Ramsey 理論

張克民

世界上“完全的無序是不可能存在的。任一足夠大的結構 (大數集, 點集或事物的集合 $\cdots$) 中必定包含有一個給定大小的規則子結構”, 這富有哲理的格言恰是 Ramsey 理論的主導精神。1928 年英國數學家、哲學家兼經濟學家 F. P. Ramsey 在倫敦數學會上宣讀了一篇題爲“On a problem of formal logic”的論文 (Proc. London Math. Soc. 30(2)(1930), 361-376), 文中證明了一個組合數學定理, 後來被稱爲 Ramsey 定理。Rota 在 1978 年這樣寫道: “如果要求在組合學中舉出一個而且僅一個精美的定理, 那麼大多數組合學家會提名 Ramsey 定理”。這也許對 Ramsey 定理在組合學中地位的最好評價, 也就是爲什麼人們把這套理論冠以 Ramsey 的名字。在1930年前後, 各國數學家獨立地發現了好幾個形式各異的數學定理, 它們的共性就是上述的格言, 這些定理構成了現在稱爲 Ramsey 理論的基礎。

(1) Ramsey 定理

這裡有一個廣爲流傳的趣味數學問題, 在數學競賽中也常見到它的變型 — 集會問題: “證明在至少有六個人參加的任一集會上, 在與會者中或者有三個人以前相互認識, 或者有三個人以前彼此不認識“。因爲六人集會中成員間的相識情況共有 $2^{\binom{6}{2}} = 32786$ 種。顯然通過窮舉來證明結論雖可行但不明智。下面我們用圖論的語言給予證明。具有 n 個頂點且其中任意一對頂點都有邊相連的圖稱爲 n 階完全圖, 記爲 K_n。對六人集會問題, 我們令 K_6 中的頂點代表與會者, 若兩名與會者相互認識, 則將 K_6 中對應的邊染紅色, 反之染藍色後, 於是這個問題就可以表述爲“把 K_6 的每一邊任意染成紅色或藍色後, 在 K_6 中含有 (各邊均是) 紅色的單色的 K_3, 或者含有藍色的單色 K_3”。現從某一頂點 a 出發, 則它連出的5條邊中必有三條邊, 記爲 ab, ac, ad 同色, 不妨設爲紅色。再看這三條邊所對應的三個端點 $\{b, c, d\}$ 所構成的 K_3。若它含有一條紅色邊 bc, 則 K_6 中含有紅色 K_3, abc, 否則 bcd 則爲 K_6 中的藍色 K_3, 證準。

顯然由上述證明知, 如果把 K_6 換成 $K_n(n>6)$ 則結論仍成立。但把 K_6 換成 K_5 則結論不再成立。如圖1所示, 其中紅、藍邊分別用實線、虛線來表示, 在此 K_5 及其邊染色中, 既無紅色 K_3, 又無藍色 K_3。

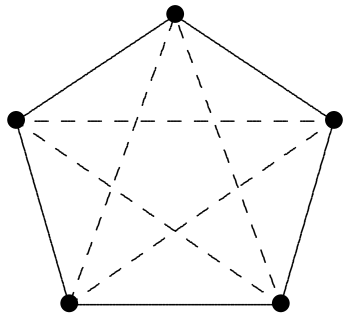

圖1

集會問題的一般情形是: 對給定的整數 $p,q\geq 2$, 當 n 多大時才能保證把 K_n 的每一條邊任意地染成紅色或藍色後, 在 K_n 中或者含有全是紅色的 K_p, 或者含有全是藍色的 K_q。和上面一樣, 如果 K_{n_0} 具有這種性質, 則對任一 $n>n_0$, K_n 也一定具有。但首要問題是由 p,q 所完全確定的這種最小 n_0 值, 稱爲 Ramsey 數, 的存在性, 我們把它記成 $R(p,q)$。簡單情形的 Ramsey 定理將斷言 $R(p,q)$ 一定存在。$R(p,q)$ 的存在性是本文開始所敍述的格言 "任一足夠大的結構中必定包含有一個給定大小的規則子結構" 的一種具體表現。這裡 "任何一個結構" 是邊任意地染成紅色或藍色的 K_n; "給定大小的規則子結構" 則是紅邊的 K_p 或藍邊的 K_q; "足夠大" 體現在 $n\geq R(p,q)$。

