Rick Schoen, Yamabe 問題與正質量定理

鄭日新

今年 (2000) 五月中, 史丹佛大學的 Rick Schoen 教授來台, 我們做了一個專訪 (見本期另文)。爲了讓大家對他的工作有些瞭解, 本文嘗試介紹他在 Yamabe 問題方面的工作。

在早期, 度量的保角變換在曲面理論裡扮演重要的角色。譬如說, 複分析單值化定理 (uniformization theorem) 的一個結論是每一曲面都有一常曲率的保角度量。這對曲面的同胚類提供了一個標準模型, 把拓樸問題轉化爲微分幾何的問題。

推廣到高維度時, 因爲曲率張量有極多獨立分量, 同時度量的保角變換只容許選擇一個未知函數, 很淸楚辦不到有常曲率的保角度量。但如果只要求純量曲率 (scalar curvature) 爲常數, 則我們是在找一個未知函數滿足一個條件。這就是所謂的 Yamabe 問題。

Yamabe 問題: 令 (M,g) 表一維數大於或等於3的閉 (緊緻無邊) 黎曼流形。找一個保角於 g 的度量, 使其純量曲率爲常數。

在 1960 年, H. Yamabe [17] 試圖用變分及橢圓偏微分方程的辦法解決這個問題。他宣稱證明了上述命題。不幸地, 於 1968 年, Neil Trudinger [15] 發現他的證明有錯。Trudinger 能修補 Yamabe 的證明, 但對流形須有限制條件。爲了瞭解這個限制條件, 讓我們描述一下 Yamabe 的作法。

任何保角於 g 的度量可以寫成 $\tilde{g} = \varphi^{p-2}g$, 這裡 $p=2n/(n-2)$, $n=\dim M$。如果用 $\tilde{S}$ 及 S 分別表 $\tilde{g}$ 及 g 的純量曲率, 他們之間轉換關係如下:

$$\tilde{S} = \varphi^{1-p}(a\Delta\varphi + S\varphi)$$

這裡 $a=4(n-1)/(n-2)$。所以 $\tilde{g}=\varphi^{p-2}g$ 有常純量曲率λ 若且唯若 φ 滿足 Yamabe 方程:

$$\Box\varphi = \lambda\varphi^{p-1}, \quad 這裡\ \Box = a\Delta + S. \qquad (1)$$

這是一種非線性固有值問題。這種方程的解析性質與指數 p 的值強烈相關: 當 $p=2$ 時, 方程只是 $\Box$ 的線性固有值問題。當 p 接近2時, 它的解析行爲頗類似於線性的情況。當 p 很大時, 奠基於線性理論的方法完全不能用。在 Yamabe 方程裡的 $p(=2n/(n-2))$ 正好是臨界值, 比它小方程容易解, 比它

大方程無解。這說明了 Yamabe 問題解析上的複雜性。

Yamabe 觀察方程 (1) 是下列泛函的 Euler-Lagrange 方程:

$$Q(\tilde{g}) = \int_M \widetilde{S} dV_{\tilde{g}} / (\int_M dV_{\tilde{g}})^{2/p}.$$

這裡 $\tilde{g}$ 是保角於 g 的度量。爲了瞭解這點, 觀察 $Q(\tilde{g}) = Q(\varphi^{p-2}g) = Q_g(\varphi)$。這裡

$$\begin{aligned} Q_g(\varphi) &= E(\varphi)/\|\varphi\|_p{}^2, \\ E(\varphi) &= \int_M (a|\bigtriangledown\varphi|^2 + S\varphi^2) dV_g, \\ \|\varphi\|_p &= (\int_M |\varphi|^p dV_g)^{1/p}. \end{aligned}$$

然後用部分積分, 我們計算

$$\begin{aligned} &(d/dt) Q_g(\varphi + t\psi)\Big|_{t=0} \\ &= (2/\|\varphi\|_p{}^2) \int_M (a\Delta\varphi + S\varphi \\ &\quad - \|\varphi\|_p{}^{-p} E(\varphi)\varphi^{p-1}) \psi dV_g. \end{aligned}$$

