從線性規劃到八個皇后

黃華民

數學中有一類問題, 當變數很少, 或限制條件不多的時候, 困難不大。但若變數增加, 或限制條件變多, 就會變的相當困難。例如線性規劃, 離散數學上許多問題都有這種特點。

比方說, 有 n 個數目 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 我們想把最大的一個挑出來, 這在傳統的數學家看來, 根本就不是一個問題。但就實際的狀況考慮, 這 n 個數目可能是電腦資料庫中的數據, 而且 n 很大, 比方說是100 萬。想要在這一百萬個數據中, 很快的將最大的一個挑出來, 就是一個實際的數學問題了。數學家、電腦專家花了相當多的力氣在這方面, 研究過各式各樣的辦法。

同樣的情況, 假使要考慮解一個線性目標函數

$$\begin{aligned}&f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\ &= c_1 \times x_1 + c_2 \times x_2, \cdots + c_n \times x_n\end{aligned}$$

在下述線性限制條件下

$$\begin{aligned}&a_{11}\times x_1 + a_{12}\times x_2 + \cdots + a_{1n}\times x_n = b_1\\ &a_{21}\times x_1 + a_{22}\times x_2 + \cdots + a_{2n}\times x_n = b_2\\ &\cdots\\ &a_{m1}\times x_1 + a_{m2}\times x_2 + \cdots + a_{mn}\times x_n = b_m\\ &x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0\end{aligned}$$

或是這樣的線性限制條件下

$$\begin{aligned}&a_{11}\times x_1 + a_{12}\times x_2 + \cdots + a_{1n}\times x_n \leq b_1\\ &a_{21}\times x_1 + a_{22}\times x_2 + \cdots a_{2n}\times x_n \leq b_2\\ &\cdots\\ &a_{m1}\times x_1 + a_{m2}\times x_2 + \cdots + a_{mn}\times x_n \leq b_m\\ &x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0\end{aligned}$$

的極大或極小, 就是一個線性規劃的問題。這種問題, 當變數 n 或限制條件 m 不大時並不困難。比方說, 當 $m=2, n=4$ 時, 想求得目標函數 $f(x, y, x, u) = x + y$ 在

$$\begin{aligned}&x + 2y + z = 5,\\ &3x + y + u = 6,\\ &x, y, z, u \geq 0\end{aligned}$$

限制下的極大值, 可以用下面的方法考慮:

因爲滿足限制條件的區域 (稱之爲可行區域), 是一個封閉且有限的二維多面體。函數 f 的極大值一定出現在“角落”點, 也就是在限制條件

$$\begin{aligned}&x + 2y + z = 5,\\ &3x + y + u = 6,\\ &x, y, z, u \geq 0\end{aligned}$$

中, 任令二變數爲零, 求的其它二變數之解 (稱作基本解), 所對應的點。只需要把這些點都解出來, 代入函數 f 中, 便知道極大值是多少。在這個例子中, 可能的解 (x, y, z, u) 只有

$$
\begin{aligned}
&(0,0,5,6),\\
&(0,5/2,0,7/2),\\
&(0,6,-7,0),\\
&(5,0,0,-9),\\
&(2,0,3,0),\\
&(7/5,9/5,0,0).
\end{aligned}
$$

六組, 其中 $(0,6,-7,0)$, $(5,0,0,-9)$ 二組爲非可行解, 而因爲

$$
\begin{aligned}
&f(0,0,5,6)=0,\\
&f(0,5/2,0,7/2)=5/2,\\
&f(2,0,3,0)=2,\\
&f(7/5,9/5,0,0)=16/5.
\end{aligned}
$$

故知極大值爲 $16/5$。

然而若 n 或 m 的值很大, 上面的辦法便不可行。因爲若 $n=20$, $m=10$, 則要測試的基本解, 會增加到 $(20!)/(10!\times 10!)$ 之多, 大約接近 18 萬組解。而且還要驗證解集合, 是否爲有限且封閉的區域。

在二次世界大戰時, 美軍就遭遇這樣的問題。因爲要經濟有效的處理戰區物資運補、儲存的問題。發現這種問題與線性規劃的模式相近。然而變數和限制條件動輒成千上萬, 要如何處理就要大費周章。Dantzig 提供的一個辦法 (Simplex method 單純形法) 在某種意義下, 解決了這個問題。

Dantizig 的 Simplex method 想法其實很簡單。基本解雖然可能有很多, 但卻沒有必要每一個都找出來。因爲可行區域一定是凸的, 而且在可行區域中, 任一局部極大值一定就是極大值。所以只要在任一基本可行解的附近去尋找是否還有目標函數值更大的其它的基本可行解就行了。

假設 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一基本可行解。若 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是在 x 附近的基本解, 這表示 y 中非零分量的爲位置, 和 x 中非零分量的爲位置, 最多只能有一個不同。如果從任一基本可行解出發, 一路在附近的基本可行解尋找看看, 是否有目標函數值更大的可能? 如果有, 就移到那一點繼續尋找, 如果沒有, 就表示已經找到極大值了。