由 $R(p,q)$ 的定義, 及前面的討論可知 $R(3,3)=6$, $R(2,q)=q$, $R(p,2)=p$, 且有 $R(p,q)=R(q,p)$。下面來證明比 $R(p,q)$ 的存在的結論稍強的結果:

定理 1: 對任意給定的整數 $p,q\geq 2$, $R(p,q)$ 存在, 且當 $p,q\geq 3$ 時, 下列不等式成立:

$$R(p,q)\leq R(p-1,q)+R(p,q-1)\qquad(1)$$

證: 由於 $R(2,q)=q$, $R(p,2)=p$, 和 $R(3,3)=6$, 故只要證明當 $p,q\geq 3$ 時, $R(p,q)$ 存在且 (1) 式成立。下面對 $p+q$ 應用數學歸納法。

當 $p+q=6$ 時, $p=q=3$, 因 $R(3,3)=6=R(2,3)+R(3,2)$, 故 (1) 成立。今假設當 $p,q\geq 3$, $6\leq p+q<m$ 時, $R(p,q)$ 存在且 (1) 成立。現證 $p+q=m$ 時, $R(p,q)$ 存在且 (1) 成立。這等價於證明下述命題。

"令 $n=R(p-1,q)+R(p,q-1)$, 則把 K_n 的每條邊任意染成紅色或藍色後, 在 K_n 中或者含有紅色的 K_p, 或者含有藍色的 K_q。"

任取 K_n 中的一個頂點 x, 於是 x 在 K_n 中連出 $n-1=R(p-1,q)=R(p,q-1)-1$ 條邊, 下列兩種情況之一必出現:

a) 這 $n-1$ 條邊中有 $R(p-1,q)$ 條紅色邊;

b) 這 $n-1$ 條邊中有 $R(p,q-1)$ 條藍色邊。

不失一般性, 假定 a 出現, 類似地可考慮 b 出現的情況。考察用這 $n_1=R(p-1,q)$ 條紅邊與 x 相連的 n_1 個頂點所構成的完全圖 K_{n_1}。根據歸納法假設, 這 K_{n_1} 中或者有藍色 K_q, 這時命題已成立; 或者含有紅

色 K_{p-1}, 對這 K_{p-1} 添加頂點 x 以及與 x 相連的 $p-1$ 條紅色邊後, 則在 K_n 中含有紅色 K_p, 命題得證。

細心的讀者一定已經注意到其證明思路與六人集會問題是相同的。這裡要指出的是: 知道並證明 Ramsey 數 $R(p,q)$ 的存在性是一回事, 要具體求出它是另外一回事。計算 Ramsey 數是一件異常困難的工作。到目前爲止, 經過好幾代數學家的工作, 再加上計算機的幫助, 總共僅求出了 9 個非平凡的 Ramsey 數, 其中包括了前面求得的 $R(3,3)=6$, 詳見表 1。

表1

q \ p	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4		18	25	35 41	49 61	55 84	69 115
5			43 49	58 87	80 143	95 216	116 316
6				102 165	109 298	122 495	153 780
7					205 540	1031	1713
8						282 1870	3583
9							565 6588

因此要求得更多的 Ramsey 數是對人類智慧的眞正挑戰。Ramsey 理論近代發展的主要推動者之一 P. Erdös 對此有一個十分生動描繪的故事: 假如一個妖精對我們說: ‘告訴我 $R(5,5)$ 的值, 否則我就要毀滅人類’。也許我們最好的策略是集中所有的計算機和計算機科學家來求這個值, 但如果妖精要問 $R(6,6)$ 的值, 我們最好的選擇也許是在它毀滅我們之前, 先動手幹掉它。

既然尋找 Ramsey 數那麼困難, 自然地人們轉向求它的上下界。表 1 同時亦列出了, 在 $3 \le p,\ q \le 9$ 中, 目前已知的最好上、下界。公式 (1) 則是用已知的 Ramsey 數的線性表示給出的 $R(p,q)$ 的上界公式。