所以 φ 是 Q_g 的一個臨界點若且唯若 φ 滿足 $\lambda = E(\varphi)/\|\varphi\|_p{}^p$ 的 Yamabe 方程。

因爲 Hölder 不等式, $|\int_M S\varphi^2|$ 小於 $(\int_M \varphi^p)^{2/p}$ 的倍數, 所以 Q_g (以及 Q) 有下界。我們令

$$\begin{aligned} \lambda(M) &= \inf\{Q(\tilde{g}) : \tilde{g} \text{保角於 } g\} \\ &= \inf\{Q_g(\varphi) : \varphi \text{是 } M \text{上正圓滑函數}\} \end{aligned}$$

這個常數 $\lambda(M)$ 是 (M, g) 保角類的一個不變量, 叫 Yamabe 不變量。它的值對 Yamabe 問題的分析是緊要的。

Trudinger 對 Yamabe 的證明所做的修正僅適用於 $\lambda(M) \leq 0$ 的情況。事實上, 他證明有一個正常數 $\alpha(M)$, 當 $\lambda(M) < \alpha(M)$ 時, 證明有效。很容易證明 $\lambda(M) \leq \lambda(S^n)$。這裡 S^n 表帶標準度量的 n 維球。在1976年, Thierry Aubin [4] 證明 $\alpha(M) = \lambda(S^n)$, 推廣了 Trudinger 的結果。於是我們有下述定理:

定理甲 (Yamabe, Trudinger, Aubin): *假如閉黎曼流形 M 滿足 $\lambda(M) < \lambda(S^n)$, 則 Yamabe 問題可解。*

這個結果把從分析證明的焦點轉移到瞭解幾何不變量 $\lambda(M)$ 的問題。證明 $\lambda(M) < \lambda(S^n)$ 的明顯作法是找“檢驗函數” φ 使 $Q_g(\varphi) < \lambda(S^n)$。Aubin [4] 小心研究在正規座標下的局部幾何, 在許多情況下, 成功地構造了這樣的檢驗函數而證明了下述定理:

定理乙 (Aubin): *假如 M 的維數 $n \geq 6$, 並且不是局部保角平坦, 則 $\lambda(M) < \lambda(S^n)$。*

剩餘的情況變得困難, 因爲局部保角幾何無法提供足夠訊息以得到 $\lambda(M) < \lambda(S^n)$。這些情況須要構造廣域的檢驗函數。Rick Schoen [10] 在1984年做到了這件事。他的定理使 Yamabe 問題完全解決。

定理丙 (Schoen): *假如 M 的維數是 3, 4, 或 5, 或者假如 M 是局部保角平坦, 則 $\lambda(M) < \lambda(S^n)$ 除非 M 保角等價於標準球 S^n。*

Schoen 的證明引入兩個重要的新想法。第一, 他看出算子 $\square$ 的 Green 函數扮演緊要角色, 事實上, 他的檢驗函數就是奇異點圓滑化後的 Green 函數。第二, 他發現與廣義相對論中正質量定理的非預期相關性。而他與

丘成桐在那時剛剛證明了正質量定理的3及4維情況。事實上, 定理丙須要 n 維的正質量定理, Schoen 在 [10] 一文中宣佈了這個結果。

Yamabe 問題的解決在非線性偏微分方程理論的發展上劃下了里程碑。有臨界 p 值的半線性方程 (1) 在許多場合產生, 並且長久以來被分析學家研究。這是第一次這樣的方程問題完全被解決。

