,1,2\}$ 所代表的就是點 x 落在區間 I_0, I_1, I_2 的意思, 而 $\{0,1,2\}$ 正是被 3 除了之後的餘數。



同理我們可以將 I_0, I_1, I_2 再次三等分, 這個動作就好比是細胞分裂, 我們稱爲自我相似 (self–similar)



與前面的分析相同, 可知

$$I_0^0=\Big\{\frac{0}{3}+\frac{0}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots\,\Big|\,a_i\in\{0,1,2\}\Big\}$$
$$I_0^1=\Big\{\frac{0}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots\,\Big|\,a_i\in\{0,1,2\}\Big\}$$
$$\vdots$$
$$I_2^1=\Big\{\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots\,\Big|\,a_i\in\{0,1,2\}\Big\}$$
$$I_2^2=\Big\{\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots\,\Big|\,a_i\in\{0,1,2\}\Big\}$$

因此我們知道在三進位中

$$x=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots \qquad a_i\in\{0,1,2\}$$

a_i 所代表的意義爲第 i 次取三等分之中的某一等分。

有了這個預備知識之後, 我們現在考慮取三等分之後挖去中間的部份

三分法Cantor 集的造法

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots \mid a_1 \in \{0,2\}, a_i \in \{0,1,2\},\ i\geq 2\}\\
C_2 &= \{\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots \mid a_1, a_2 \in \{0,2\},\ a_i \in \{0,1,2\},\ i\geq 3\}\\
&\vdots\\
C_n &= \{\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots \mid a_1,\ldots,a_n \in \{0,2\}, a_i \in \{0,1,2\},\ i\geq n+1\}
\end{aligned}
$$

C_n 表示 2^n 個長爲 $(\frac{1}{3})^n$ 之閉區間線段, 全長爲

$$\ell(C_n) = 2^n \cdot (\frac{1}{3})^n = (\frac{2}{3})^n$$

C_i 之關係爲

$$C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots$$

我們總是有著如此之誘惑, 當 $n\to\infty$ 時 C_n 像什麼樣子。(沒有好奇心是學不好數學的)

$$C \equiv \lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

C 就是鼎鼎大名的 Cantor 集。表爲三進位爲

$$C = \{\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots \mid a_i \in \{0,2\}\}$$

而長度則爲

$$\ell(C) = \lim_{n\to\infty} \ell(C_n) = \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$$

集合 C 有多少點呢? 由 C 的表現式知 a_i 有兩種選擇機會, 故有點數

$$o(C) = 2^{\infty} = c$$

在數學中稱爲不可數無限 (uncountable)。

這實在有點詭異, Cantor 集之長度爲零卻有無窮多點 (不可數), 那到底要如何來測量它的大小呢? 我們以前學校接觸幾何時就被教導說點爲零維, 直線爲一維, 那麼 Cantor 集呢? 傳統的方法在此就發生困難了, 因此需要引進 *Hausdorff* 測度 (Hausdorff measure) 與 *Hausdorff* 維數 (Hausdorff dimension) 的概念, 這是 Hausdorff 於1920年代發展出來的。關於這主題, 我們將在下一篇文章討論。

参考文獻

1. 大衆數學:Lancelot Hogben 著, 胡樂士譯, 徐氏基金會出版。

2. 數學漫談: 時代生活雜誌社, 傅溥譯, 美亞圖書公司。
3. 混沌 (Chaos): James Gleick 著, 林和譯, 天下文化出版 (1991)。
4. 渾沌魔鏡 (Turbulet Mirror): John Briggs and F. David Peat 著, 王彥文譯, 牛頓出版公司 (1993)。
5. 漫談碎形: 張志三著, 新世紀物理研習叢書2, 牛頓出版公司 (1996)。
6. 神奇的π: 大衛·布拉特納著, 潘恩典譯, 商周出版 (1999)。
7. 費馬最後定理: 阿米爾·艾克塞爾著, 林瑞雲譯, 時報出版 (1999)。
8. 從等比級數談起, 林琦焜著, 數學傳播 (中央研究院數學所), Vol. 86, p.42–53 (1998)。
9. E. Hairer and G. Wanner; Analysis by Its History, UTM *Reading in Mathematics*, Springer-Verlag (1995).
10. Paul J. Nahin; An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$, Priceton Univ. Press, (1998).

—本文作者任教於國立成功大學數學系暨應用數學研究所—