Apex 遊戲的推廣

葉均承

一. 研究動機與目的

M. Gardner (1969) 在 Mathematical Carnival 介紹 Apex 的遊戲:

任意給一排 k 個小於 n 的非負整數 $a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(k)$, 接著把這排 k 個數中連續相連的二個數 $a_1(i), a_1(i+1)$ 相加起來, 再把 $a_1(i)+a_1(i+1)$ 除以 n 後的餘數 $a_2(i)$ 放到原來二個數 $a_1(i), a_1(i+1)$ 中間的上面。如此可得到新的一排 $(k-1)$ 個數, $a_2(1), a_2(2), \ldots, a_2(k-1)$, 把這一排 $(k-1)$ 個數中連續相連的二個數 $a_2(j), a_2(j+1)$ 相加起來, 然後把這個和除以 n 後的餘數 $a_3(j)$ 放到原來二個數中間的上面。如此又可得到一排 $(k-2)$ 個數 $a_3(1), a_3(2), \ldots, a_3(k-2)$, 照這方式繼續作下去 $\ldots$, 一直作到新的一排只有一個數 $a_k(1)$, 不能再作了爲止。這些 $\frac{k(k+1)}{2}(=1+2+\cdots+k)$ 個非負整數 $a_p(i)$, $1 \le p \le k$ 及 $i \le k+1-p$, 形成一個三角形, 它們滿足 $a_p(i)+a_p(i+1) \equiv a_{p+1}(i) (\text{mod n})$, 我們稱它們形成一個“底爲 $a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(k)$ 的 Apex 模 n 三角形”。Apex遊戲是在任意給一排 k 個正整數 $a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(k)$ 之後, 希望不經過上面一連串冗長的運算而能夠快速地算出最後一排那個數 (三角形最上層的數) $a_k(1)$ 是什麼?

例如給一排6個數8, 3, 7, 2, 6, 1, 則底爲8, 3, 7, 2, 6, 1的 Apex 模9三角形最上層的數 $a_6(1)$ 是什麼? 照上述規則, 我們得到 $a_6(1)=0$ (如圖一)。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & 4 & & 5 & & & & \\
 & & & 4 & & 0 & & 5 & & & \\
 & & 3 & & 1 & & 8 & & 6 & & \\
 & 2 & & 1 & & 0 & & 8 & & 7 & \\
8 & & 3 & & 7 & & 2 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

圖一. 底爲8,3,7,2,6,1的 Apex 模9三角形

M. Gardner 同時也提起一位荷蘭讀者問他的問題 (以下簡稱荷蘭讀者的問題):

拿掉一副樸克牌的10、J、Q、K 後, 剩下的36張牌是否可以排成一個底是8個非負整數的 Apex 模9三角形 (樸克牌只論點數不管花色)? M. Gardner 說他想到一個答案, 但是他不告訴讀者, 希望讀者自己去想答案, 同時 M. Gardner 說他不知道是否還有其他的答案?

這篇論文的目的有二個:

(一) 推廣 Apex 遊戲。任意給一排 k 個正整數, 模仿 Apex 遊戲規則的方法, 但是只用一般加法, 不用同餘的概念, 也就是把這排 k 個數中連續相連的二個數 $a_1(i), a_1(i+1)$ 相加起來, 令 $a_2(i) = a_1(i)+a_1(i+1)$, 再把 $a_2(i)$ 放到原來兩個數 $a_1(i), a_1(i+1)$ 中間的上面。如此可得到新的一 排 $(k-1)$ 個數 $a_2(1), a_2(2), \ldots, a_2(k-1)$, 再把這一排 $(k-1)$ 個數中連續相連的二個數 $a_2(j), a_2(j+1)$ 相加起來, 令 $a_3(j) = a_2(j)+a_2(j+1)$, 再把 $a_3(j)$ 放到 $a_2(j), a_2(j+1)$ 這二個數中間的上面。如此又可得到一排 $(k-2)$ 個數 $a_3(1), a_3(2), \ldots, a_3(k-2)$, 照這方式繼續作下去 ..., 一直作到新的一排只有一個數 $a_k(1)(= a_{k-1}(1) + a_{k-1}(2))$, 不能再作了爲止。這些 $\frac{k(k+1)}{2}$ 個正整數 $a_p(i)$, 其中 $1 \le p \le k$ 及 $1 \le i \le k+1-p$, 形成一個三角形, 我們稱它爲“底爲 $a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(k)$的 Apex 三角形“(沒有用模的概念)。我們找到方法能快速地算出三角形最上層的數 $a_k(1)$ 及所有三角形的數全部加起來的總和。