Yamabe 問題的後續發展與影響有許多不同層面。分析方面預給純量曲率的問題, 奇異解的行爲等等都被廣泛研究, 國內林長壽院士, 陳俊全教授運用所謂"moving plane"的方法也參與了這方面的研究, 並獲致深入的結果。幾何方面轉到所謂柯西黎曼流形上的一個類比問題。David Jerison 和 John M. Lee 做到了類似定理甲和乙的結論, 有趣的是對低維柯西黎曼流形並不知道有無相應的正質量定理 (甚或質量的定義)。不過 Abbas Bahri [6] 在八零年代末期與其合作者 H. Brezis, J. M. Coron 運用所謂"critical points at Infinity"的方法, 避開了正質量定理, 也獲得 Yamabe 問題的完全解決。到九零年代, 他的學生 N. Garnara [7] 應用他的方法到 CR Yamabe 問題, 解決了3維的情況, 同時 N. Abdelmoula 和 R. Yaācoub [5] 也處理了其他情況。

以下我們將討論正質量定理。我們叫一個黎曼流形 N 漸近平坦 (階$\tau > 0$) 假如有一個分解 $N = N_0 \cup N_\infty$ (N_0 緊緻) 及一個可微同胚: $N_\infty \to R^n - B_R(R > 0, B_R$ 是半徑爲 R 的 n 維球) 使對在 N_∞ 上引出的座標系 $\{x^i\}$, 當 $\rho = |x| \to \infty$ 時, 度量 g_{ij} 滿足下列條件: (D_k 表 x^k 方向偏微分)

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} + O(\rho^{-\tau}) \\ D_k g_{ij} &= O(\rho^{-\tau-1}) \\ D_k D_l g_{ij} &= O(\rho^{-\tau-2}). \end{aligned}$$

在廣義相對論中, 類空 (spacelike) 三維流形被要求是漸近平坦的。著名的例子是 Schwarzschild 度量, 它表示一個質量 m 的靜態點粒子的重力場。當限制於一定時間的三維空間時, 它是階1漸近平坦, 在適當座標下, 有如下形式:

$$g_{ij} = (1 + m\rho^{-1})\delta_{ij} + O(\rho^{-2}).$$

我們現在可以對漸近平坦黎曼流形定義它的 (ADM) 質量如下:

$$m(g) = \lim_{R\to\infty} \omega^{-1} \int_{S_R} (D_i g_{ij} - D_j g_{ii}) D_j \rfloor dx \tag{2}$$

(假如極限存在)。這裡 ω 是 $n-1$ 維單位球面的體積, dx 是 n 維體積元。可以證明這定義與漸近座標 $\{x^i\}$ 的選取無關 ([8]), 而只依賴度量 g。

在1960年, Arnowitt, Deser, 和 Misner [1], [2], [3] 對孤立重力系統做了細節的研究。他們採用 Hamiltonian 力學的觀點, 即是說, 選擇一個類空超曲面作爲起始 (三維) 曲面, 而把愛因斯坦方程寫成此起始 (三維) 曲面的演化方程。經過部分積分, 他們發現了一個守恆量, 這守恆量正是 (2) 式中的積分。很容易驗證對 Schwarzschild 空時 (spacetime), $m(g) = m$。所以他們下結論: 這守恆量 $m(g)$ 應該就是孤立系統的"總質量"。

因此 Arnowitt, Deser, 和 Misner 就猜想對一個物理空時裡的類空超曲面所量度的質量 $m(g)$ 應該是非負的, 而且爲0只當空時是"空"的。在眞實的物理空時模型裡, 能動量張量必須滿足某個正性條件, 透過愛因斯坦方程, 這條件轉爲曲率張量的正性條件。特別對時間分離的空時 $N \times R$, 條件等價於要求 N 的純量曲率 (代表局部質量密度) 非負。下列是 ADM 猜想之一:

正質量猜想: 假設 (N, g) 是一個漸近平坦的三維流形, 並且具有非負純量曲率, 則 $m(g) \geq 0$; 又"=0" 若且唯若 (N, g) 等距同構於帶標準歐氏度量的 R^3。

事實上, Arnowitt, Deser, 和 Misner 發現 $m(g)$ 只是代表總能動量的守恆向量的第一個分量。假如系統從遠距離看行爲像相對論性的點粒子, 則這個能動量向量就應該是類時的。他們猜想的一般形式叫正能量猜想。這個一般性猜想基本上等價於上述正質量猜想 ([13]) 。