下面是近年來得到的一個非線性的上界公式 [10]: 令 $p \le q$, $a+1 \ge R(p-2,q)$, $b+1 \ge R(p,q-2)$, $c+1 \ge R(p-1,q)$, 若 $R(p,q) \ge 2c+2+\frac{1}{3}(b-a)$, 則

$$R(p,q) \le \frac{1}{2}(b+3c+5)$$

$$+\frac{1}{2}[(b+3c+3)^2-8-4a$$
$$-4(1+c)(3c+b-a)]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

(2) 相對於 (1) 能求得更精確的上界。但儘管如此, 當 p,q 稍大時, 上述公式離求得較好的上界差距甚遠。

關於 Ramsey 數的下界, 通常按其定義, 對確定的 K_{n_0} 的邊進行某種染色, 使得 K_{n_0} 中不含紅色的 K_p, 也不含藍色的 K_q, 於是有 $R(p,q)\geq n_0+1$。這就像前面六人集會問題中證明 $R(3,3)\geq 5+1$ 一樣。

對 Ramsey 數的下界, P. Erdös 在1947年發現了一種得到 $R(p,p)$ 下界公式的方法 — 概率方法, 它完全不用任何構造。這裡用下面的下界公式來介紹這種非構造性方法,

$$\text{當 } p\geq 3 \text{ 時, 有 } R(p,p)>2^{\frac{p}{2}} \quad (3)$$

下面給它的證明: 當 $p=3$ 時, (3) 顯然成立, 故下面假定 $p\geq 4$。考察對 K_n 的邊的所有紅、藍染色, 易知它們共有 $2^{\binom{n}{2}}$ 種, 其中使 K_n 含有各邊同色的 K_p 的染色種數不超過

$$\binom{n}{p}\cdot 2\cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{p}{2}}$$

上式中因子“$\binom{n}{p}$”表示 K_n 中各邊同色的 K_p 的個數, 因子“2”表示這種 K_p 可以是紅或藍兩種選擇, 而當某個 K_p 的各邊染成同色後, K_n 中其餘 $\binom{n}{2}-\binom{p}{2}$ 條邊可任意染色, 故有最右方的那個因子。所以, 如果 n 使得

$$\binom{n}{p}\cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{p}{2}+1}<2^{\binom{n}{2}} \quad (*)$$

成立。則存在 K_n 的一種邊的紅, 藍染色, 使 K_n 中沒有各邊同色的 K_p, 於是由定義知: $R(p,p)>n$。

易證當 $n\leq 2^{\frac{p}{2}}$ 時, 有

$$\binom{n}{p}<\frac{n^p}{2^{p-1}}\leq 2^{\frac{p^2}{2}-p+1}$$
$$=2^{\frac{1}{2}p(p-1)-1}\cdot 2^{-\frac{p}{2}+2}\leq 2^{\binom{p}{2}-1}$$

故(*)式成立, 從而 $R(p,p)>2^{\frac{p}{2}}$, 證畢。

若令 $[K]=\{1,2,\cdots,k\}$, 所謂集合 S 的一個 k- 染色是一個映射 $f:S\to[k]$。對 $x\in S$, 若 $f(x)=i$, 則 x 染 i 色。$S_i=f^{-1}(i)$ 稱爲 S 的 i 色集。若 S 的某個子集 $T\subset S_i$, 則稱 T 是 i 色的, 記 $S^{(r)}$ 表示集 S 中所有的 r 元子集簇。於是上述簡單情形的定理可以敍述爲: “對任意給定的數 $q_1,q_2\geq 2$, 存在數 n_0, 使得對任一 $n\geq n_0$ 和 $[n]^{(2)}$ 的任一2-染色, 一定有 $i\in[2]$ 和相應的 q_i 元集 $T_i\subset[n]$, 使 $T_i^{(2)}$ 是 i 色的”。