(二) 推廣荷蘭讀者的問題。令 $1+2+\ldots+k = n \times d$, 其中 n, k, d 都是正整數 $n \ge 2$ (一般來說我們不把 n 當1, 因爲這樣全部都是0, 沒什麼好作的)。如果我們有 d 個0, d 個1, d 個2, ..., d 個 $(n-1)$, 模仿 Apex 遊戲規則的方法, 如果恰好能建立一個底爲 k 個整數的 Apex 模 n 的三角形, 這時我們稱之爲“底爲 k 的 Apex 模 n 三角形”。我們研究“底爲 k 的 Apex 模 n 三角形”的存在性? 同時找出荷蘭讀者的問題的所有解答。(荷蘭讀者的問題是 $k=8$, $n=9$ 的情形)。

註: 底爲 k 的 Apex 模 n 三角形中每個非負整數 $0, 1, \ldots, n-1$ 出現的次數都相同, 但是底爲 $a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(k)$ 的 Apex 模 n 三角形中的每個數字出現的次數沒有限制。

二. 推廣 Apex 遊戲

我們先作幾個簡單例子, 觀察它的一些性質, 再用數學歸納法去證明, 從得到的一些數學性質來簡化較複雜的問題。

(一) 底爲 k 的 Apex 三角形 (沒有用模的概念)。

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & a_k(1) & & & & \\ & & & & \cdots & & & & \\ & & a_3(1) & & \cdots & & a_3(k-2) & & \\ & a_2(1) & \cdots & a_2(i-1) & & a_2(i) & \cdots & a_2(k-1) & \\ a_1(1) & a_1(2) & \cdots & a_1(i) & & a_1(i+1), & \cdots & & a_1(k) \end{array}$$

圖二

從圖二中底爲 k 的 Apex 三角形可以觀察到

$$\begin{aligned} a_2(i) &= a_1(i) + a_1(i+1) \\ a_3(i) &= a_2(i) + a_2(i+1) = a_1(i) + 2a_1(i+1) + a_1(i+2) \\ a_4(i) &= a_3(i) + a_3(i+1) = a_2(i) + 2a_2(i+1) + a_2(i+2) \\ &= a_1(i) + 3a_1(i+1) + 3a_1(i+2) + a_1(i+3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

由它們的係數 (1,1) (1,2,1) (1,3,3,1), ... 可以聯想到巴斯卡三角形 (圖三), 用歸納法我們可以得到下面的定理。

$$\begin{array}{c} 1 \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\ \cdots \qquad\qquad \cdots \\ \binom{k-1}{0} \quad \binom{k-1}{1} \quad \binom{k-1}{2} \quad \cdots \quad \binom{k-1}{i-1} \quad \binom{k-1}{i} \quad \cdots \quad \binom{k-1}{k-2} \quad \binom{k-1}{k-1} \\ \binom{k}{0} \quad \binom{k}{1} \quad \binom{k}{2} \quad \binom{k}{3} \quad \cdots \quad \binom{k}{i} \quad \cdots \quad \binom{k}{k-1} \quad \binom{k}{k} \end{array}$$

圖三. 巴斯卡三角形

定理一: 設正整數 $a_s(i)$, 其中 $1 \leq s \leq k$ 及 $1 \leq i \leq k+1-s$, 形成一個底爲 $a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(k)$ 的 Apex 三角形, 則對於所有的 $2 \leq p \leq k$, $p > l$, 我們有