在4維黎曼流形上, (2) 的積分也出現在物理中。Stephen Hawking 在其重力量子化的歐氏作法中建議用漸近平坦的4維黎曼流形取代空時流形, 然後量子化它的度量。在這過程中, 我們發現 Einstein-Hilbert 作用量 $A(g)$(-純量曲率的積分) 必須被下列作用量取代:

$$B(g) = A(g) + m(g).$$

當$B(g)$被考慮爲漸近平坦度量上的泛函時, 它的臨界點滿足眞空時的愛因斯坦方程。Gibbons, Hawking, 和 Perry [GHP] 分析這個作用量 $B(g)$, 並且得到結論說: 假如對零純量曲率的 $g, B(g) \geq 0$, 則它有可能引導出一個合理的好行爲的量子重力理論。這使他們有如下猜想:

正作用量猜想: 假設 (N, g) 是一個漸近平坦的4維黎曼流形, 並且其純量曲率爲零, 則 $B(g) \geq 0$; 又等號成立若且唯若 (N, g) 等距同構於帶標準歐氏度量的 R^4。

注意這會是正質量猜想的4維版本的一個簡單結論。

以上的猜想有長的歷史。 在 1960 到 1980的20年之間, 許多物理學家, 數學家得到了部分結果。([16]) 最後, 在1979年, Rick Schoen 和丘成桐解決了問題。在一系列的文章中 ([11],[12],[13],[14]), 他們用幾何及偏微分方程的方法對所有這些猜想給出完整嚴格的證明。之後不久, Edward Witten 對正能量定理給了一個簡單的證明。他的證明奠基於對旋量的一個部分積分公式。([16],[9])

(本文主要取材自 John M. Lee 和 Thomas H. Parker 的一篇展示性文章: The Yamabe Problem, Bull. Amer. Math. Soc., 17(1987) 37-91, 有興趣知道更多細節的讀者可以參考)

参考文獻

1. R. Arnowitt, S. Deser, and C. Misner, Canonical variables for general relativity, Phys. Rev. 117(1960), 1595-1602.
2. ——, Energy and the criteria for radiation in general relativity, Phys. Rev. 118(1960), 1100-1104.

3. ——, Coordinate invariance and energy expressions in general relativity, Phys. Rev. 122(1961), 997-1006.
4. T. Aubin, Équations differentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. Pures et Appl. 55(1976), 269-296.
5. N. Abdelmoula and R. Yaācoub, to appear in Pacific J. Math..
6. A. Bahri, Proof of the Yamabe conjecture without the positive mass conjecture for locally conformally flat manifolds, Nonlinear variational problems and partial differential equations (Isola d'Elba, 1990), 13-43, Pitman Res. Notes Math. Ser., 320, Longman Sci. Tech., Harlow, 1995.
7. N. Garnara, to appear in European J. Applied Math..
8. J. Lee and T. Parker, The Yamabe Problem, Bull. Amer. Math. Soc., 17(1987) 37-91.
9. T. Parker and C. Taubes, On Witten's proof of the positive energy theorem, Comm. Math. Phys., 84(1982), 223-238.
10. R. Schoen, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, J. Diff. Geom., 20(1984), 479-495.
11. R. Schoen and S.-T. Yau, On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, Comm. Math. Phys., 65(1979), 45-76.
12. ——, Proof of the positive action conjecture in quantum relativity, Phys. Rev. Lett., 42(1979), 547-548.
13. ——, The energy and the linear momentum of space-times in general relativity, Comm. Math. Phys., 79(1981), 47-51.
14. ——, Proof of the positive mass theorem II, Comm. Math. Phys., 79(1981), 231- 260.
15. N. Trudinger, Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 22(1968), 265-274.
16. E. Witten, A new proof of the positive energy theorem, Comm. Math. Phys., 80(1981), 381-402.
17. H. Yamabe, On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Osaka Math. J., 12(1960), 21-37.

—本文作者為中央研究院數學研究所研究員—