於是我們有更一般的 Ramsey 定理。

“對任意給定的數 r,k 以及數 $q_1,q_2,\ldots,q_k\geq r$, 存在數 n_0, 使得對任一 $n\geq n_0$ 和 $[n]^{(r)}$ 的任一 k- 染色, 一定有 $i\in[k]$ 和相應的 q_i 元集 $T_i\subset[n]$, 使得 $S_i^{(r)}$ 是 i 色的”。

具有上述性質的數 n_0 的最小者稱爲 Ramsey 數, 由 $q_1,q_2,\cdots,q_k$ 和 r 所唯一確定, 記爲 $R^{(r)}(q_1,q_2,\cdots,q_k)$。

關於 $R^{(r)}(q_1,q_2,\cdots,q_k)$ 的值, 顯然比 $R^{(2)}(q_1,q_2)$ 更難, 故目前人們僅知如下兩個值:

$$R^{(2)}(3,3,3)=17;\ R^{(3)}(4,4)=13.$$

其難度可想而知。

對 $R^{(r)}(q_1, q_2, \cdots, q_k)$ 也有與定理1對應的定理, 這裡不多述了。

若把簡單形式的 Ramsey 定理中的性質用記號: $K_n \to (K_p, K_q)$ 表示, 相應的 $R(p,q) = R(K_p, K_q)$。利用上述記號, Ramsey 定理有這樣圖論的推廣: 設兩個圖 G 和 H, 存在數 n_0 使得當 $n \geq n_0$ 時, 有 $K_n \to (G, H)$。對應的 Ramsey 數記爲 $R(G, H)$, 稱爲圖的 Ramsey 數。類似對 $R^{(2)}(q_1, q_2, \cdots, q_k)$ 在這裡可以推廣成 $K_n \to (G_1, G_2, \cdots, G_k)$ 和 $R(G_1, G_2, \cdots, G_k)$。値得指出的是由於圖的多樣性, 特別是當圖的邊數較少或某些特殊的圖類 (例如, 樹, 圈, 路,$\cdots$), 它們對應的 Ramsey 數的精確値比較好求。這裡我們不一一列舉。

最後我們可以把簡單形式的 Ramsey 定理中的 $[n]$ 換成無限集合, 可得無限形式的 Ramsey 定理:

“設 A 是無限集, 則對任意給定的數 r, k 以及 $A^{(r)}$ 的任一 k- 染色, A 中必定有無限子集 X 使得 $X^{(r)}$ 在 $A^{(r)}$ 的染色下同色。”

這些我們都不再展開討論了。

(2) Schur 定理

本定理被認爲是 Ramsey 理論中最早問世的著名定理, 它是德國數學家 I. Schur 在 1916 年研究有限域上的 Fermat 大定理時發現的。儘管當時並沒有意識到它是一條 Ramsey 型的定理, 但它後來得到一系列推廣和發展, 從而它是 Ramsey 理論的源頭之一。現在這裡用 Ramsey 定理輕鬆地加以證明。

定理2: 對任意給定的正整數 k, 存在數 n_0, 使得只要 $n > n_0$, 則把 $[n]$ 任意 k- 染色後, 必有同色的 $x, y, z \in [n]$ 滿足 $x+y=z$, 這裡 x, y 和 z 不一定互不相同。

證: 取 $n_0 = R^{(2)}\overbrace{(3, 3, \cdots, 3)}^{k\text{個}} - 1$ 即可。

設 $n \geq n_0$, $[n]$ 中的一個 k- 染色爲 $f: [n] \to [k]$。由 f 可以誘導出 $[n+1]^{(2)}$ 的一個如下定義的 k- 染色 f': 對 $1 \leq i < j \leq n+1$, 定義 $f'(\{i, j\}) = f(j-i) \in [k]$。因爲 $n+1 \geq R^{(2)}\overbrace{(3, 3, \ldots, 3)}^{k\text{個}}$, 由Ramsey 定理, $[n+1]$ 中一定存在3元子集 $\{a, b, c\}$, 它的3個2元子集被 f' 染成同色, 不失一般性假設 $a < b < c$。則上述性質可寫成: $f'(\{a, b\}) = f'(\{b, c\}) = f'(\{c, a\})$。再根據 f' 的定義, 上式就是 $f(b-a) = f(c-b) = f(c-a)$, 令 $x = b-a, y = c-b, z = c-a$, 即爲定理中所求, 證畢。