$$a_p(i) = \sum_{j=0}^{p-l} \binom{p-l}{j} a_l(j+i) \tag{1}$$

證明: 當 $p = 2$ 則 $l = 1$, (1) 左邊 $= a_2(i) = a_1(i) + a_1(i+1) =$ (1) 右邊。

設 $p = s$, (1) 成立。當 $p = s+1$,

$$\begin{aligned}
(1)\text{左邊} = a_{s+1}(i) = a_s(i) + a_s(i+1) &= \sum_{j=0}^{s-l} \binom{s-l}{j} a_l(j+i) + \sum_{j=0}^{s-l} \binom{s-l}{j} a_l(j+i+1) \\
&= \sum_{j=0}^{s-l} \binom{s-l}{j} a_l(j+i) + \sum_{t=1}^{s-l+1} \binom{s-l}{t-1} a_l(t+i), \qquad (\text{其中令}t = j+1) \\
&= a_l(i) + \sum_{j=1}^{s-l} \left[\binom{s-l}{j} + \binom{s-l}{j-1} \right] a_l(j+i) + a_l(i+s-l+1) \\
&= \binom{s-l+1}{0} a_l(i) + \sum_{j=1}^{s-l} \binom{s-l+1}{j} a_l(j+i) + \binom{s-l+1}{s-l+1} a_l(i+s-l+1) \\
&= \sum_{j=0}^{s-l+1} \binom{s-l+1}{j} a_l(j+i) = (1)\text{右邊}
\end{aligned}$$

由數學歸納法得知, 本定理成立。

在定理一中, 令 $i = 1, l = 1$, 我們知道底爲 k 的 Apex 三角形的最上層的數

$$a_k(1) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} a_1(j+1) \tag{2}$$

如果要計算底爲 k 的 Apex 三角形全部的數之總和, 那就要利用下列大家所熟知的定理。

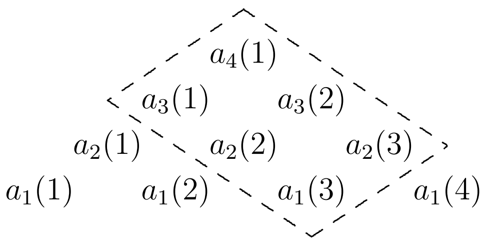
巴斯卡三角形定理:令 m, j 是正整數, 則

1. $\binom{m}{j} + \binom{m}{j-1} = \binom{m+1}{j}$ 其中 $\binom{m}{0} = 1$;
2. $\binom{j}{j} + \binom{j+1}{j} + \cdots + \binom{m}{j} = \binom{m+1}{j+1}$;
3. $\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \cdots + \binom{m+j}{j} = \binom{m+j+1}{j}$。

在巴斯卡三角形中, 巴斯卡三角形定理中敍述1是指相鄰二數之和爲二數中間下方的數。敍述2是指一條從 $\binom{j}{j}$ 平行左邊的邊的一串數, 其和爲這一串數最下方的數的右下方的數。敍

述3是指一條從 $\binom{m}{0}$ 平行右邊的邊的一串數其和爲這一串數最下方的數的左下方的數。敍述2可以由敍述1輕易得到, 另外因爲巴斯卡三角形是具有對稱性的, 所以敍述2 和敍述3本質是一樣的。

令所有底爲 $a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(k)$ 的 Apex 三角形中全部的數之總和爲 T_k。從公式(1)、(2)可以看出在底爲 k 的 Apex 三角形中的任意數會被表示成最底層 $a_1(1), a_1(2), \ldots,$ $a_1(k)$的線性組合, 對於 $1 \le j \le i$ 而且 $p+j \ge i+l$, $a_p(j)$ 的線性組合中 $a_1(i)$ 的係數是 $\binom{p-1}{i-j}$ 。所有這些 $a_p(j)$ 的線性組合中, $a_1(i)$ 的係數不爲0的元素在底爲 $a_1(1)$, $a_1(2)$, $\ldots$ $a_1(k)$, 的 Apex 三角形中形成一個平行四邊形, 如圖四中所有這些 $a_p(j)$ 的線性組合中, $a_1(3)$ 的係數不爲0的元素有$a_1(3), a_2(2), a_2(3), a_3(1), a_3(2), a_4(1)$。



圖四

現在來看一些例子:

例如　$k=3$時　$T_3 = 3a_1(1) + 5a_1(2) + 3a_1(3)$

$k=4$時　$T_4 = 4a_1(1) + 9a_1(2) + 9a_1(3) + 4a_1(4)$

$k=5$時　$T_5 = 5a_1(1) + 14a_1(2) + 19a_1(3) + 14a_1(4) + 5a_1(5)$

其中 $k=4$ 的情形計算如下: (爲了方便描述, 我們令 $\binom{0}{0} \equiv 1$).