單純形法這套理論看起來很好, 但是有一個缺點, 就是它其實並不能保證, 在搜尋的過程中, 能避開大多數的“角落”(基本可行解)。事實上, 有一些例子顯示, 利用單純形法, 從特定點出發, 會繞過所有的“角落”點才找到極大值。然而單純形法的擁護者爭辯說, 在實際的應用問題上, 這種情況幾乎從未出現。反而經常顯示出極高的效率, 能夠在極少數次的搜尋後, 就找到解答。

數學家顯然不滿意這種情況。二十多年前, Karmarkar 證明可以改採用內點搜尋法 (單純形法可視爲邊界搜尋法), 則即使在最壞的狀況下, 要得到任意精確度的近似的極大值, 搜尋的次數都不會超過變數個數 n 的常數倍。這當然是一個突破的結果。但對一般的

問題而言, 到底那一種方法較好, 仍是各說各話, 爭議不休。

線性規劃的電腦軟體很多, 幸運的是, 有一些免費的公用軟體, 例如 lp_solve 就是一個很適合入門級的公用軟體。有興趣的讀者可以從下列網站下載

ftp://ftp.ics.ele.tue.nl/pub/lp_slove/

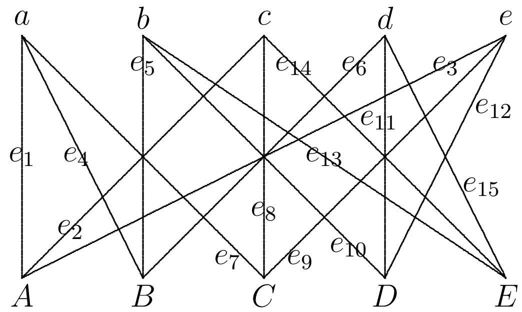
lp_solve 有工作站 Unix 版, PC dos 版, 也有 Windows 版。可自行選取合用的程式下載。

如果要求不高, 自行製作一個簡易的, 單純形法自助軟體, 也不十分困難。利用類似 Matlab 的高階套裝語言設計, 只需要 50 行以下的指令, 就可有一個堪用線性規劃的程式了。Matlab 的 Optimization Toolbox 可以參考 (當然不只有50 行)。其它的數學軟體, 例如 Maple 也有這樣的 Toolbox。

這樣的程式往往是一個很好的解題黑盒子。離散數學的題目, 往往都可以用這個黑盒子來解決。

配對問題就是一個很好的例子。假如有五個女孩 { A, B, C, D, E }, 和五個男孩 { a, b, c, d, e }, 希望配對參加化裝舞會, 但五個女孩各自心有所屬。A 只肯和 a, c, e 作伴, B 只肯和 a, b, d 作伴, C 只肯和 a, c, e 作伴, D 只肯和 b, d, e 作伴, E 只肯和 b, c, d 作伴。如何安排, 讓參加的對數最多, 就是配對問題。

這個問題可以用圖來表示。五個女孩 { A, B, C, D, E }, 和五個男孩 { a, b, c, d, e }, 分別用頂點表示。願意配對作伴的男女用邊連起來, 以下圖表示



配對問題等於在上面的圖中, 指定一些邊, 使任一點最多落在一條指定的邊上。試看最多可以找到多少指定的邊?

這個題目可以表成下列極大值問題:

$$
\begin{aligned}
\max:\ & e_1+e_2+e_3+e_4+e_5+e_6+e_7+e_8+e_9\\
&\quad +e_{10}+e_{11}+e_{12}+e_{13}+e_{14}+e_{15};\\
& e_1+e_2+e_3 \le 1;\\
& e_4+e_5+e_6 \le 1;\\
& e_7+e_8+e_9 \le 1;\\
& e_{10}+e_{11}+e_{12} \le 1;\\
& e_{13}+e_{14}+e_{15} \le 1;\\
& e_1+e_4+e_7 \le 1;\\
& e_5+e_{10}+e_{13} \le 1;\\
& e_2+e_8+e_{14}\ le1;\\
& e_6+e_{11}+e_{15} \le 1;\\
& e_3+e_9+e_{12} \le 1;
\end{aligned}
$$

(且假設變數$e_1,\cdots,e_{15}$都是非負實數)

若線性規劃的解 $e_1, e_2, \cdots, e_{15}$ 的值不是1 就是0。如果是1, 代表對應邊屬於指定邊。這樣的話, 配對問題就可以用線性規劃來解。

從題型看來, 此題的極大值最多是5, 而 $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = e_6 = e_7 =$

$e_8 = e_9 = e_{10} = e_{11} = e_{12} = e_{13} = e_{14} = e_{15} = 1/3$ 顯然就是一個解。如果線性規劃這個黑盒子, 提供的解就是這一組。那就壞了。

不過如果是採用單純形法的黑盒子, 可知在加上一些變數 $\{f_1, f_2, \cdots, f_{10}\}$ 後 (稱作剩餘變數), 原來的限制條件變爲:

$$
\begin{aligned}
&e_1 + e_2 + e_3 + f_1 = 1;\\
&e_4 + e_5 + e_6 + f_2 = 1;\\
&e_7 + e_8 + e_9 + f_3 = 1;\\
&e_{10} + e_{11} + e_{12} + f_4 = 1;\\
&e_{13} + e_{14} + e_{15} + f_5 = 1;\\
&e_1 + e_4 + e_7 + f_6 = 1;\\
&e_5 + e_{10} + e_{13} + f_7 = 1;\\
&e_2 + e_8 + e_{14} + f_8 = 1;\\
&e_6 + e_{11} + e_{15} + f_9 = 1;\\
&e_3 + e_9 + e_{12} + f_{10} = 1;\\
&(e_1, \cdots, e_15, f_1, \cdots, f_{10} \geq 0)
\end{aligned}
$$