通常把定理2中數 n_0 的最小可能値記成 $S_k + 1$, 稱 S_k 叫 Schur 數, 和 Ramsey 數一樣, 人們對 Schur 數已知的僅有4個: $S_1 = 1, S_2 = 4, S_3 = 13$, 和 $S_4 = 44$。其中 S_4 還是在1965年借助於計算機最終確定的。

對 Schur 定理, 對照本文一開始所敍述的格言, 這裡“任何一個結構”是把 $[n]$ 任意地 k- 染色”, “給定大小的規則子結構”則是

包含 x, y, z 的 $[n]$ 中的色集且滿足 $x+y=z$, “足夠大”是相應的 Schur 數要足夠大。

在 Schur 的指導下, R. Rado 對 Schur 定理做出了深刻的推廣, 人們通常稱爲 Rado 定理, 儘管它也是 Ramsey 理論的經典定理之一, 同時又是後面我們要提到的 Van der Waerden 定理非常深刻的推廣。仍把它放在本章介紹。

Rado 把一個整係數齊次方程組

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

稱爲正則的, 如果正整數集 N 的任一有限染色, 此方程組一定有單色的正整數解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。Rado 定理則給出了一般的整係數線性齊次方程組正則的充要條件。由於證明比較複雜而從略。

顯然 Schur 定理斷言方程 $x_1+x_2-x_3=0$ 是正則的。從而它是 Rado 定理如下的簡單特例的特例。

“整係數方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是非零整數, 正則的充要條件是方程的某些係數 a_i 之和爲零”。

(3) Van der Waerden 定理

本定理是 1928 年荷蘭數學家 Van der Waerden 證明的一個結果, 但當時的證明很繁, 之後一直有人給出新證明。目前通常引用的是 1974 年美國數學家 R. L. Graham 和 B. L. Rothchild[5] 的簡短證明, 即使這樣也需要4頁的篇幅, 因此在此不打算寫出它。

定理3: 對任意給定的正整數 l 和 k, 必存在具有如下性質的數 $W=W(l,k)$。對 $[W]$ 的任一 k- 染色, $[W]$ 中有各項同色的 l 項等差數列。

Van der Waerden 定理是 Ramsey 理論的源頭之一, 它和前面兩個定理一樣, 定理3僅僅肯定了數 $W(l,k)$ 的存在性。如果把這種數的最小者仍記爲 $W(l,k)$, 稱爲 Van der Waerden 數。要確定這些數非常困難, 甚至比確定 Ramsey 數 $R(p,q)$ 還要難。目前已知 $W(l,k)$ 僅表2中的5個值。

表2

l \ k	2	3	4
3	9	27	76
4	35		
5	178		

其中 $W(3,2)=9$ 的證明較易, 顯然我們不會將 $2^9=512$ 種情況來列舉。只需要考慮兩種情況 (a) 4,6 同色; (b) 4,5 同色, 4,6 異色。再加不太多的討論即可證明。其詳細論證留給讀者。其餘四個值都是借助計算機得到的。

因此, 我們同樣感興趣 $W(l,k)$ 的上下界。

關於其下界用概率方法, 不難得到:

$$W(l,2) > \frac{2^l}{2el} - \frac{1}{l}$$

但它與歷史上人們所得到的 $W(l,2)$ 的上界有天壤之別, 以致它的增長速度必須

用 Ackerman 層次的一系列函數才能表示。這個層次的第一層函數稱爲“加倍函數”記爲 $A_1(n) = 2n$, 第二層函數稱爲“指數函數” $A_2(n) = 2^n$, 亦可由 A_1 遞推來定義: 令 $A_2(1) = A_1(1) = 2, A_2(n) = A_1(A_2(n-1))(n > 1)$。類似地令 $A_3(1) = A_2(1) = 2, A_3(n) = A_2(A_3(n-1))(n > 1)$, 因此它可以寫成2的 n 層塔冪的形式:

$$A_3(n) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \quad (\text{共 } n \text{ 個 } 2)$$