$$\begin{aligned}
T_4 &= \sum_{1\le i\le 4} \sum_{1\le p\le 5-i} \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p-1}{j} a_1(j+i) \\
&= \binom{0}{0} a_1(1) + \binom{1}{0} a_1(1) + \binom{1}{1} a_1(2) + \binom{2}{0} a_1(1) + \binom{2}{1} a_1(2) + \binom{2}{2} a_1(3) + \binom{3}{0} a_1(1) \\
&\quad + \binom{3}{1} a_1(2) + \binom{3}{2} a_1(3) + \binom{3}{3} a_1(4) + \binom{0}{0} a_1(2) + \binom{1}{0} a_1(2) + \binom{1}{1} a_1(3) + \binom{2}{0} a_1(2) \\
&\quad + \binom{2}{1} a_1(3) + \binom{2}{2} a_1(4) + \binom{0}{0} a_1(3) + \binom{1}{0} a_1(3) + \binom{1}{1} a_1(4) + \binom{0}{0} a_1(4) \\
&= \left(\binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{2}{0} + \binom{3}{0} \right) a_1(1) + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \binom{2}{0} \right) a_1(2)
\end{aligned}$$

$$+\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{0}{0}+\binom{1}{0}\right)a_1(3)+\left(\binom{0}{0}+\binom{1}{1}+\binom{2}{2}+\binom{3}{3}\right)a_1(4)$$

從上面的例子中, $a_1(3), a_2(2), a_2(3), a_3(1), a_3(2), a_4(1)$, 的線性組合中, $a_1(3)$ 的係數 $\binom{0}{0}$, $\binom{1}{0}$, $\binom{1}{1}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{2}{2}$, $\binom{3}{2}$ 在巴斯卡三角形中形成一個平行四邊形, 這個平行四邊形與 $a_1(3)$, $a_2(2)$, $a_2(3)$, $a_3(1)$, $a_3(2)$, $a_4(1)$ 在底爲 $a_1(1)$, $a_1(2)$, $a_1(3)$, $a_1(4)$ 的 Apex 三角形中形成的平行四邊形恰好顚倒。我們可以推廣這個性質到一般的情形。利用巴斯卡三角形定理, 我們可以計算所有底爲 $a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(k)$ 的 Apex 三角形的元素總和。由 (1) 知道, $a_p(j)$ 的線性組合中 $a_1(i)$ 的係數 $\binom{p-1}{i-j}$, 在下面定理中, 我們用嚴格的數學方法來計算一般的 T_k。

定理二:

$$T_k=\sum_{1\le i\le k}\ \sum_{1\le p\le k+1-i}a_p(i)=\sum_{m=1}^{k}\left[\binom{k+1}{m}-1\right]a_1(m) \tag{3}$$

證明:

$$\begin{aligned}
T_k&=\sum_{1\le i\le k}\ \sum_{1\le p\le k+1-i}\ \sum_{j=0}^{p-1}\binom{p-1}{j}a_1(j+i)\\
&=\sum_{m=1}^{k}\left(\sum_{1\le i\le m}\ \sum_{1\le p\le k+1-i}\binom{p-1}{m-i}\right)a_1(m)\\
&=\sum_{m=1}^{k}\left(\sum_{1\le i\le m}\binom{k-i+1}{m-i+1}\right)a_1(m)\\
&=\sum_{m=1}^{k}\left(\binom{k+1}{m}-1\right)a_1(m)
\end{aligned}$$

三. 推廣荷蘭讀者的問題

在對"底爲 k 的 Apex 模 n 三角形"的一些例子作詳細的觀察、探討和分析。我們得到下列性質:

性質1. 由公式 (2) 我們得到 $T_k\equiv d(1+2+\ldots+n)(\text{mod n})$

性質2. 當 $n=1+2+\ldots+k$ 時, 若我們要把 $0,1,2,\ldots,n-1$ 排成一個底爲 k 的 Apex 模 n 的三角形, 則 Apex 模 n 三角形最上層的那個數必定爲0, 因爲若0不是在最上層, 那這 Apex 模 n 三角形必有二個相同的數出現, 這與已知不符, 所以最上層那個數必爲0。

