流

朱緒鼎

什麼是生命?
生命就是流。
　　是能量在個體與宇宙之間交換，
　　是氣在體內與體外之間游走。
當生命停止，當呼吸不再，
　　　　　流，並未結束。
因爲你的體內亦是他的體外，
因爲一個生命的終止是另一個生命的開頭，
因爲地球還在運轉，
　　太陽還在發光，
　　宇宙還在膨脹，
　　時間還在奔流。
個體的生命有限，
宇宙的生命無窮，
流，與時間共存亡，
　　和無垠相左右。
流是風，流是雨，
　流是奔騰的江河，
　　流是起伏的山丘。
　　　流是婀娜的小草，
　　　　　在微風中搖曳。
流是我飄渺的思緒，
　　在飄渺的地方遨遊。

一. 簡介

前頁雖不是胡言胡語, 也可算是痴言痴語。現在正式介紹本文所要討論的流。

假設下圖表示一個封閉的運輸系統。

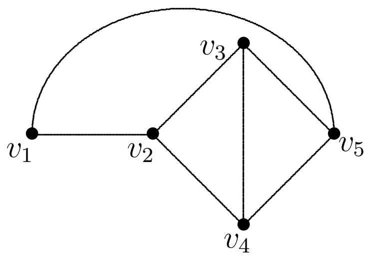


圖1

v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 代表中轉站, 連接站與站之間的線條表示運輸的線路。

假設對每一運輸線路賦以一個方向和一個實數。其解釋如下: 若連接 v_1, v_2 的線路賦以方向爲 $v_1 \longrightarrow v_2$, 且值爲2.5, 則表示設該線路將 2.5 個單位的"物質"從 v_1 運送到 v_2, 若連接 v_3, v_4 的線路賦以方向是 $v_3 \longrightarrow v_4$, 其值爲 -1, 則表示沿該線路將 -1 個單位的物質從 v_3 運送到 v_4, 等價於將一個單位的物質從 v_4 運送到 v_3。

這種賦值和方向稱之爲該系統的一個權函數 (weight)。如果一個權函數滿足下面的平衡條件

$(*)$ 對每一個中轉站 v_i, 流進 v_i 的物質 $=$ 流出 v_i 的物質,

則我們稱它爲一個流。所以一個流, 是一個特殊的權函數。

這裡定義的流, 也許可以用一個更時髦的名字"清流"— 因爲每一個中轉站都不貪污、揩油, 收多少, 出多少。不過, 時髦的東西往往不能久遠, 我們還是用這個清淡名字— 流 (flow)。

流, 就是這篇文章討論的主題。

二. 符號、定義

首先, 我們介紹幾個名詞和符號。

形如圖的系統我們稱之爲一個圖 (Graph)。嚴格地講, 一個圖由兩個集合組成: 頂點集 (對應於中轉站) 和邊集 (對應於運輸線路)。常常用 $G = (V, E)$ 表示一個圖。V 是頂點集, E 是邊集。E 中的每一個元素 (每一條邊), 對應於兩個不同的頂點。若 $e \in E$ 對應於頂點 x, y, 則稱 e 是連接 x 和 y 的邊, x, y 爲 e 的端點。若有兩條邊 e, e' 連接相同的兩點 x, y, 則稱 e, e' 爲重邊。在本文中, 重邊是被允許的。有些地方, 圖中的一條邊的兩個端點可以是同一個頂點。但在這裡, 我們不考慮這樣的圖。

若 $x, y \in V$ 有一條邊連接它們, 則稱 x, y 相鄰, x 爲 y 的鄰居, y 也爲 x 的鄰居。記 $N_G(x)$ 爲 x 的鄰居全體形成的集合, 其大小 $|N_G(x)|$ 記爲 $d_G(x)$, 稱之爲 x 的度 (degree)。

假設 $G = (V, E)$ 是一個圖。給 G 的每一條邊賦以一個方向, 我們得到一個有向圖, 記作 $\vec{G} = (V, \vec{E})$。我們稱 $\vec{G}$ 是通過 G 賦以方向所得的有向圖, $\vec{E}$ 中的每一元素是一條有向邊, 它對應於一個有序的頂點對。若 $e \in \vec{E}$ 對應的有序頂點對是 (x, y), 稱 e 爲從 x 到 y 的邊, 有時記作 $e = x \to y$, y 爲 e 的頭, x 爲 e 的尾, y 爲 x 的出鄰居,

x 爲 y 的入鄰居。記 $N^+(x)$ 爲 x 的出鄰居的全體, $N^-(x)$ 爲 x 的入鄰居的全體。記 $E^+(x)$ 爲以 x 爲尾的邊的全體, 記 $E^-(x)$ 爲以 x 爲頭的邊的全體。

有了這些概念, 我們可準確的定義權和流如下:

定義1: $\vec{G}=(V,\vec{E})$ 上的一個權是一個映射 $f:\vec{E}\to R$。$\vec{G}=(V,\vec{E})$ 上的一個流是一個滿足如下條件的權,

$$(*)\quad \forall v\in V,\ \sum_{e\in E^+(v)} f(e)=\sum_{e\in E^-(v)} f(e).$$

定義2: 假設 $A\subset V$ 是 V 的一個子集, $A\neq\varnothing$, $A\neq V$。令 $B=V-A$。稱 (A,B) 爲 $\vec{G}$ 的一個分割, 我們也用 (A,B) 表示所有連接 A 和 B 的邊的全體。所以, 一個分割也是一個邊的子集。記 $[A,B]$ 爲 $\vec{G}$ 中所有從 A 到 B 的邊, 即

$$[A,B]=\{x\to y: x\in A,\quad y\in B\}。$$

引理1: 若 f 是 $\vec{G}=(V,\vec{E})$ 的一個流, (A,B) 是 $\vec{G}$ 的一個分割, 則

$$\sum_{e\in[A,B]} f(e)=\sum_{e\in[B,A]} f(e)$$

證明: 在求和公式

$$\sum_{v\in A}\Big(\sum_{e\in E^+(v)} f(e)-\sum_{e\in E^-(v)} f(e)\Big)$$

中, 對每一條 $[A,B]$ 中的邊 e, $f(e)$ 出現一次, 對每一條 $[B,A]$ 中的邊 e, $-f(e)$ 出現一次, 對兩端點都在 A 中的邊 e, $f(e)$, $-f(e)$ 各出現一次。對兩端點都不在 A 中的邊 e, $f(e)$, $-f(e)$ 均不出現。故

$$\sum_{v\in A}\Big(\sum_{e\in E^+(0)} f(e)-\sum_{e\in E^-(0)} f(e)\Big)=\sum_{e\in[A,B]} f(e)-\sum_{e\in[B,A]} f(e)$$

因爲對任何 $v\in V$,

$$\sum_{e\in E^+(0)} f(e)-\sum_{e\in E^-(0)} f(e)=0,$$

故引理得證。

三. 流指標和幾個重要猜想

定義3: 設 $r\geq 2$ 是一個實數。$\vec{G}=(V,\vec{E})$ 上的一個流 f 稱之爲一個 r-流, 如果 $\forall e\in\vec{E}$, $1\leq|f(e)|\leq r-1$。

引理2: 設 f 是 $\vec{G}=(V,\vec{E})$ 上的一個 r-流。$\vec{G}'=(V,\vec{E}')$ 由 $\vec{G}$ 改變一條邊 e_0 的方向所得 (即若 $e_0=x\to y\in\vec{E}$, 則 $e_0'=y\to x\in\vec{E}'$, 且 $\vec{E}-\{e_0\}=\vec{E}'-\{e_0'\}$)。令 $f':\vec{E}'\to R$ 爲 $f'(e_0')=-f(e_0)$, $\forall e\in\vec{E}'-\{e_0'\}$, $f'(e)=f(e)$ 則 f' 是 $\vec{G}'$ 的一個 r-流。