故 A_3 稱爲塔冪函數, 其增長速度已經相當快了, 事實上:

$A_3(1) = 2$, $A_3(2) = 4$, $A_3(3) = 2^{2^2} = 16$, $A_3(4) = 2^{16} = 65536$, $A_3(5) = 2^{65536}, \ldots$

$A_3(5)$ 若把它寫成十進位數的話將近2萬位, 已經非常之大了。

一般地, 由 k 層函數 A_k, 可以定義 $k+1$ 層函數 A_{k+1} : $A_{k+1}(1) = A_k(1) = 2$, $A_{k+1}(n) = A_k(A_{k+1}(n-1))(n > 1)$。上述的 A_3 比起 A_4 來又微不足道了, 例如 $A_4(4) = A_3(A_4(3)) = 2$ 的65536層塔冪, 它已大的難以置信。R. L. Graham 和 J. H. Spencer 是這樣描述 $A_4(4)$的: “即使一個數大得必需用世界上所有書的全部篇幅再加上所有計算機的全部存儲能力才能把它容納進去, 這個數同 $A_4(4)$ 相比仍然小得微不足道”。Spencer 建議把 A_4 稱爲 WOW 函數。但不管怎麼說, 對一個固定的正整數 m, $A_m(n)$ 作爲 n 的函數還是限於第 m 層次, 其增長速度仍有所約束。下面定義的函數 A 將突破任何固定的層次。定義 $A(n) = A_n(n)$, 稱爲 Ackerman 函數。

Van der Waerden 1927 年首次證明並以他名字命名的這個定理以來, 之後的60年間又找到了不少新的證明。但對 $W(l,2)$ 的上界估計均爲 $A(l)$。這上、下界天壤之別直到 1987 年以色列數學家 S. Shelah[12] 取得了重大突破, 證明了:

$$W(l,2) \le A_3(2W(l-1,2)) < A_4(l)$$

1988 年 W. T. Gowers [2] 進一步改進成爲:

$$W(l,2) \le N(l,\delta) \le 2^{2^{\log|\delta|^{2^{2^{l+c}}}}}$$

這裡 c 是常數, Gowers 以此項成果及 Banach 空間中工作獲得 Fields 獎。值得一提的是 Gowers 第一次把 Ramsey 理論應用於泛函分析的研究, 使習慣於把純數學應用於組合論的研究者大吃一驚。Van der Waerden 定理斷言, 把正整數集 N 任意分拆成有限部分後, 必有一部份含有任意給定項數的等差數列, 但定理並未回答到底哪一部份具有這性質。E. Szemared[13] 1975 年證明了如下結果:

“對任給的 $\delta > 0$ 和正整數 n, 存在 $N = N(l,\delta)$, 使得 $[N]$ 中每一測度不小於 εN 的子集均含有長度均爲 l 的等差數列”。

顯然 Van de Waerden 定理是上述結果的一個簡單推論。在深入研究 Van der Waerden 定理方面, 1963 年 A. W. Hales 和 R. I. Jewitt[7] 證明了一個與 Van der Waerden 定理作爲整數的結論不同的關於組合結構的結論。之後, 1971 年 R. L. Graham 和 B. L. Rothschild[4] 引入了非常一般的組合結構 — 參數集, 並對這種組合結構證明了相應的 Ramsey 型定理, 這條定理

涵蓋了以前的許多經典定理作爲其特例, 故在某種程度上可以看作 Ramsey 理論的起點。值得再提一提的是, 在上述論文的啓示下, 1972 年 R. L. Graham, K. Leeb 和 B. L. Rothschild[3] 解決了 Rota 提出來的一個猜想, 證明了如下結果:

有限域上向量空間的 Ramsey 定理: 對任意給定的有限域 F 以及數 l, r, k, 存在數 n 使得對 F 上的 n 維向量空間 F^n 的所有 r 維向量子空間作任意 k-染色後, F^n 中必有 l 維向量子空間, 它的所有 r 維向量子空間同色。