一共有25個變數, 10個方程式。任令其中15個變數爲0求得之解爲基本解。因爲這種 10×25 的係數矩陣中, 任一子方陣的行列式的值, 一定是 $1, -1$ 或0。(這種矩陣我們稱爲 totally unimodular 矩陣)。在這種情況下, 所有的基本可行解的分量一定是 0 或 1。所以假使利用單純形法, 得到的解 $e_1, \cdots, e_{15}$ 的值一定是 0 或 1。

如果想要利用 lp_solve 試驗一下。只需要把上述的題目抄下存檔, 就叫 matching 好了。執行下列命令 lp_solve < matching 就可以看到下面的結果:

Value of objective function:	5
e_1	0
e_2	0
e_3	1
e_4	1
e_5	0
e_6	0
e_7	0
e_8	1
e_9	0
e_{10}	0
e_{11}	1
e_{12}	0
e_{13}	1
e_{14}	0
e_{15}	0

這看起來好像很不錯, 但不要忘了, 單純形法雖然對絕大部分的題目都能處理的很快, 但卻不能保證永遠如此。改用 Karmarkar 的內點收斂法如何? 不幸的是, 它經常會收斂到, 如上面所提到的非整數解, 像是 $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = e_6 = e_7 = e_8 = e_9 = e_{10} = e_{11} = e_{12} = e_{13} = e_{14} = e_{15} = 1/3$ 的地方去, 通常需要用 branch and bound 之類的技巧作後處理, 才能得到整數解。這種方法就是所謂的整數規劃 integer programming。通常線性規劃的程式, 也可以處理整數規劃。但是整數規劃後處理的部份, 經常會比線性規劃的部份麻煩許多。

電腦程式教科書中很喜歡提到的一個八

個皇后 (8 queens) 問題。是這樣說的: 在一個 8×8 的西洋棋盤上, 皇后 (queen) 是一個威力最大的棋子, 只要與她同行, 同列, 正負 45 度分角線上的敵對棋子, 都會被她吃掉。問在一個西洋棋盤上, 一共可以放多少個, *互不威脅*, 彼此敵對的皇后?

這是電腦程式設計課程中, 用來考驗學生 Backtracking 能力, 一個標準的習題。但是利用整數線性規劃這個黑盒子, 也可以輕易的解決這個問題。

假設我們用 x_{ij} 這個變數, 表示是否要在第 i 行 第 j 列, 要放皇后。($x_{ij}=1$ 代表要放 $x_{ij}=0$ 代表不放) 我們可以用下列極大值問題來描述這個題目:

$$\begin{aligned}
&\max:\\
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}+x_{28}+\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38}+\\
&x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{48}+\\
&x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+\\
&x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}+x_{68}+\\
&x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75}+x_{76}+x_{77}+x_{78}+\\
&x_{81}+x_{82}+x_{83}+x_{84}+x_{85}+x_{86}+x_{87}+x_{88};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18} \le 1;\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}+x_{28} \le 1;\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38} \le 1;\\
&x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{48} \le 1;\\
&x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58} \le 1;\\
&x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}+x_{68} \le 1;\\
&x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75}+x_{76}+x_{77}+x_{78} \le 1;\\
&x_{81}+x_{82}+x_{83}+x_{84}+x_{85}+x_{86}+x_{87}+x_{88} \le 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}+x_{71}+x_{81} \le 1;\\
&x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}+x_{62}+x_{72}+x_{82} \le 1;\\
&x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}+x_{63}+x_{73}+x_{83} \le 1;\\
&x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}+x_{64}+x_{74}+x_{84} \le 1;\\
&x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}+x_{65}+x_{75}+x_{85} \le 1;\\
&x_{16}+x_{26}+x_{36}+x_{46}+x_{56}+x_{66}+x_{76}+x_{86} \le 1;\\
&x_{17}+x_{27}+x_{37}+x_{47}+x_{57}+x_{67}+x_{77}+x_{87} \le 1;\\
&x_{18}+x_{28}+x_{38}+x_{48}+x_{58}+x_{68}+x_{78}+x_{88} \le 1;\\
&x_{11}+x_{22}+x_{33}+x_{44}+x_{55}+x_{66}+x_{77}+x_{88} \le 1;\\
&x_{12}+x_{23}+x_{34}+x_{45}+x_{56}+x_{67}+x_{78} \le 1;\\
&x_{13}+x_{24}+x_{35}+x_{46}+x_{57}+x_{68} \le 1;\\
&x_{14}+x_{25}+x_{36}+x_{47}+x_{58} \le 1;\\
&x_{15}+x_{26}+x_{37}+x_{48} \le 1;\\
&x_{16}+x_{27}+x_{38}1 \le 1;\\
&x_{17}+x_{28} \le 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_{21}+x_{32}+x_{43}+x_{54}+x_{65}+x_{76}+x_{87} \le 1;\\
&x_{31}+x_{42}+x_{53}+x_{64}+x_{75}+x_{86} \le 1;\\
&x_{41}+x_{52}+x_{63}+x_{74}+x_{85} \le 1;\\
&x_{51}+x_{62}+x_{73}+x_{84} \le 1;\\
&x_{61} + x_{72} + x_{83} \le 1;\\
&x_{71} + x_{82} \le 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_{81}+x_{72}+x_{63}+x_{54}+x_{45}+x_{36}+x_{27}+x_{18} \le 1;\\
&x_{71}+x_{62}+x_{53}+x_{44}+x_{35}+x_{26}+x_{17} \le 1;\\
&x_{61}+x_{52}+x_{43}+x_{34}+x_{25}+x_{16} \le 1;
\end{aligned}$$