引理2可由定義直接驗證, 證明從略。由引理2可得, 設 $\vec{G}$, $\vec{G}'$ 都是由 G 賦以方向所得的有向圖, 若 $\vec{G}$ 有一個 r-流, 則 $\vec{G}'$ 也有一個 r-流。所以, 是否存在 $\vec{G}$ 的一個 r-流是由圖 $G=(V,E)$ 的結構決定, 與邊的方向性無關。由此, 我們可定義一個圖 $G=(V,E)$ 的流指標 (flow index) 如下:

定義 4: 設 $G=(V,E)$ 是一個圖。設 $\vec{G}$ 是由 G 賦以方向所得的有向圖。若 $\vec{G}$ 有一個 r-流, 則稱 G 存在一個 r-流。G 的流指標 $F(G)$ 定義如下:

$F(G)=\inf\{r$: G 存在一個 r-流 $\}$ 若對任意 $r\in R$, G 不存在 r-流, 則 $F(G)=\infty$。

首先, 我們看什麼樣的圖 G, 其流指標 $F(G)=\infty$。若 G 有一分割 (A,B) 恰有一條邊 e, 則根據引理1可知, 對 $\vec{G}$ 的任何一個流 f , $f(e)=0$, 故 G 不存在一個 r-流。我們稱只含有一條邊的分割爲一個橋 (bridge)。所以, 有橋的圖其流指標爲無窮大。

反之, 任何一個無橋的圖, 都有一個有限的流指標。而且流指標都不是太大。

接下來, 我們看什麼圖 G, 其流指標 $F(G)=2$。爲方便起見, 我們可假設 G 是連通圖 (若不然; 則各個連通分支分開考慮即可)。若 f 是 $\vec{G}$ 上的一個2-流, 則對 G 的任何一條邊 e, $f(e)=\pm 1$。因爲對任意頂點 v,

$$\sum_{e\in E^+(0)} f(e)-\sum_{e\in E^-(0)} f(e)=0,$$

我們一定有 $|E^+(v)\cup E^-(0)|\equiv 0 \pmod 2$。(因爲奇數個 ± 1 的代數和不可能等於0)。所以 G 的每個頂點的度數都是偶數。

反過來, 若 G 的每個頂點的度數都是偶數, 則 G 有一個歐拉迴路 (即一個封閉的路線通過該分支的每條邊恰好一次。若你有考慮過一筆畫的問題, 慢慢思考一下, 應可以理解。若從來沒考慮過一筆畫問題, 也許你會有興趣, 現在考慮一下, 並找一點相關的資料看看)。沿著該迴路的方向給每一條邊賦向, 再令 $f(e)=1$, 就得到了 $\vec{G}$ 上的一個2-流, 故$F(G)=2$。

所以, $F(G)=2 \iff G$ 的每個頂點的度數爲偶數。那麼, 對於其它的圖, $F(G)$ 的值會是少呢?

猜想 1: 若 G 是一個無橋的圖, 則 $F(G)\le 5$。

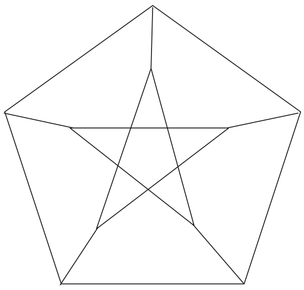
猜想1是 Tutte 在 1954年提出來的。近五十年過去了, 猜想依然沒有解決。不過, P. Seymour 在1981年證明了下面的定理。

定理 1: 若 G 是一個無橋的圖, 則 $F(G)\le 6$。

定理1離猜想1很近了, 但最終解決猜想1還是很難。Tutte 還有兩個關於流的猜想, 也是非常困難的問題。

假設 $e=xy$ 是 G 的一條邊, 將邊 e 收縮 (爲一個頂點) 是指從 G 中去掉頂點 x,y (及與之相連的邊), 加進新的頂點 z, 使得 $N(z)=(N(x)\cup N(y))-\{x,y\}$。直觀上, z 是由將 x 和 y 合成一點得到的。若 $E_0\in E$ 是 G 的一組邊, 將 E_0 中的每一條邊收縮, 得到的圖記作 $G|_{E_0}$。

如果我們從 G 中去掉一些點和邊, 得到的圖稱爲 G 的子圖。如果我們將 G 的一個子圖的一些邊收縮, 得到的圖稱爲 G 的 minor。



Petersen 圖

上圖是一個很特別的圖, 它的名字叫 Petersen 圖。

猜想2: 若 G 是一個無橋的圖, 且 Petersen 圖不是 G 的一個 minor, 則 $F(G)\le 4$。

猜想3: 若 G 是一個無橋的圖, 且 G 沒有一個分割 (A,B) 恰好有三條邊, 則 $F(G)\le 3$。

這三個猜想在圖論的研究中受到極大的重視, 它們和許多其它的圖論問題有聯繫。與之相關的研究很多, 也取得相當的成就, 但問題的最終解決還是可望不可及。

四. 整數流

若 $\vec{G}$ 的一個流 f 滿足 $f(e)\in Z$, 稱 f 是一個整數流。若 $r\ge 2$ 是一個整數, f 是一個 r-流, 且是一個整數流, 則稱 f 爲一個處處不爲零的 r-整數流。所以, 一個處處不爲0的 r-整數流是一個映射。

$$f:\vec{E}\to\{-r+1,-r+2,\cdots,\\ -1,1,2,\cdots,r-1\}$$

滿足

$$(*)\quad \forall v\in V,\ \sum_{e\in E^{+}(v)} f(e)=\sum_{e\in E(v)} f(e).$$

根據定義, 若 $r\ge 2$ 是一個整數, 則任何一個處處不爲零的 r-整數流是一個 r-流。反過來, 一個 r-流卻不一定是一個處處不爲零的 r-整數流。不過, 我們有如下的引理:

引理3: 若 $r\ge 2$ 是一整數, $\vec{G}$ 存在一個 r-流, 則 $\vec{G}$ 存在一個處處不爲0的 r-整數流。

證明: 令 f 是 $\vec{G}$ 的一個 r-流, 令 $\vec{E_f}=\{e\in\vec{E},f(e)\notin Z\}$。取 f 使得 $|\vec{E_f}|$ 最小 (即 $\vec{G}$ 中 f 值不爲整數的邊最少)。若 $\vec{E_f}=\varnothing$, 則 f 是一個處處不爲0的 r-整數流。假設 $\vec{E_0}\ne\varnothing$。$\vec{E_f}$ 中的邊生成的有向圖 $\vec{G_0}=(V,\vec{E_f})$ 是 $\vec{G}=(V,\vec{E})$ 的子圖。

首先我們證明 $\vec{G_0}$ 也是一個無橋的圖。假設相反, (A,B) 是 $\vec{G_0}$ 的一個分割, $\vec{G_0}$ 恰有一條連結 A 和 B 的邊 e^*。(A,B) 也是 $\vec{G}$ 的一個分割。根據引理1,

$$\sum_{e\in[A,B]} f(e)=\sum_{e\in[B,A]} f(e).$$

注意, 這裡 $[A,B]$ 是指所有 $\vec{G}$ 中從 A 到 B 的邊, $[B,A]$ 是指所有 $\vec{G}$ 中從 B 到 A 的邊。

不失一般性, 假設 $e^*\in[A,B]$。因爲 $[A,B]$ 和 $[B,A]$ 中的其它邊都不屬於 $\vec{E_0}$, 即這些邊上的 f 值都是整數。故 $\sum_{e\in[A,B]} f(e)$ 不是整數, 而 $\sum_{e\in[B,A]} f(e)$ 是整數。矛盾。所以我們證明了 $\vec{G_0}$ 是一個無橋的圖。

令 $e^* = x \to y$ 是 $\vec{G_0}$ 中的一條邊。因爲 $\vec{G_0}$ 無橋, 在 $\vec{G_0} - e^*$ 中, 有一條連接 x 和 y 的路。如下圖所示:

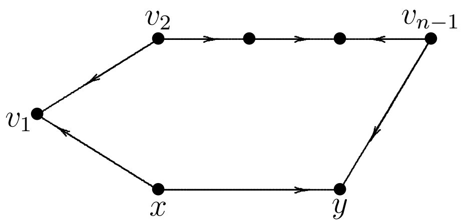


圖2

記這條路爲 $(x = v_0, v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}, v_n = y)$。其中, $v_i \in V$ 是 $\vec{G_0}$ 的頂點, 且對任意的 i, 或者 $v_i \to v_{i+1}$ 是 $\vec{G_0}$ 的一條邊, 或者 $v_{i+1} \to v_i$ 是 $\vec{G_0}$ 的一條邊。令 $e_i = v_i \to v_{i+1}$ 或 $e_i = v_{i+1} \to v_i$, 注意根據定義, $f(e_i)$ 不是整數。故

$$1 \le \lfloor f(e_i) \rfloor < f(e_i) < \lceil f(e_i) \rceil \le r - 1$$

令 $\delta^* = f(e^*) - \lfloor f(e^*) \rfloor$,

對 $i = 0, 1, \cdots, n-1$,

$$令\ \delta_i = \begin{cases} \lceil f(e_i) \rceil - f(e_i)\ 若\ e_i = v_i \to v_{i+1} \\ f(e_i) - \lfloor f(e_i) \rfloor\ 若\ e_i = v_{i+1} \to v_i \end{cases}$$

令 $\delta = \min\{\delta^*, \delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_{n-1}\}$。

重新定義一個 $\vec{G} = (V, \overline{E})$ 上的權函數 f' 如下:

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) & 若\ e \neq e^*, e_0, e_1, \cdots e_{n-1} \\ f(e) + \delta & 若\ e = e_i = v_i \to v_{v+1} \\ f(e) - \delta & 若\ e = e_i = v_{i+1} \to v_i \\ & 或\ e = e^*. \end{cases}$$

容易驗證, f' 也是 $\vec{G}$ 的一個 r-流, 且 $|E_{f'}| < |E_f|$。(請讀者自行驗證, 若有問題, 則需重讀一遍定義, 或找同學, 老師討論)。這與我們選取 f 的方式矛盾。引理3得證。

根據引理3, 前面介紹過的猜想可敘述如下 (這才是這些猜想的原始陳述方式):

猜想 1: 每一個無橋的圖都有一個處處不爲0的5-整數流。

猜想 2: 若 G 是一個無橋圖, 且 Petersen 不是 G 的一個 minor, 則 G 有一個處處不爲0的4-整數流。

猜想3: 若 G 是一個無橋圖, 且 G 沒有一個分割 (A, B) 恰含3條邊, 則 G 有一個處處不爲0的3-整數流。

五. 平面圖的面著色

一個圖 G 的平面嵌入是指將圖 G 畫在平面上 (即畫在紙上) 使得任意兩條邊都不“交叉”。

例如:

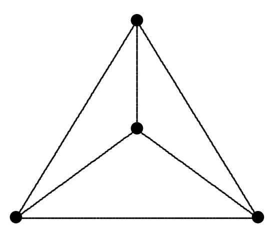


圖3

圖三就是一個圖的平面嵌入。

有些圖存在平面嵌入, 有些圖則不存在平面嵌入。例如 Petersen 圖就不存在平面嵌入。也就是說, 不管你怎麼畫, 總有兩條邊會交叉。(注: 所謂把圖畫在平面上, 即是用點來代表圖的頂點, 圖的一條連結 x, y 兩頂點的邊, 則用一連接 x, y 兩點的曲線段表示。曲線的形狀, 點的位置可任意選取)。一個平面圖是指一個已經嵌入在平面上的圖 (即已畫好的圖, 畫好是指邊與邊不交叉)。

若 G 是一個平面圖, G 的一個面是指一個由 G 的邊所界定的平面上的極大區域。例如:

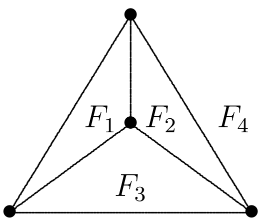


圖4

圖四的平面圖有4個面, 包括一個無窮盡的面 F_4, 及三個有限面 F_1, F_2, F_3。

一個平面圖的面著色是指將它的每個面塗上一種顏色, 使得有公共邊界的面塗不同的顏色。至於無公共邊界的面則可塗相同的顏色, 當然也可塗不同的顏色。例如圖四中的4個面, 兩兩都有公共邊界, 故兩兩要塗不同的顏色。

圖論中有一個著名的問題, 稱之爲四色問題。它是指下面的命題:

命題1: 每一個平面圖的面都可用四種顏色著色。

這一問題 1852 年由一個地圖印刷廠工人提出, 1860 年出現在印刷品中, 1878 年在倫敦的一次會議中作爲一個 open problem 提出。其後, 它困擾數學家一百多年, 1977 年, Appel, Haken 借助於計算機證明命題1是正確的。但是, 人們依然對這一問題充滿興趣。Appel-Haken 的證明離不開大量的計算機的驗證。使得其它人的驗證幾乎不可能。另外, 人們總希望能找到一個傳統意義下的證明, 甚至是簡短的證明。

命題1, 長久以來被稱之爲四色問題。隨著時間的推移, 人們對 Appel-Haken 的證明的正確性的懷疑慢慢的減少。1991 年只有四位數學家用類似的方法再次證明了命題1。雖然計算機驗證仍然不可缺少, 但計算的時間則縮短。現在, 我們稱命題1爲四色定理。

六. 著色與流的關係

平面圖的面著色和流初看上去風牛馬不相及, 但實質上卻是同一個問題的兩個側面。

定理2: 設 G 是一個無橋平面圖, $r \geq 2$ 是一個整數。則 G 可 r-著色等價於 G 存在一個處處不爲0的 r-整數流。

證明: 令 $\vec{G}$ 是由 G 賦以方向得到的一個有向圖。設 $f : \vec{E} \to \{-r+1, -r+2, \cdots, -1, 1, 2, \cdots, r-1\}$ 是 $\vec{G}$ 的一個處處不爲0的 r-整數流, 我們構造 G 的一個面著色 g 如下:

任取 G 的一個面 F_0, 令 $g(F_0) = 0$, 設 F 是 G 的一個面。畫一條從 F_0 的內部

到 F 的內部不穿過任何頂點 (僅穿過邊) 的曲線 P, 如下圖:

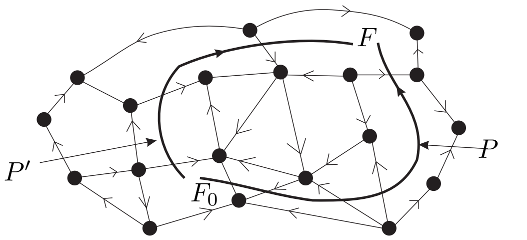


圖5

令 $\vec{E}_p$ 是 P 所穿過的邊全體。$\vec{E}_p$ 有的邊是從 P 的左邊指向右邊, 有的是從右邊指向左邊, 令 $\vec{E}_{P,L}$ 是 $\vec{E}_P$ 中從 P 的左邊指向右邊的邊。$\vec{E}_{P,R}=\vec{E}_P-\vec{E}_{P,L}$。

令 $g(F)\equiv \sum\limits_{e\in\vec{E}_{P,L}} f(e)-\sum\limits_{e\in\vec{E}_{P,R}} f(e) \bmod (r)$

我們要證明 g 是一個 r-著色, 即 g 用 r-種顏色將 G 的面著色, 使有公共邊界的面著不同的顏色。

首先, 我們要證明 $g(F)$ 的定義不依賴於曲線 P 的選擇。令 P' 是另一條從 F_0 到 F 的曲線, 我們要證明:

$$\sum_{e\in\vec{E}_{P',L}} f(e)-\sum_{e\in\vec{E}_{P',R}} f(e) =\sum_{e\in\vec{E}_{P,L}} f(e)-\sum_{e\in\vec{E}_{P,R}} f(e)$$