性質3. 當 $n=st$ 時, 我們知道底爲 k 的 Apex 模 n 三角形也是形成一個底爲 k 的 Apex 模 s 三角形。只要從我們得到所有底爲 k 的 Apex 模 s 三角形中的每一個元素 x_i 改

爲 $y_i = x_i + r_i s, \quad 0 \le r_i \le t-1$, 我們可以得到所有底爲 k 的 Apex 模 n 三角形 (其中可能會多得到一些錯誤的底爲 k 的 Apex 模 n 三角形)。

性質4. 當 $n = st$ 時, 我們知道所有的底爲 k 的 Apex 模 s 三角形有 a 個及所有的底爲 k 的 Apex 模 t 三角形有 b 個。由性質3及中國餘式定理知道, 所有的底爲 k 的 Apex 模 n 三角形都可以從 mn 對 (A,B) 推導出來, A 是底爲 k 的 Apex 模 s 三角形, B 是底爲 k 的 Apex 模 t 三角形, 其中可能會多得到一些錯誤的底爲 k 的 Apex 模 n 三角形。

當 $k = 1$ 時, 就只有一個1, $k = 2$ 時第一排的數是1、2, 上面是3。

1. 底為3的 Apex 模 n 三角形

當 $k = 3$ 時, 爲了書寫方便, 我就把底部那3個數稱爲 a, b, c 三數, 則圖五是底爲3的 Apex 三角形。因爲 $1 + 2 + 3 = 6 \times 1 = 3 \times 2 = 2 \times 3$, 所以 n 可以是2、3、6 。

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & a+2b+c & & \\
 & a+b & & b+c & \\
a & & b & & c
\end{array}
$$

圖五

(1) $n = 2$ (底爲3的 Apex 模2三角形)。

由公式 (2) 知道圖五的六個數相加之和等於 $3a + 5b + 3c$, 同時它也等於3(0+1)。所以 $3a + 5b + 3c \equiv 3(1 + 0) \equiv 1 \equiv a + b + c (\bmod 2)$, 既然 $a + b + c \equiv 1$, 所以 a、b、c 的組合就只有111、100、010、001。這四種經過簡單計算及驗算之後, 它們都形成底爲3的 Apex 模2三角形。以下四種是 $n = 2$ 時所有的答案。

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & 0 & & 0 & \\
1 & & 1 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 1 & & 0 & \\
1 & & 0 & & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & \\
 & 1 & & 1 & \\
0 & & 1 & & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & 0 & & 1 & \\
0 & & 0 & & 1
\end{array}
$$

(2) $n = 3$ (底爲3的 Apex 模3三角形)。

由公式 (2) 知道圖五的六個數相加之和等於 $3a + 5b + 3c$, 同時它也等於2(0+1+2)。所以 $3a + 5b + 3c \equiv 2(0 + 1 + 2) \equiv 0 \equiv 2b (\bmod 3)$。我們可得 $b \equiv 0 (\bmod 3)$ 。

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & a & & 3-a & \\ a & & 0 & & 3-a \end{array}$$

圖六

所以圖六中 $a=1,2$ 時都成立, 共有二組解。

(3) $n=6$ (底爲3的 Apex 模6三角形)。

$n=6$ 時, 我們有三種作法, 一種是照先前方法去分析, 另二種方法是根據性質2及性質3去分析。

解一: 由性質2, 我們知道最上層的數是 $a+2b+c=0$, 我們又知道 $3a+5b+3c\equiv 0+1+2+3+4+5\equiv 3(\mathrm{mod}\ 6)$, 我們可得 $b=3(\mathrm{mod}\ 6)$ 和 $a+c=0(\mathrm{mod}\ 6)$。所以答案共有四組解:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & 4 & & 2 & \\ 1 & & 3 & & 5 \end{array}\quad \begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & 1 & & 5 & \\ 4 & & 3 & & 2 \end{array}\quad \begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & 2 & & 4 & \\ 5 & & 3 & & 1 \end{array}\quad \begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & 5 & & 1 & \\ 2 & & 3 & & 4 \end{array}$$