這個定理是 Ramsey 理論的近代發展史上的一個重要成果, 三位作者因這項工作榮獲美國 SIAM 頒發的 Pólya 獎。

最後, 我們還要介紹一個關於幾何中的 Ramsey 理論方面的結果, 以饋讀者。

(4) Erdös-Szekeres 定理

雖然 Ramsey 定理在 1930 年已公開發表, 但這結果並未引起當時數學界的注意, 使其廣爲人知要歸功於 1935 年 P. Erdös 和 D. Szekeres 的論文[1], 但相對前面的定理而言是一個比較“孤立”的結果。

定理4: 設正整數 $m \geq 3$, 則存在正整數 N, 使得平面上任意給定的無三點共線的 N 個點中, 必有 m 個點是凸 m 多邊形的頂點, 上述數 N 的最小値記爲 $N(m)$。

證明: $m = 3$ 時, 定理顯然成立且這時 $N(3) = 3$。下面假定 $m \geq 4$, 令 $N = R^{(4)}(m, 5)$, 對平面上任意給定的無三點共線的 N 個點, 可以把這 N 個點的所有4點子集分成兩類: 如果4個點是凸四邊形的4個頂點, 則此4點集歸入第一類, 其餘的4點集都歸入第二類。根據 $N = R^{(4)}(m, 5)$ 的 Ramsey 數定義, 在這 N 點中一或者有 m 個點它們的任一4點子集都屬於第一類; 或者有5個點, 它們的任一4點集都屬於第二類。但我們注意到如果平面上的5個點中沒有三個點共線時, 其5點的凸輪廓共有三種情形如圖2。

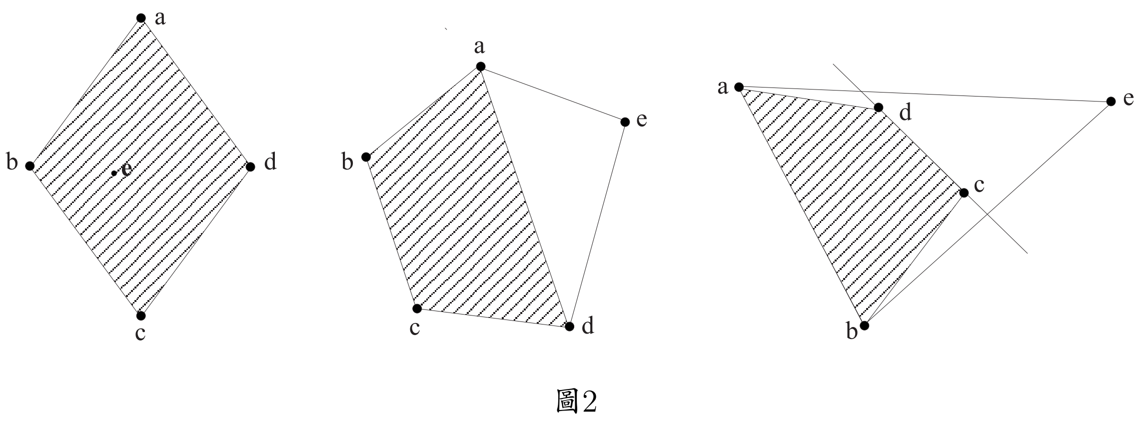

圖2

圖中陰影部分所示的 $abcd$ 就是一個凸四邊形。故有5個點, 它們的任一4點集都屬於第二類這種情況不可能發生, 所以我們只要再證明下述結論$(**)$成立即可。

“設平面上 m 個點中無3點共線, 而且其中任意4點都是凸四邊形的頂點, 則這 m 個點一定是凸 m 邊形的頂點。” $(**)$

現在對 $m \geq 4$ 用歸納法來證明$(**)$, $m=4$ 時結論顯然成立, 設 $m>4$, 首先不難證明這 m 點中一定有三點 A, B, C 使得其餘 $m-3$ 個點都位於 $\angle ABC$ 區域的內部。且注意在 $\triangle ABC$ 中一定沒有所給出的點, 考察除 A 之外的 $m-1$ 個點, 根據歸納假設, 它們構成某個凸 $m-1$ 邊形的頂點, 且易知邊 BC 一定是這個凸 $m-1$ 邊形的一條邊。現把 BC 邊換成 AB, AC 兩邊後所得到的是一個凸 m 邊形。故$(**)$成立, 證畢。