如圖五所示, P 和 P' 形成一個圖, 將 G 的頂點分成“裡面”和“外面”兩部份, 記 A 爲裡面的頂點全體, B 爲外面的頂點全體。則 (A,B) 爲一個分割。由圖五可看出

$$[A,B]=\vec{E}_{P,L}\cup\vec{E}_{P',R}$$

$$[B,A]=\vec{E}_{P,R}\cup\vec{E}_{P',L}$$

所以, 由引理1,

$$\sum_{e\in\vec{E}_{P,L}} f(e)+\sum_{e\in\vec{E}_{P',R}} f(e) =\sum_{e\in\vec{E}_{P,R}} f(e)+\sum_{e\in\vec{E}_{P',L}} f(e)$$

故

$$\sum_{e\in\vec{E}_{P,L}} f(e)-\sum_{e\in\vec{E}_{P,R}} f(e) =\sum_{e\in\vec{E}_{P',L}} f(e)-\sum_{e\in\vec{E}_{P',R}} f(e)$$

所以 g 是一個定義好的映射。很顯然, g 的值域是 $\{0,1,2,\cdots,r-1\}$。令 i 表示第 i 種顏色, 則 G 的面確實是用 r 種顏色著色。若 F, F' 有公的邊界。令 e 是 F 與 F' 的公共邊界上的一條邊, 如下圖所示:

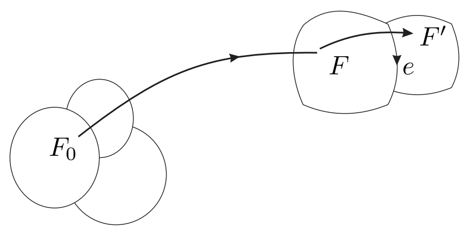


圖6

根據 g 的定義可知,

$$g(F')\equiv g(F)+f(e) \bmod (r)。$$

因爲 $f(e)\in\{-r+1,-r+2,\cdots,-1,1,2,\cdots,r-1\}$, 故 $g(F')\neq g(F)$。反之, 若 G 是一個無橋平面圖, g 是 G 的面的一個

r-著色。即對 G 的每一個面 F, $g(F) \in \{0, 1, 2, \cdots, r-1\}$, 且若 F, F' 相鄰, 則 $g(F) \neq g(F')$。令 $\vec{G}$ 是由 G 賦向所得的有向圖, 我們定義 $E(\vec{G})$ 的一個權函數 f 如下: 若 e 是 $\vec{G}$ 的一條有向邊, e 的兩邊分屬於兩個面 F_1 和 F_2 , 因爲 e 是有向邊, 故 F_1, F_2 可分爲左邊的面和右邊的面。設 F_1 是左邊的面, F_2 是右邊的面, 令

$$f(e) = g(F_1) - g(F_2)。$$

則容易驗證 f 是 $\vec{G}$ 上的一個 r-流 (請讀者自行驗證之)。定理2證畢。

由定理得知, 一平面圖 G 的面可4-著色等價於 G 有一個處處不爲零的4-整數流。又由引理, 這又等價於 $F(G) \leq 4$。

猜想2說, 若 Petersen 圖不是 G 的一個 minor, 則 $F(G) \leq 4$。因爲 Petersen 圖不是平面圖, 故它不是任何平面圖的 minor (請讀者想想, 爲什麼)。所以, 猜想2蘊含了每一個無橋的平面圖都有4-流。從而可面4-著色。也就是說, 猜想2比4色定理要強。這也反映了猜想2的難度。

四色定理的推論: 每一個無橋的平面圖存在一個4-流。

七. 圖的流指標的可能值

若猜想1是對的, 那麼每一個無橋圖的流指標都 ≤ 5。現在我們問一個另類的問題: 圖的流指標究竟可以是一些什麼數呢?

由定義可知, 一個圖的流指標 ≥ 2。所以, 若猜想1是對的, 則對任何無橋圖 G,

$$2 \leq F(G) \leq 5$$

那麼, $F(G)$ 可以是介於2和5之間的任何數嗎? 若不然, 它可以是一些什麼樣的數呢?

引理4: 若 G 是一個有限 (即有有限條邊) 的無橋圖, 則 $F(G)$ 是有理數。

該引理可以用類似於引理的證明方法來證明。我們把它的證明留給讀者去試一試。

問題1: $F(G)$ 可以是介於2和5之間的任何有理數嗎?

定理3: $F(G)$ 可以是介於2和4之間的任何有理數。也就是說, 任意給定有理數 $\frac{a}{b} \in [2, 4]$, 我們有辦法構造一個圖 G, 使得 $F(G) = \frac{a}{b}$。

對於介於4和5之間的有理數, 我們則不知道這樣的圖是否存在, 更不知道怎麼去構造它。

我們所知道是: 令 $G =$ Petersen 圖, 則

(1) 存在圖 H, $F(H) = 5$。其實 $F(G) = 5$。不過, 要驗證這一點並不容易。需要有一定的方法和工具, 光憑定義是比較困難的。

(2) 對任意 $\varepsilon > 0$ 存在圖 H, 使得 $4 < F(H) < 4 + \varepsilon$。

基本上, 這是我們目前所知道的全部。舉例來說, 我們不知道是否對任意的 $\varepsilon > 0$, $\exists G$, $5 - \varepsilon < F(G) < 5$。

定理3的證明稍微麻煩一點, 需要用到一些新的概念和工具。下面介紹一些這樣的概念和工具, 並證明定理3的一部份。

八. 兩極圖和僞流

所謂一個兩極圖其實就是一個圖, 只是圖中有兩個頂點被指定爲該圖的兩個極點。我們用 $(G;x,y)$ 表示一個兩極圖, 其中 x,y 是被指定爲極點的兩個頂點。注意, 極點可以是 G 中任意的頂點。不過, 若 $\{x',y'\}\neq\{x,y\}$, 則 $(G;x,y)$ 和 $(G;x',y')$ 是兩個不同的兩極圖。

定義5: 令 $\vec{G}$ 是由 G 賦以方向得到的有向圖。$(\vec{G};x,y)$ 則是一個由 $(G;x,y)$ 賦以方向得到的有向兩極圖。$(\vec{G};x,y)$ 上的一個僞流是 $\vec{E}$ 上的一個權函數, 滿足

$$(**)\qquad \forall v\in V-\{x,y\},\quad \sum_{e\in E^+(v)} f(e)=\sum_{e\in E(v)} f(e)$$

也就是說 $(\vec{G};x,y)$ 上的一個僞流和流一樣, 每一頂點滿足流進=流出的條件, 但是, 兩個極點除外。極點享有特權, 它們可以有純流進或純流出。

定義6: 設 $r\geq 2$ 是實數, $(\vec{G};x,y)$ 上的一個 r-僞流是一僞流 f, 滿足

$$\forall e\in\vec{E},\quad 1\leq |f(e)|\leq r-1$$

引理5: 設 $(\vec{G};x,y)$ 是一個兩極圖, f 是 $(\vec{G},x,y)$ 上的一個僞流, 則

$$\begin{aligned}&\sum_{e\in E^+(x)} f(e)-\sum_{e\in E^-(x)} f(e)\\ =&\sum_{e\in E^-(y)} f(e)-\sum_{e\in E^+(y)} f(e)\end{aligned}$$