$x_{51}+x_{42}+x_{33}+x_{24}+x_{15} \le 1;$

$x_{41}+x_{32}+x_{23}+x_{14} \le 1;$

$x_{31}+x_{22}+x_{13} \le 1;$

$x_{21}+x_{12} \le 1;$

$x_{82}+x_{73}+x_{64}+x_{55}+x_{46}+x_{37}+x_{28} \le 1;$

$x_{83}+x_{74}+x_{65}+x_{56}+x_{47}+x_{38} \le 1;$

$x_{84}+x_{75}+x_{66}+x_{57}+x_{48} \le 1;$

$x_{85}+x_{76}+x_{67}+x_{58} \le 1;$

$x_{86}+x_{77}+x_{68} \le 1;$

$x_{87}+x_{78} \le 1;$

把上述的題目抄下, 存檔。檔名就叫 8queens 好了。執行下列命令 lp_solve < 8queens 得到下列的結果

Value of objective function:	8	Value of objective function:	8	Value of objective function:	8
x_{11}	0	x_{37}	0	x_{64}	0
x_{12}	0	x_{38}	0	x_{65}	0.041237
x_{13}	0.49141	x_{41}	0	x_{66}	0
x_{14}	0.0034364	x_{42}	0.27491	x_{67}	0.89347
x_{15}	0	x_{43}	0.41924	x_{68}	0
x_{16}	0	x_{44}	0	x_{71}	0
x_{17}	0	x_{45}	0	x_{72}	0
x_{18}	0.50515	x_{46}	0.19931	x_{73}	0
x_{21}	0	x_{47}	0.10653	x_{74}	0.85223
x_{22}	0.25086	x_{48}	0	x_{75}	0
x_{23}	0.024055	x_{51}	0.58076	x_{76}	0.065292
x_{24}	0.14433	x_{52}	0	x_{77}	0
x_{25}	0.58076	x_{53}	0	x_{78}	0.082474
x_{26}	0	x_{54}	0	x_{81}	0.16151
x_{27}	0	x_{55}	0.37801	x_{82}	0
x_{28}	0	x_{56}	0	x_{83}	0
x_{31}	0.25773	x_{57}	0	x_{84}	0
x_{32}	0.47423	x_{58}	0.041237	x_{85}	0
x_{33}	0	x_{61}	0	x_{86}	0.46735
x_{34}	0	x_{62}	0	x_{87}	0
x_{35}	0	x_{63}	0.065292	x_{88}	0.37113
x_{36}	0.26804				

雖然得到正確的極大值, 但找不到正確皇后的位置。理由很簡單。因爲對應的限制條件的係數矩陣不是 totally unimodular。

int 這個指令代表以後的變數都是整數, 所以只要在上述極大問題後面加上下面這些指令

$$
\begin{array}{llllllll}
int \\
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} & x_{28} \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} & x_{38} \\
x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} & x_{48} \\
x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} & x_{58} \\
x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} & x_{67} & x_{68} \\
x_{71} & x_{72} & x_{73} & x_{74} & x_{75} & x_{76} & x_{77} & x_{78} \\
x_{81} & x_{82} & x_{83} & x_{84} & x_{85} & x_{86} & x_{87} & x_{88}\ ;
\end{array}
$$

再用 lp_solve 試驗一下, 就可得到正確解的位置

$$
\begin{aligned}
&x_{14} = x_{22} = x_{37} = x_{46} = x_{56} = x_{68} \\
&= x_{75} = x_{81} = 1。
\end{aligned}
$$

有了這個整數線性規劃的黑盒子, 可以把很多離散數學的題目拿來試驗。眞正試驗一番以後, 應該會對離散數學有不同的感受。例如下面這個和八個皇后對應的問題:

問在一個 8×8 的西洋棋盤上, 最少需要幾個皇后, 才能使棋盤上任一個位置, 都會受到至少一位皇后的威脅?