和 Ramsey 數一樣, 要想確定數 $N(m)$ 也異常困難, 除了平凡的值 $N(3)=3$, 和上面所證明的 $N(4)=5$ 外, 還有 $N(5)=9$。這就是我們目前知道的 $N(m)$ 值。

在 1935 年的經典論文中, 並未利用 Ramsey 數來證明, 事實上在當時, 定理4的發現是再一次的發現了 Ramsey 定理。

(5) 結束語

Ramsey 理論經 F. P. Ramsey, P. Erdös, R. L. Graham 以及其他許多數學家的工作奠定了它的基礎。本短文僅僅粗略地介紹經典的 Ramsey 理論部分, 即使這樣像歐氏空間中的 Ramsey 理論, Ramsey 集等內容亦未涉及。有志進一步了解和研究的讀者可參閱 [4], [11], [10], [9], 隨著時間的推移, 它們分別記錄那個年代的豐碩成果和多姿多彩的面貌。Ramsey 理論在 90 年代有很大發展, 取得了豐富的成果。近幾年來國際上幾項重要的數學獎項像 1997 年的 Fulkerson 獎得主 J. H. Kim, 1998 年的 Fields 獎得主 W. T. Gowers, 1999 年的 Wolf 獎得主 L. Lovász 均與他們在 Ramsey 理論有關方面的傑出成就相關。由此對此理論發展可見一斑。儘管如此, 人們還只是剛剛開始探索 Ramsey 理論的意義以及其影響。從這個理論可以看到, 數學的基本結構有相當大一部分是由極大的數和集合組成的, 這些數與集合大得難以表示, 更不用說理解了。Ramsey 理論向人們展示它廣闊的前景。新的東西等待著我們去探索, 千里之行, 始於足下, 我們剛剛邁開成功的第一步, 前面的路還很遙遠。年輕的大學生們, 勇敢地去闖吧!

參考文獻

1. Erdös, P. and D. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, Compos. Math., 2(1935), 463-470.
2. Gowers, W. T., A new proof of szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four, Geom. Funct. Anal., 8(1998), 529-551.
3. Graham, R. L., K. Leeb and B. L. Rothschild, Ramsey's theorem for a class of categories, Adv. in Math., 8(1972), 417-433.
4. Graham, R. L. and B. L. Rothschild, Ramsey's theorem for n-parametr sets,

Trans. Amer. Math. Soc., 159(1971), 257-292.

5. Graham, R. L. and B. L. Rothschild, A short proof of van der Waerden's theorem on arithmetic progressions, Proc. Amer. Math. Soc., 42(1974), 356-386.
6. Graham, R. L., B. L. Rothschild and J. H. Spencer, Ramsey Theory (1st Edition) 1980 (2nd Edition) 1990 John Wiley & Sons, New York.
7. Hales, A. W. and R. I. Jewett, Regularity and positional games, Trans. Amer. Math. Soc., 106(1963), 222-229.
8. Huang Yi Ru and Zhang Ke Min, A new upper bound formula for two color classical Ramsey numbers, J. Combin. Math. Combin. Comp., 28(1998), 347-350.
9. Nešetřil, J., Ramsey Theory, 1331-1403, in Handbook of Combinatorics, 1995, Edited by R. L. Graham, M. Grötschel and L. lovász, Elsevier.
10. Nešetřil, J. and V. Rödl, (Eds) Mathematics of Ramsey Theory, 1990, Springer-Verlay.
11. Prömel, H. J. and B. Voigt, Aspects of Ramsey Theory, 1990, Springer-Verlay.
12. Shelah, S., Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers, J. Amer. Math. Soc., 1(1988), 683-697.
13. Szemerédi, E., On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, Acta Arithm., 27(1975), 199-245.

—本文作者任教於南京大學數學系—