該引理的證明和引理1的證明一樣, 請讀者自行補上。

直觀上講,

$$\sum_{e\in E^+(x)} f(e)-\sum_{e\in E^-(x)} f(e)$$

可以作爲從 x 點的純流出, 而

$$\sum_{e\in E^-(y)} f(e)-\sum_{e\in E^+(y)} f(e)$$

則是 y 點的純流入。因爲其它各點的流出等於流入, 故 x 點的純流出等於 y 點的純流入。

定義7: 設 $(\vec{G};x,y)$ 是一個兩極圖, f 是其上的一個僞流, 稱

$$\mathrm{Val}(f)=\sum_{e\in E^+(x)} f(e)-\sum_{e\in E^-(x)} f(e)$$

爲 f 的功效值。

直觀上講, f 的功效值 $\mathrm{Val}(f)$ 就是 f 把多少東西從 x 流送到了 y。

定義8: 設 $(\vec{G};x,y)$ 是一個兩極圖, $r\geq 2$ 是一個實數, 令

$$\begin{gathered}L_r(\vec{G};x,y)=\{\mathrm{Val}(f)\mod(r):\\ f\text{是}(\vec{G};x,y)\text{上的一個 }r\text{-僞流}\}\end{gathered}$$

類似於引理, $L_r(\vec{G};x,y)$ 實際上與 $\vec{G}$ 中邊的方向無關。所以, 我們可定義 $L_r(G;x,y)$。在圖的兩極點 x,y 確定, 不引起混淆的情況下, 我們記

$$L_r(G)=L_r(G;,x,y)=L_r(\vec{G};x,y).$$

我們稱 $L_r(G;x,y)$ 爲 $(G;x,y)$ 的 r-標號集。

引理6: 若 $t\in L_r(G;x,y)$ 則 $r-t\in L_r(G;,x,y)$。

證明: 設 f 是 $(\vec{G};x,y)$ 上的一個 r-僞流, $\mathrm{Val}(f)=t$, 則 $-f$ 也是 $(\vec{G};x,y)$ 上的一個 r-僞流 (這裡 $-f:\vec{E}\to R$ 定義爲 $(-f)(e)=-f(e)$)。而且 $\mathrm{Val}(-f)=-t$, 而 $-t \bmod (r) = r-t \bmod (r)$。引理得證。

引理7: 設 G 是一個圖。x,y 是 G 的兩個頂點, 則 G 存在一個 r-流若且唯若

$$O\in L_r(\vec{G};x,y)$$

證明: 若 f 是 $\vec{G}$ 的一個 r-流, 則 f 是 $(\vec{G},x,y)$ 上的一個 r- 僞流, 且 $\mathrm{Val}(f)=0$。反之, 若 f 是 $(\vec{G};x,y)$ 上的一個 r-僞流, 且 $\mathrm{Val}(f)=0$, 則 f 實際上是 $\vec{G}$ 的一個 r-流。

九. r-模流

定義9: 設 $\vec{G}=(V,\vec{E})$ 是一有向圖, $r\geq 2$ 是一實數。$\vec{G}$ 上的一個 r-模流是 $\vec{G}$ 的一個權函數滿足如下的條件:

(1) $\forall v\in V \quad \sum\limits_{e\in E^+(v)} f(e)\equiv \sum\limits_{e\in E^-(v)} f(e) \bmod (r)$

(2) $\forall e\in\vec{E}, 1\leq f(e) \bmod (r)\leq r-1$ (注: 若 $t\in R$, 則 $t \bmod (r)\in[0,r)$, 爲 t 除 r 的餘數)

根據定義, $\vec{G}$ 的一個 r-流是 $\vec{G}$ 的一個 r-模流。$\vec{G}$ 的一個 r-模流卻不一定是 $\vec{G}$ 的一個 r-流。不過, 我們有如下的定理:

定理4: 若 f 是 $\vec{G}$ 上的一個權函數, 滿足條件

(1) $\forall v\in V,\ \sum\limits_{e\in E^+(v)} f(e)\equiv \sum\limits_{e\in E^-(v)} f(e) \bmod (r)$, 則存在 $\vec{G}$ 上的一個權函數 g, 滿足條件

(1)′ $\forall v\in V,\ \sum\limits_{e\in E^+(v)} g(e)=\sum\limits_{e\in E^+(v)} g(e)$;

(2)′ $\forall e\in\vec{E},\ |g(e)|\in[0,r)$, 且或者 $g(e)\equiv f(e) \bmod (r)$ 或者 $g(e)\equiv -f(e) \bmod (r)$.

定理4的證明這裡略去, 有興趣的讀者可試一試自己給出證明 (不是太難)。

由定理4可推出:

推論: 若 f 是 $\vec{G}$ 上的一個 r-模流, 則存在 $\vec{G}$ 上的一個 r-流 g, 使得 $\forall e\in\vec{E}$, 或者 $g(e)\equiv f(e) \bmod (r)$ 或者 $g(e)\equiv -f(e) \bmod (r)$。

假設 $\vec{G}=(V,\vec{E})$, $(\vec{G},x,y)$ 是一個兩極圖, f 是 $\vec{G}$ 上的一個 r-僞流。$\mathrm{Val}(f)=t$, 令 $\vec{G'}$ 是由 $\vec{G}$ 加上邊 $e'=y\to x$ 得到的有向圖。令 $f':\vec{E'}\to R$ 的定義爲

$$f'(e)=\begin{cases} f(e) & \text{若 } e\in\vec{E}\\ t & \text{若 } e=e'\end{cases}$$

則 f' 是 $\vec{G'}$ 上的一個權函數, 滿足

$$\forall v:\ \sum_{e\in E^+(v)} f'(e)\equiv \sum_{e\in E^-(v)} f'(e) \bmod (r).$$

根據定理4, $\vec{G'}$ 存在一個權函數 g', 滿足

(1) $\forall v: \sum_{e\in E^+(v)} g'(e) = \sum_{e\in E^-(v)} g'(v)$.

(2) $\forall e \in E'$, $g'(e) \equiv f'(e) \mod (r)$ 或者 $g'(e) \equiv -f'(e) \mod (r)$。且 $0 \le |g'(e)| < r$。

令 g 爲 g' 在 $\vec{G}$ 上的限制, 則 g 是 $(\vec{G}; x, y)$ 的一個 r-僞流。而對於 g 來說

$$\sum_{e\in E^+(x)} g(e) - \sum_{e\in E^-(x)} g(e) = g(e')$$

故 $L_r(G; , x, y)$ 可定義如下:

$$\begin{aligned} &L_r(\vec{G}; x, y)\\ =&\{\mathrm{Val}(g) : g \text{ 是 } (\vec{G}; x, y) \text{ 的一個} r\text{-僞流, 且 } \mathrm{Val}(g) \in [0, r)\} \bigcup\\ &\{r + \mathrm{Val}(g) : g \text{ 是 } (\vec{G}; x, y) \text{ 的一個} r\text{-僞流, 且 } \mathrm{Val}(g) \in (-r, 0)\}\end{aligned}$$

其實, 可以證明若 $\mathrm{Val}(g) \in (-r, 0)$, 則存在一個 $\vec{G}$ 上的僞流 g', 使得 $\mathrm{Val}(g') = r + \mathrm{Val}(g)$。所以 $L_r(\vec{G}; x, y,) = \{\mathrm{Val}(g) : g$ 是 $(\vec{G}; x, y)$ 的一個僞流, 且 $\mathrm{Val}(g) \in [0, r)\}$。

十. 兩極圖的運算

定義 10: 設 $(G_1; x_1, y_1)$, (G_2, x_2, y_2) 是兩個兩極圖。取 G_1 和 G_2 的合 (disjoint union), 再將 y_1 和 x_2 合成一個頂點, 記所得的圖爲 G, 稱兩極圖 $(G; x_1, y_2)$ 爲 (G_1, x_1, y_1) 和 $(G_2; x_2, y_2)$ 的串聯圖。其示意圖如下:

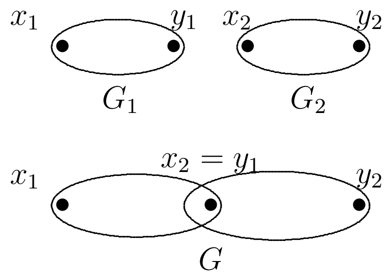


圖7

定義 11: 設 $(G_1; x_1, y_1)$, $(G_2; x_2, y_2)$ 是兩個兩極圖, 取 G_1 和 G_2 的合, 再將 x_1, x_2 合成一個頂點 x, 將 y_1, y_2 合成一個頂點, 記作y。即所得的圖爲 G, 稱兩極圖 $(G; x, y)$ 爲 $(G_1; x_1, y_1)$ 和 $(G_2; x_2, y_2)$ 的並聯圖, 其示意圖如下:

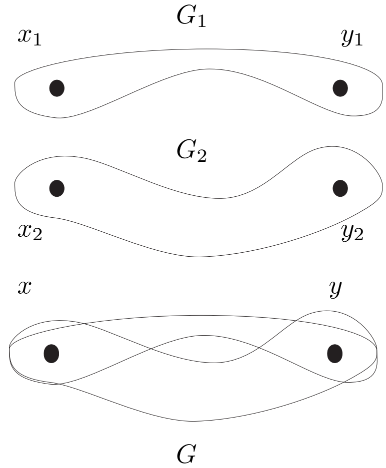


圖8

通過串聯運算和並聯運算所得的兩極圖, 其r-標號集可以通過簡單的公式求得。

根據定義, 對任意的兩極圖 $(G; x, y)$, 其 r-標號集 $L_r(G; x, y)$ 是 $[0, r)$ 的一個子集。設 $A, B \subset [0, r)$ 是 $[0, r)$ 的兩個子集。定義

$$A + B = \{(s + t) \mod (r) : s \in A, t \in B\}$$

引理8: 若 $(G;x,y)$ 是 (G_1,x_1,y_1) 和 (G_2,x_2,y_2) 的串聯圖, 則

$$L_r(G)=L_r(G_1)\cap L_r(G_2)。$$

若 $(G;x,y)$ 是 $(G_1;x_1,y_1)$ 和 (G_2,x_2,y_2) 的並聯圖, 則

$$L_r(G)=L_r(G_1)+L_r(G_2)$$

證明: 設 $(G;x,y)$ 是 $(G_1;x_1,y_1)$ 和 (G_2,x_2,y_2) 的串聯圖。令 f 是 $(\vec{G};x,y)$ 上一個 r-僞流, 這裡 $\vec{G}$ 是由 G 賦以方向得到的有向圖, 它在 G_1 及 G_2 上的限制分別爲 $\vec{G_1}$ 和 $\vec{G_2}$。令 f_1 爲 f 在 $\vec{G_1}$ 上的限制, f_2 爲 f 在 $\vec{G_2}$ 上的限制, 則 f_1 是 $\vec{G_1}$ 上的僞流, f_2 是 $\vec{G_2}$ 上的僞流。且 $\mathrm{Val}(f_1)=\mathrm{Val}(f)=\mathrm{Val}(f_2)$。所以

$$L_r(G)\subseteq L_r(G_1)\cap L_r(G_2)。$$

反過來, 若

$$t\in L_r(G_1)\cap L_r(G_2),$$

則存在 $\vec{G_1}$ 上的一個僞流 f_1, $\mathrm{Val}(f_1)=t$, 存在 $\vec{G_2}$ 上的一個僞流 f_2, $\mathrm{Val}(f_2)=t$ (參考第九節的最後一段)。

令 f 是 $\vec{G}$ 上的一個權函數, 定義爲

$$f(e)=\begin{cases} f_1(e) & 若\ e\in E(\vec{G_1})\\ f_2(e) & 若\ e\in E(\vec{G_2})\end{cases}$$

則根據引理5可知 f 是 $\vec{G}$ 上的一個僞流, 且 $\mathrm{Val}(f)=t$。故 $t\in L_r(G)$。所以 $L_r(G)=L_r(G_1)\cap L_r(G_2)$。引理8的下半段證明和上面類似, 請讀者自行補全。

十一. 串並聯圖及流指標的計算

串並聯圖是一類特殊的圖, 其構造很簡單。首先我們給出兩極串並聯圖的遞歸定義:

定義12: 令 K_2 是有兩個頂點0,1的完全圖, 則

(1) $(K_2;0,1)$ 是一個兩極串並聯圖;

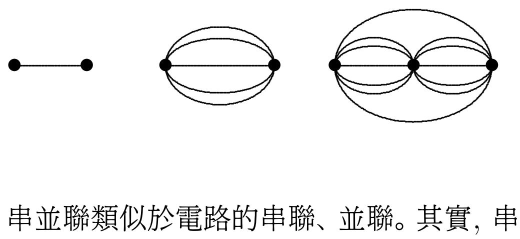
(2) 若 (G_1,x_1,y_1) 和 $(G_2;x_2,y_2)$ 是兩個兩極串並聯圖, 且 $(G;x,y)$ 是它們的串聯圖, 則 $(G;x,y)$ 也是一個串並聯圖;

(3) 若 $(G_1,;y_1,y_2)$ 和 $(G_2;x_2,y_2)$ 是兩個兩極串並聯圖, 且 $(G;x,y)$ 是它們的並聯圖, 則 $(G;x,y)$ 也是一個串並聯圖。

(4) 每一個兩極串並聯圖都是通過 (1) (2) (3) 遞歸構造即得。

定義13: 我們稱圖 $G=(V,E)$ 是一個串並聯圖若且唯若 $\exists x,y\in V$, 使得 $(G;x,y)$ 是一個兩極串並聯圖。

下面是幾個串並聯圖的例子:



串並聯類似於電路的串聯、並聯。其實, 串並聯圖最早也是作爲解決組合電路裡面的相關電流、電阻的計算的工具的。

引理8告訴我們, 只要知道了 $L_r(K_2)$, 那麼, 任何串並聯圖的 r-標號集都可以通過

求 "+"和求交的運算出來。應用了引理7, 我們就可找出一給定串並聯圖的流指標。

由 r-僞流的定義可知

$$L_r(K_2;0,1)=[1,r-1]_r$$

這裡, $[1,r-1]_r=\{t:1\leq t\leq r-1\}$。一般來說, 假設 $a,b\in[0,r)$, 我們定義 $[a,b]_r$ 如下:

$$\begin{aligned}&\text{若 } a\leq b, \text{ 則 } [a,b]_r=\{t:a\leq t\leq b\};\\&\text{若 } a>b, \text{ 則 } [a,b]_r=\{t:a\leq t\leq r]\cup\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\{t:0\leq t\leq b\}\end{aligned}$$

直觀上來看, 我們把 $[0,r)$ 想像是一個圓圈, 即截取直線段 $[0,r]$, 將0和 r 合成一個點。$[a,b]_r$ 表示在這個圓圈上從 a 到 b 這一段。我們稱 $[a,b]_r$ 爲一個區間。對於任一個兩極圖 $(G;x,y)$, 它的 r-標號集往往是用若干個區間價來表示的。若 $[a,b]_r$ 是 $[0,r)$ 的一個區間, 則其長度和一般的區間長度定義相仿, 即若 $a\leq b$, 則長度爲 $b-a$; 若 $a>b$, 則長度爲 $(r-a)+b$。若 $A,B\subseteq[0,r]$ 是兩個區間的話, 它們的和 $A+B$ 也是一個區, 或者是 $[0,r)$ 全部。

引理9: 設 $[a,b]_r$ 和 $[c,d]_r$ 是 $[0,r]$ 的兩個區間。

(1) 若 $[a,b]_r$ 和 $[c,d]_r$ 的長度之和 $\geq r$, 則 $[a,b]_r+[c,d]_r=[0,r)$;

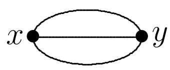
(2) 若 $[a,b]_r$ 和 $[c,d]_r$ 的長度之和 $<r$, 則 $[a,b]_r+[c,d]_r=[a+c,b+d]_r$。

(當然, 這裡的 $a+c,b+d$ 都是模 r 的加法), 在第 (2) 種情形下, $[a,b]_r+[c,d]_r$ 是一長度爲 $[a,b]_r,[c,d]_r$ 兩區的長度之和的區間。