有八個皇后問題的經驗, 這個問題當然可以很輕易寫成下列有限制條件的極小值問題

$$
\begin{aligned}
&\text{min}: \\
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+ \\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}+x_{28}+ \\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38}+ \\
&x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{48}+ \\
&x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+ \\
&x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}+x_{68}+ \\
&x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75}+x_{76}+x_{77}+x_{78}+ \\
&x_{81}+x_{82}+x_{83}+x_{84}+x_{85}+x_{86}+x_{87}+x_{88};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}+x_{71}+x_{81} \\
&+x_{22}+x_{33}+x_{44}+x_{55}+x_{66}+x_{77}+x_{88} \geq 1; \\
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}+x_{62}+x_{72}+x_{82} \\
&+x_{23}+x_{34}+x_{45}+x_{56}+x_{67}+x_{78}+x_{21} \geq 1; \\
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}+x_{63}+x_{73}+x_{83} \\
&+x_{24}+x_{35}+x_{46}+x_{57}+x_{68}+x_{31}+x_{22} \geq 1; \\
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}+x_{64}+x_{74}+x_{84} \\
&+x_{25}+x_{36}+x_{47}+x_{58}+x_{41}+x_{32}+x_{23} \geq 1;
\end{aligned}
$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}+x_{65}+x_{75}+x_{85}$$
$$+x_{26}+x_{37}+x_{48}+x_{51}+x_{42}+x_{33}+x_{24}\geq 1;$$
$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{26}+x_{36}+x_{46}+x_{56}+x_{66}+x_{76}+x_{86}$$
$$+x_{27}+x_{38}+x_{61}+x_{52}+x_{43}+x_{34}+x_{25}\geq 1;$$
$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{27}+x_{37}+x_{47}+x_{57}+x_{67}+x_{77}+x_{87}$$
$$+x_{28}+x_{71}+x_{62}+x_{53}+x_{44}+x_{35}+x_{26}\geq 1;$$
$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}+x_{18}+x_{28}+x_{38}+x_{48}+x_{58}+x_{68}+x_{78}+x_{88}$$
$$+x_{81}+x_{72}+x_{63}+x_{54}+x_{45}+x_{36}+x_{27}\geq 1;$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}+x_{28}+x_{11}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}+x_{71}+x_{81}$$
$$+x_{32}+x_{43}+x_{54}+x_{65}+x_{76}+x_{87}+x_{12}\geq 1;$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}+x_{28}+x_{12}+x_{32}+x_{42}+x_{52}+x_{62}+x_{72}+x_{82}$$
$$+x_{11}+x_{33}+x_{44}+x_{55}+x_{66}+x_{77}+x_{88}+x_{31}+x_{13}\geq 1;$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}+x_{28}+x_{13}+x_{33}+x_{43}+x_{53}+x_{63}+x_{73}+x_{83}$$
$$+x_{12}+x_{34}+x_{45}+x_{56}+x_{67}+x_{78}+x_{41}+x_{32}+x_{14}\geq 1;$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}+x_{28}+x_{14}+x_{34}+x_{44}+x_{54}+x_{64}+x_{74}+x_{84}$$
$$+x_{13}+x_{35}+x_{46}+x_{57}+x_{68}+x_{51}+x_{42}+x_{33}+x_{31}\geq 1;$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}+x_{28}+x_{15}+x_{35}+x_{45}+x_{55}+x_{65}+x_{75}+x_{85}$$
$$+x_{14}+x_{36}+x_{47}+x_{58}+x_{61}+x_{52}+x_{43}+x_{34}+x_{16}\geq 1;$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}+x_{28}+x_{16}+x_{36}+x_{46}+x_{56}+x_{66}+x_{76}+x_{86}$$
$$+x_{15}+x_{37}+x_{48}+x_{71}+x_{62}+x_{53}+x_{44}+x_{35}+x_{17}\geq 1;$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}+x_{28}+x_{17}+x_{37}+x_{47}+x_{57}+x_{67}+x_{77}+x_{87}$$
$$+x_{16}+x_{38}+x_{81}+x_{72}+x_{63}+x_{54}+x_{45}+x_{36}+x_{18}\geq 1;$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}+x_{28}+x_{18}+x_{38}+x_{48}+x_{58}+x_{68}+x_{78}+x_{88}$$
$$+x_{17}+x_{82}+x_{73}+x_{64}+x_{55}+x_{46}+x_{37}\geq 1;$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{11}+x_{21}+x_{41}+x_{51}+x_{61}+x_{71}+x_{81}$$
$$+x_{42}+x_{53}+x_{64}+x_{75}+x_{86}+x_{22}+x_{13}\geq 1;$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{12}+x_{22}+x_{42}+x_{52}+x_{62}+x_{72}+x_{82}$$
$$+x_{21}+x_{43}+x_{54}+x_{65}+x_{76}+x_{87}+x_{41}+x_{23}+x_{14}\geq 1;$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{13}+x_{23}+x_{43}+x_{53}+x_{63}+x_{73}+x_{83}$$
$$+x_{11}+x_{22}+x_{44}+x_{55}+x_{66}+x_{77}+x_{88}+x_{51}+x_{42}+x_{24}+x_{15}\geq 1;$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{14}+x_{24}+x_{44}+x_{54}+x_{64}+x_{74}+x_{84}$$
$$+x_{12}+x_{23}+x_{45}+x_{56}+x_{67}+x_{78}+x_{61}+x_{52}+x_{43}+x_{25}+x_{16}\geq 1;$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{15}+x_{25}+x_{45}+x_{55}+x_{65}+x_{75}+x_{85}$$
$$+x_{13}+x_{24}+x_{46}+x_{57}+x_{68}+x_{71}+x_{62}+x_{53}+x_{44}+x_{26}+x_{17}\geq 1;$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{16}+x_{26}+x_{46}+x_{56}+x_{66}+x_{76}+x_{86}$$
$$+x_{14}+x_{25}+x_{47}+x_{58}+x_{81}+x_{72}+x_{63}+x_{54}+x_{45}+x_{27}+x_{18}\geq 1;$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{17}+x_{27}+x_{47}+x_{57}+x_{67}+x_{77}+x_{87}$$
$$+x_{15}+x_{26}+x_{48}+x_{82}+x_{73}+x_{64}+x_{55}+x_{46}+x_{28}\geq 1;$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}+x_{36}+x_{37}+x_{38}+x_{18}+x_{28}+x_{48}+x_{58}+x_{68}+x_{78}+x_{88}$$
$$+x_{16}+x_{27}+x_{83}+x_{74}+x_{65}+x_{56}+x_{47}\geq 1;$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{51}+x_{61}+x_{71}+x_{81}$$
$$+x_{52}+x_{63}+x_{74}+x_{85}+x_{32}+x_{23}+x_{14}\geq 1;$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{52}+x_{62}+x_{72}+x_{82}$$
$$+x_{31}+x_{53}+x_{64}+x_{75}+x_{86}+x_{51}+x_{33}+x_{24}+x_{15}\geq 1;$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{53}+x_{63}+x_{73}+x_{83}$$
$$+x_{21}+x_{32}+x_{54}+x_{65}+x_{76}+x_{87}+x_{61}+x_{52}+x_{34}+x_{25}+x_{16}\geq 1;$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{54}+x_{64}+x_{74}+x_{84}$$
$$+x_{11}+x_{22}+x_{33}+x_{55}+x_{66}+x_{77}+x_{88}+x_{71}+x_{62}+x_{53}+x_{35}+x_{26}+x_{17}\geq 1;$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{55}+x_{65}+x_{75}+x_{85}$$
$$+x_{12}+x_{23}+x_{34}+x_{56}+x_{67}+x_{78}+x_{81}+x_{72}+x_{63}+x_{54}+x_{36}+x_{27}+x_{18}\geq 1;$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{16}+x_{26}+x_{36}+x_{56}+x_{66}+x_{76}+x_{86}$$
$$+x_{13}+x_{24}+x_{35}+x_{57}+x_{68}+x_{82}+x_{73}+x_{64}+x_{55}+x_{37}+x_{28}\geq 1;$$
$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{17}+x_{27}+x_{37}+x_{57}+x_{67}+x_{77}+x_{87}$$
$$+x_{14}+x_{25}+x_{36}+x_{58}+x_{83}+x_{74}+x_{65}+x_{56}+x_{38}\geq 1;$$
$$x_{41}++x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}+x_{46}+x_{47}+x_{48}+x_{18}+x_{28}+x_{38}+x_{58}+x_{68}+x_{78}+x_{88}$$

$+x_{15}+x_{26}+x_{37}+x_{84}+x_{75}+x_{66}+x_{57}\geq 1;$

$x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{61}+x_{71}+x_{81}$

$+x_{62}+x_{73}+x_{84}+x_{42}+x_{33}+x_{24}+x_{15}\geq 1;$

$x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{62}+x_{72}+x_{82}$

$+x_{41}+x_{63}+x_{74}+x_{85}+x_{61}+x_{43}+x_{34}+x_{25}+x_{16}\geq 1;$

$x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{63}+x_{73}+x_{83}$

$+x_{31}+x_{42}+x_{64}+x_{75}+x_{86}+x_{71}+x_{62}+x_{44}+x_{35}+x_{26}+x_{17}\geq 1;$

$x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{64}+x_{74}+x_{84}$

$+x_{21}+x_{32}+x_{43}+x_{65}+x_{76}+x_{87}+x_{81}+x_{72}+x_{63}+x_{45}+x_{36}+x_{27}+x_{18}\geq 1;$

$x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{65}+x_{75}+x_{85}$

$+x_{11}+x_{22}+x_{33}+x_{44}+x_{66}+x_{77}+x_{88}+x_{82}+x_{73}+x_{64}+x_{46}+x_{37}+x_{28}\geq 1;$

$x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{16}+x_{26}+x_{36}+x_{46}+x_{66}+x_{76}+x_{86}$

$+x_{12}+x_{23}+x_{34}+x_{45}+x_{67}+x_{78}+x_{83}+x_{74}+x_{65}+x_{47}+x_{38}\geq 1;$

$x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{17}+x_{27}+x_{37}+x_{47}+x_{67}+x_{77}+x_{87}$

$+x_{13}+x_{24}+x_{35}+x_{46}+x_{68}+x_{84}+x_{75}+x_{66}+x_{48}\geq 1;$

$x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}+x_{56}+x_{57}+x_{58}+x_{18}+x_{28}+x_{38}+x_{48}+x_{68}+x_{78}+x_{88}$