引理9可由定義直接驗證。

有了引理9, 再加上引理8, 我們就可以比較方便地計算一些串並聯圖的 r-標號集, 從而求出其流指標。

我們先看幾個簡單的例子。



例1: 令 $(G;x,y)$ 如上圖, 根據引理8和引理9, 以及根據 $L_r[K_2;0,1]=[1,r-1]_r$ 我們知道

$$\begin{aligned}&L_r(G;x,y)\\&=[1,r-1]_r+[1,r-1]_r+[1,r-1]_r\end{aligned}$$

若 $r\geq 3$, 則 $L_r(G;x,y)=[0,r)$。若 $r<3$, 則 $L_r(G;x,y)=[3-r,2r-3]_r$。因爲當 $r<3$ 時, $[3-r,2r-3]_r$ 不包含0, 所以, G 不存在 r-流。由此可得 G 的流指標 $F(G)=3$。

例2: 令 $(H;x,y)$ 是 $2k+1$ 個 $(K_2;0,1)$ 的並聯 ($k=1$時, 即爲例1所討論的圖), 則

$$L_r(H;x,y)=\underbrace{[1,r-1]_r+\cdots+[1,r-1]_r}_{2k+1}$$

若 $r\geq 2+\frac{1}{k}$, 則因爲 $[1,r-1]_r$ 的長度 $\geq\frac{1}{k}$, 故 $L_r(H;x,y)=[0,r)$。若 $2<r<2+\frac{1}{k}$, 則 $L_r(H;x,y)=[2k+1-kr,(k+1)r-(2k+1)]_r$ (注意, $kr<2k+1<(k+1)r$), 因爲當 $2<r<2+\frac{1}{k}$ 時, $[2k+1-kr,(k+1)r-(2k+1)]_r$ 不包含0, 所以, G 不存在 r-流。由此可得 G 的流指標 $F(G)=2+\frac{1}{k}$。

十二. 串並聯圖的流指標的上界

我們看到前節中例1給出的串並聯圖, 其流指標爲3。這裡證明3是無橋串並聯圖的流指標的上界。

引理10: 令 $r=3$, $(G;x,y)$ 是一個兩極串並聯圖。若 G 無橋則 $\{0,1,2\}\in L_r(G)$, 若 G 有橋則 $\{1,2\}\in L_r(G)$。

證明: 用歸納法, 若 $G=K_2$, 則 $L_r(G)=[1,2]_r$。故引理成立。

假設 G 是由 G_1,G_2 的串聯圖, 且引理對 G_1 和G_2 均成立。若 G 無橋, 則 G_1,G_2 均無橋, 且 $\{0,1,2\}\subseteq L_r(G_1)$, $\{0,1,2\}\subseteq L_r(G_2)$, 故 $\{0,1,2\}\subseteq L_r(G)=L_r(G_1)\cap L_r(G_2)$。

反之, 因爲 $\{1,2\}\subseteq L_r(G_1),\{1,2\}\subseteq L_r(G_2)$ 故 $\{1,2\}\subseteq L_r(G)=L_r(G_1)\cap L_r(G_2)$。假設 G 是由 G_1,G_2 的並聯圖, 且引理對 G_1 和 G_2 均成立。則 $\{1,2\}\subseteq L_r(G_1)$, $\{1,2\}\subseteq L_r(G_2)$。故 $\{0,1,2\}\subseteq L_r(G_1)+L_r(G_2)=L_r(G)$。證畢。

由引理10可知:

定理5: 若 G 是一個無橋的串並聯圖, 則 G 的流指標 $F(G)\le 3$。

定理6: 設 G 是一個無橋的串並聯圖。若 G 有一分割恰含3邊, 則 $F(G)=3$。

證明: 由定理5, $F(G)\le 3$。假設定理6不對, 則 $F(G)=r<3$。設 (A,B) 是一個恰含三條邊的分割, 根據引理1,

$$\sum_{e\in[A,B]} f(e)-\sum_{e\in[B,A]} f(e)=0.$$

設 $(A,B)=\{e_1,e_2,e_3\}$, 則上式表示 $|f(e_1)|,|f(e_2)|,|f(e_3)|$ 的一個帶符號的代數和爲0。而$1\le|f(e_1)|\le r-1<2$。矛盾。定理6證畢。

十三. 沒有三邊分割的串並聯圖

上節的最後一個定理告訴我們, 一個存在三邊分割的無橋串並聯圖的流指標爲3。這一節證明沒有三邊分割的串並聯圖的流指標 $\le\frac{8}{3}$。

引理: 設 $(G;x,y)$ 是一個兩極串並聯圖, 且若 (A,B) 是一邊數少於4的分割, 則 $x\in A$, $y\in B$。

令 $m(G)=\min\{|(A,B)|: x\in A, y\in B\}$。(如前所定義, (A,B) 表示分割 (A,B) 所含邊的全體)。令 $r=\frac{8}{3}$,

(1) 若 $m(G)=1$, 則 $\{1,\frac{4}{3},\frac{5}{3}\}\subseteq L_r(G)$;

(2) 若 $m(G)=2$, 則 $\{2,\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}\subseteq L_r(G)$;

(3) 若 $m(G)=3$, 則 $\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{6}{3},\frac{7}{3}\}\subseteq L_r(G)$;

(4) 若 $m(G)\ge 4$, 則 $\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{6}{3},\frac{7}{3}\}\subseteq L_r(G)$.

證明: 同樣, 用歸納法。若 $G=K_2$, 顯然是正確的。設 G 是 G_1,G_2 的串聯圖。$m(G)=\min\{m(G_1),m(G_2)\}$, 並且,

$m(G_1)+m(G_2)\neq 3$, (否則 G 有一邊數少於4的分割 (A,B), 使得 $x,y\in A$。)

不妨設 $m(G_1)\leq m(G_2)$。若 $m(G_1)=1$, 則 $m(G_2)=1$ 或者 $m(G_2)\geq 3$。無論何種情形, 都有 $\{1,\frac{4}{3},\frac{5}{3}\}\subseteq L_r(G_1)\cap L_r(G_2)$。

若 $m(G_1)=2$, 則 $m(G_2)\geq 2$。故 $\{2,\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}\subseteq L_r(G_1)\cap L_r(G_2)$。$m(G_1)\geq 3$ 的情形也是用類似的方法證明。

接下來假設 G 是 G_1 和 G_2 的並聯圖。根據引理8, $L_r(G)=L_r(G_1)+L_r(G_2)$。由定義可知, $m(G)=m(G_1)+m(G_2)$。

我們僅考慮 $m(G_1)=m(G_2)=2$ 的情形。由歸納法假設 $L_r(G_1)\supseteq\{2,\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}$, 所以,

$$L_r(G)\supseteq\{2,\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}+\{2,\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\},$$
$$L_r(G)\subseteq\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{6}{3},\frac{7}{3}\}.$$

其它的情形用類似的方法證明。

定理7: 若 $(G;x,y)$ 是一個兩極串並聯圖, 且 G 的每一分割至少含有四條邊, 則 $F(G)\leq\frac{8}{3}$。

證明: 用引理可知, 當 $r=\frac{8}{3}$ 時, $0\in L_r(G)$, 故 $F(G)\leq\frac{8}{3}$。

實際上, 稍微仔細一點的分析串並聯圖的結構可以證明如下定理:

定理8: 若 G 是一個無橋且沒三邊分割的串並聯圖, 則 $F(G)\leq\frac{8}{3}$。

由定理6及定理8, 可知對任意一個無橋串並聯圖 G 或者 $F(G)=3$, 或者 $F(G)\leq\frac{8}{3}$。

定理8可以更進一步推廣, 稱一個分割 (A,B) 爲奇分割, 如果 (A,B) 所含邊數爲奇數。令 $C_0(G)=\min\{|(A,B)|:(A,B)$ 爲一奇分割$\}$, 則可以證明對串並聯圖而言, $C_0(G)$ 越大, 則 $F(G)$ 越接近2。