$+x_{14}+x_{25}+x_{36}+x_{47}+x_{85}+x_{76}+x_{67}\geq 1;$

$x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}+x_{68}+x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{71}+x_{81}$

$+x_{72}+x_{83}+x_{52}+x_{43}+x_{34}+x_{25}+x_{16}\geq 1;$

$x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}+x_{68}+x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}+x_{72}+x_{82}$

$+x_{51}+x_{73}+x_{84}+x_{71}+x_{53}+x_{44}+x_{35}+x_{26}+x_{17}\geq 1;$

$x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}+x_{68}+x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}+x_{73}+x_{83}$

$+x_{41}+x_{52}+x_{74}+x_{85}+x_{81}+x_{72}+x_{54}+x_{45}+x_{36}+x_{27}+x_{18}\geq 1;$

$x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}+x_{68}+x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}+x_{74}+x_{84}$

$+x_{31}+x_{42}+x_{53}+x_{75}+x_{86}+x_{82}+x_{73}+x_{55}+x_{46}+x_{37}+x_{28}\geq 1;$

$x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}+x_{68}+x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}+x_{75}+x_{85}$

$+x_{21}+x_{32}+x_{43}+x_{54}+x_{76}+x_{87}+x_{83}+x_{74}+x_{56}+x_{47}+x_{38}\geq 1;$

$x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}+x_{68}+x_{16}+x_{26}+x_{36}+x_{46}+x_{56}+x_{76}+x_{86}$

$+x_{11}+x_{22}+x_{33}+x_{44}+x_{55}+x_{77}+x_{88}+x_{84}+x_{75}+x_{57}+x_{48}\geq 1;$

$x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}+x_{68}+x_{17}+x_{27}+x_{37}+x_{47}+x_{57}+x_{77}+x_{87}$

$+x_{12}+x_{23}+x_{34}+x_{45}+x_{56}+x_{78}+x_{85}+x_{76}+x_{58}\geq 1;$

$x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}+x_{66}+x_{67}+x_{68}+x_{18}+x_{28}+x_{38}+x_{48}+x_{58}+x_{78}+x_{88}$

$+x_{13}+x_{24}+x_{35}+x_{46}+x_{57}+x_{86}+x_{77}\geq 1;$

$x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75}+x_{76}+x_{77}+x_{78}+x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}+x_{81}+x_{82}$

$+x_{62}+x_{53}+x_{44}+x_{35}+x_{26}+x_{17}\geq 1;$

$x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75}+x_{76}+x_{77}+x_{78}+x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}+x_{62}+x_{82}$

$+x_{61}+x_{83}+x_{81}+x_{63}+x_{54}+x_{45}+x_{36}+x_{27}+x_{18}\geq 1;$

$x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75}+x_{76}+x_{77}+x_{78}+x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}+x_{63}+x_{83}$

$+x_{51}+x_{62}+x_{84}+x_{82}+x_{64}+x_{55}+x_{46}+x_{37}+x_{28}\geq 1;$

$x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75}+x_{76}+x_{77}+x_{78}+x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}+x_{64}+x_{84}$

$+x_{41}+x_{52}+x_{63}+x_{85}+x_{83}+x_{65}+x_{56}+x_{47}+x_{38}\geq 1;$

$x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75}+x_{76}+x_{77}+x_{78}+x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}+x_{65}+x_{85}$

$+x_{31}+x_{42}+x_{53}+x_{64}+x_{86}+x_{84}+x_{66}+x_{57}+x_{48}\geq 1;$

$x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75}+x_{76}+x_{77}+x_{78}+x_{16}+x_{26}+x_{36}+x_{46}+x_{56}+x_{66}+x_{86}$

$+x_{21}+x_{32}+x_{43}+x_{54}+x_{65}+x_{87}+x_{85}+x_{67}+x_{58}\geq 1;$

$x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75}+x_{76}+x_{77}+x_{78}+x_{17}+x_{27}+x_{37}+x_{47}+x_{57}+x_{67}+x_{87}$

$+x_{11}+x_{22}+x_{33}+x_{44}+x_{55}+x_{66}+x_{88}+x_{86}+x_{68}\geq 1;$

$x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75}+x_{76}+x_{77}+x_{78}+x_{18}+x_{28}+x_{38}+x_{48}+x_{58}+x_{68}+x_{88}$

$+x_{12}+x_{23}+x_{34}+x_{45}+x_{56}+x_{67}+x_{87}\geq 1;$

$x_{81}+x_{82}+x_{83}+x_{84}+x_{85}+x_{86}+x_{87}+x_{88}+x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}+x_{71}$

$+x_{72}+x_{63}+x_{54}+x_{45}+x_{36}+x_{27}+x_{18}\geq 1;$

$x_{81}+x_{82}+x_{83}+x_{84}+x_{85}+x_{86}+x_{87}+x_{88}+x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}+x_{62}+x_{72}+x_{71}$

$+x_{73}+x_{64}+x_{55}+x_{46}+x_{37}+x_{28}\geq 1;$

$x_{81}+x_{82}+x_{83}+x_{84}+x_{85}+x_{86}+x_{87}+x_{88}+x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}+x_{63}+x_{73}$

$+x_{61}+x_{72}+x_{74}+x_{65}+x_{56}+x_{47}+x_{38}\geq 1;$

$$x_{81}+x_{82}+x_{83}+x_{84}+x_{85}+x_{86}+x_{87}+x_{88}+x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}+x_{64}+x_{74}$$
$$+x_{51}+x_{62}+x_{73}+x_{75}+x_{66}+x_{57}+x_{48} \geq 1;$$
$$x_{81}+x_{82}+x_{83}+x_{84}+x_{85}+x_{86}+x_{87}+x_{88}+x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}+x_{65}+x_{75}$$
$$+x_{41}+x_{52}+x_{63}+x_{74}+x_{76}+x_{67}+x_{58} \geq 1;$$
$$x_{81}+x_{82}+x_{83}+x_{84}+x_{85}+x_{86}+x_{87}+x_{88}+x_{16}+x_{26}+x_{36}+x_{46}+x_{56}+x_{66}+x_{76}$$
$$+x_{31}+x_{42}+x_{53}+x_{64}+x_{75}+x_{77}+x_{68} \geq 1;$$
$$x_{81}+x_{82}+x_{83}+x_{84}+x_{85}+x_{86}+x_{87}+x_{88}+x_{17}+x_{27}+x_{37}+x_{47}+x_{57}+x_{67}+x_{77}$$
$$+x_{21}+x_{32}+x_{43}+x_{54}+x_{65}+x_{76}+x_{78} \geq 1;$$
$$x_{81}+x_{82}+x_{83}+x_{84}+x_{85}+x_{86}+x_{87}+x_{88}+x_{18}+x_{28}+x_{38}+x_{48}+x_{58}+x_{68}+x_{78}$$
$$+x_{11}+x_{22}+x_{33}+x_{44}+x_{55}+x_{66}+x_{77} \geq 1;$$

上述的式子雖然又臭又長, 但卻是可以利用電腦很容易就可以製造出來, 利用 lp_solve 很快可看到下面的解答:

Value of objective function:	2.764420302	Value of objective function:	2.764420302	Value of objective function:	2.764420302
x_{11}	0.10096	x_{37}	0.0096126	x_{64}	0.073718
x_{12}	0.080529	x_{38}	0	x_{65}	0.069311
x_{13}	0	x_{41}	0.030048	x_{66}	0.064904
x_{14}	0.030048	x_{42}	0.064904	x_{67}	0.0096154
x_{15}	0.030048	x_{43}	0.073718	x_{68}	0
x_{16}	0	x_{44}	0	x_{71}	0.080529
x_{17}	0.080529	x_{45}	0	x_{72}	0.012019
x_{18}	0.10096	x_{46}	0.069311	x_{73}	0.0096154
x_{21}	0.080529	x_{47}	0.064904	x_{74}	0.064904
x_{22}	0.012019	x_{48}	0.030048	x_{75}	0.064904
x_{23}	0.0096154	x_{51}	0.030048	x_{76}	0.0096154
x_{24}	0.064904	x_{52}	0.064904	x_{77}	0.012019
x_{25}	0.064904	x_{53}	0.069311	x_{78}	0.080529
x_{26}	0.0096154	x_{54}	0	x_{81}	0.10096
x_{27}	0.012019	x_{55}	0	x_{82}	0.080529
x_{28}	0.080529	x_{56}	0.073718	x_{83}	0
x_{31}	0	x_{57}	0.064904	x_{84}	0.030048
x_{32}	0.0096154	x_{58}	0.030048	x_{85}	0.030048
x_{33}	0.064904	x_{61}	0	x_{86}	0
x_{34}	0.069311	x_{62}	0.0096154	x_{87}	0.080529
x_{35}	0.073718	x_{63}	0.064904	x_{88}	0.10096
x_{36}	0.064904				

顯然這不是我們要的的答案, 但如果再加上下列整數的限制條件

$$
\begin{aligned}
&int \\
&\quad x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, \\
&\quad x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26}, x_{27}, x_{28}, \\
&\quad x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}, x_{36}, x_{37}, x_{38}, \\
&\quad x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}, x_{45}, x_{46}, x_{47}, x_{48}, \\
&\quad x_{51}, x_{52}, x_{53}, x_{54}, x_{55}, x_{56}, x_{57}, x_{58}, \\
&\quad x_{61}, x_{62}, x_{63}, x_{64}, x_{65}, x_{66}, x_{67}, x_{68}, \\
&\quad x_{71}, x_{72}, x_{73}, x_{74}, x_{75}, x_{76}, x_{77}, x_{78}, \\
&\quad x_{81}, x_{82}, x_{83}, x_{84}, x_{85}, x_{86}, x_{87}, x_{88};
\end{aligned}
$$

則一如預期, 再花費幾十倍的時間後, 終於才能看到下列正確的解答

$$x_{27} = x_{41} = x_{67} = x_{83} = x_{85} = 1.$$

參考文獻

1. Gilbert Strang, Linear algebra and its applications, San Diego: Harcourt, Brace, Jovanovich Publishers, c1988.
2. Robert S. Garfinkel, George L. Nemhauser, Integer Programming, John Wieley & Sons, New York 1972.

—本文作者任教於中央大學數學系—