對於一般的圖而言, 也有如下猜想:

猜想: 對任意 $\varepsilon>0,\exists n$, 當 $C_0(G)\geq n$ 時, $F(G)\leq 2+\varepsilon$。

不過, 這一猜想似乎也很困難。即使是 $\varepsilon=1$ 的情形, 也還未解決。

十四. 串並聯圖的流指標的可能值

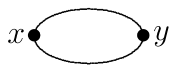
前面的結論告訴我們, 若 G 是一個無橋的串並聯圖, 則 $F(G)=3$, 或者 $2\leq F(G)\leq\frac{8}{3}$。接下來的一個問題是: 是否介於2和 $\frac{8}{3}$ 之間的任意有理數都是某個串並聯圖的流指標呢? 答案是肯定的。

首先我們討論一下有理數的性質。設 $\frac{p}{q}\in(2,\frac{8}{3}]$ 是一個有理數, 其中 p,q 是互質的兩個正整數。由於 p,q 互質, 存在唯一的正整數 $0<p'<p$, $0<q'<q$ 使得 $p'q-pq'=1$。從而我們得到一有理數 $\frac{p'}{q'}>\frac{p}{q}$。稱 $\frac{p'}{q'}$ 爲 $\frac{p}{q}$ 的父親 (father), 稱 $\frac{p-p'}{q-q'}$ 爲 $\frac{p}{q}$ 的母親 (mother)。令 $p''=p-p'$, $q''=q-q'$。直接驗算可得 $pq''-p''q=1$, $\frac{p''}{q''}<\frac{p}{q}$。記 $\frac{p}{q}$ 的父親爲 $f(\frac{p}{q})$, 記 $\frac{p}{q}$ 的母親爲 $m(\frac{p}{q})$。注意, 若 $\frac{p}{q}\in(2,\frac{8}{3}]$, 則 $f(\frac{p}{q})\in(2,3],m(\frac{p}{q})\in[2,\frac{8}{3})$。無論是 $f(\frac{p}{q})$

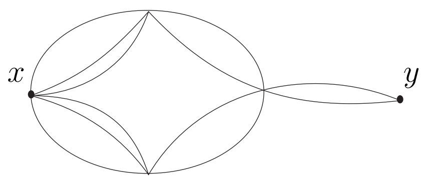
或 $m(\frac{p}{q})$, 其分母和分子都分別小於 $\frac{p}{q}$ 的分母和分子。

引理: 設 $\frac{p}{q} \in (2, \frac{8}{3}]$, $m(\frac{p}{q}) = \frac{a}{b}$, $f(\frac{p}{q}) = \frac{a'}{b'}$。存在一個兩極的串並聯圖 $G_{p/q}$ 使得

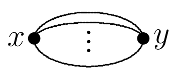
(1) 對所有 $\frac{a}{b} \leq r < \min\{\frac{8}{3}, \frac{p-2}{q-1}\}$, $L_r(G_{p/q}) = [p-3-(q-2)r, (q-1)r-p+3]_r$;
(2) 對 $r < \frac{a}{b}$, $L_r(G_{p/q}) = \varnothing$。



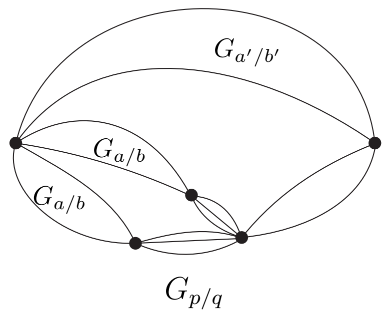
證明: 我們對有理數 $\frac{p}{q}$ 的分母 q 用歸納法。若 $\frac{p}{q} = \frac{5}{2}$, 則 $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{8}{3}$。令 $G_{\frac{5}{2}}$ 如上圖, 直接驗證可證明引理的結論成立。



若 $\frac{p}{q} = \frac{8}{3}$, 則 $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{3}{1}$。令 $G_{\frac{8}{3}}$ 如上圖, 同樣直接驗證可證明引理的結論。

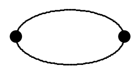


若 $\frac{p}{q} = \frac{2k+1}{k} (k \geq 3)$, 則 $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$, 令 $G_{\frac{2k+1}{k}}$ 如上圖, 爲 $2k-2$ 個 K_2 的並聯圖。同樣直接驗算可證。下面假設 $\frac{p}{q} \neq \frac{2k+1}{k}, \frac{8}{3}$。則 $\frac{a}{b} \neq \frac{2}{1}, \frac{5}{2}$。根據歸納法的假設 $G_{\frac{a}{b}}, G_{\frac{a'}{b'}}$ 都存在。圖 G 的構造如下圖所示:

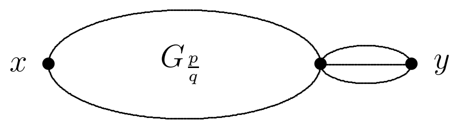


同樣, 直接的驗證可證明引理對圖 $G_{\frac{p}{q}}$ 成立。不過, 這個時候的驗證稍微複雜一點。需要一些耐心和細心, 以及適當的技巧。相信有毅力的讀者可自行完成。

定理: 若 $\frac{p}{q} \in [2, \frac{8}{3}]$ 是一有理數, 則存在一個串並聯圖 $H_{\frac{p}{q}}$, 使得 $F(H_{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}$。



證明: 若 $\frac{p}{q} = 2$, 則令 $H_{\frac{p}{q}}$ 如上圖即可。假設 $\frac{p}{q} \in (2, \frac{8}{3}]$。根據引理, 存在 $G_{\frac{p}{q}}$, 使得對所有的 $m(\frac{p}{q}) \leq r < \min\{\frac{8}{3}, \frac{p-2}{q-1}\}$, $L_r(G_{\frac{p}{q}}) = [p-3-(q-2)r, (q-1)r-p+3]_r$。令 $H'_{\frac{p}{q}}$ 爲下圖所示。



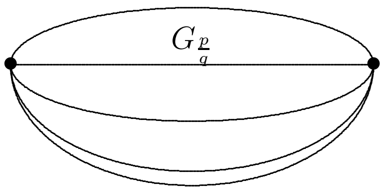
直接驗算可知, 若 $r \geq \frac{p}{q}$, 則

$$L_r(H'_{\frac{p}{q}}) \neq \varnothing.$$

若 $r < \frac{p}{q}$, 則

$$L_r(H'_{\frac{p}{q}}) = \varnothing.$$

令 $H_{\frac{p}{q}}$ 如下圖所示



(即 $H_{\frac{p}{q}}$ 是由 $H'_{\frac{p}{q}}$ 將 x, y 兩點併成一點所得), 則 $F(H_{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}$。定理證畢。

十五. 後記

本文所討論的流與其它文獻 (教科書或論文) 有些側重點的差異。一般關於流的討論限於整數流的問題。這裡介紹流指標等等, 屬於比較新的概念。它是整數流問題的自然延伸和推廣。而討論的問題有其獨特的地方。所用的方法也有所不同。(當然, 相同的地方還是占多數)。

由於涉及一些新的概念, 其名稱並不確定, 像流指標 (flow index), 我在一篇文章中稱之爲 circular flow number (圓流數)。其它一些名稱, 即使是英文中有固定名稱的, 中文名稱也許有更好的選擇。本文的撰寫過程中, 由於缺乏這方面的參考文獻, 都是隨意譯來, 不恰當的恐怕很多, 請讀者見諒。閱讀時, 儘量注重內含, 弄清楚定義, 也許其它地方有別的名稱。

∗ 文中所提的問題 1 最近由潘志實 (中山應數系博士生) 和作者解決。我們證明任何介於 2 和 5 之間的有理數都是某個圖的流的指標。

—本文作者任教於中山大學數學系—