解二:我們知道 Apex 模6三角形也是形成一個 Apex 模3三角形。因而只要從我們所得到二組 Apex 模3三角形再去分析就可以了。若 $x=z(\mathrm{mod}3)$ 則可能 $x=z$ 或 $z+3(\mathrm{mod}\ 6)$。所以我們得到八組可能解, 其中正確的解有以下四組 $(a=1,2,4,5)$:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & 4a & & 2a & \\ a & & 3 & & 5a \end{array}$$

解三:我們所得到二組“底爲3的 Apex 模3三角形”及四組“底爲3的 Apex 模2三角形”。所以我們得到八組可能解, 其中正確的解有四組 (同上)

2. 底為4的 Apex 模 n 三角形

現在我們來看當 $k=4$ 時的情況: $1+2+3+4=10\times 1=5\times 2=2\times 5$, 所以 n 可以等於2、5或10三種。當 $k=4$ 時, 我們可以畫出底爲4的 Apex三角形 (圖七):

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a+3b+3c+d & & & \\ & & a+2b+c & & b+2c+d & & \\ & a+b & & b+c & & c+d & \\ a & & b & & c & & d \end{array}$$

圖七

(1) $n=2$ (底爲4的 Apex 模2三角形)。

由公式 (2) 知道圖七的十個數相加之和等於 $4a+9b+9c+4d$, 同時它也等於$5(0+1)$。所以 $4a+9b+9c+4d \equiv 5(0+1) \equiv 1 \equiv b+c \pmod 2$。這樣 b 和 c 中一個爲0, 一個爲1; 然而三角形有對稱性, 所以就先設 b 爲0, c 爲1, 即可得到圖八。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a+d+1 & & & \\ & & a+1 & & d & & \\ & a & & 1 & & d+1 & \\ a & & 0 & & 1 & & d \end{array}$$

圖八

若 $d=a$, 因爲已經有二個1, 而圖八中有五個1, 所以 $a=d=0$。這樣可得到一組解:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & 0 & & 1 & & 1 & \\ 0 & & 0 & & 1 & & 0 \end{array}$$

若 $a \neq d$, 則我們又可得到二組解:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & & 0 & \\ 0 & & 0 & & 1 & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & 1 & & 1 & & 1 & \\ 1 & & 0 & & 1 & & 0 \end{array}$$

如果考慮 $b=1, c=0$ 時的情況, 我們又有另外對稱的三組解, 所以共有六組解。

(2) $n=5$ (底爲4的 Apex 模5三角形)。

因爲 $4a+9b+9c+4d \equiv 2(0+1+2+\ldots+4) \equiv 0 \equiv 4(a+b+c+d) \pmod 5$, 所以我們知道 $a+b+c+d \equiv 0 \pmod 5$, 因此底爲4的 Apex 模5三角形可以改寫成圖九:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 2(b+c) & & & \\
 & & a+2b+c & & c-a & & \\
 & a+b & & b+c & & -(a+b) & \\
a & & b & & c & & -(a+b+c)
\end{array}
$$

圖九

到這裡, 好像一下子沒有什可以繼續分析的了。由於圖九中有二個0, 所以我們就再來試試看0在那裡? 由三角形的對稱性, 所以只需要試試左半邊那6 個數就可以了。又 $b+c$ 和 $2(b+c)$ 同時等於0, 因而實際上我們只要分析這5個數 $b+c, a+2b+c, a+b, a, b$ 可能爲0的情況就行了。

(a) 若 $b+c=0$, 我們將得到四個解。

因爲 $b+c=0$, 所以可以把 c 視爲 $-b$, 又 $d=-(a+b+c)=-a$。這樣圖九可改寫成圖十。

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & a+b & & -(a+b) & & \\
 & a+b & & 0 & & -(a+b) & \\
a & & b & & -b & & -a
\end{array}
$$

圖十

底爲4的 Apex 模5三角形中的十個整數是恰有5對0,1,2,3,4。因爲在圖十中已經出現二個0, 二個 $-(a+b)$ 及二個 $a+b$, 所以 $a+b\neq 0$ 而且 $a, b, -b, -a$ 會恰巧形成二對。但是 (i) $a\neq -a$, 否則 $a\equiv 0 \pmod 5$, 這樣圖十中至少有三個0(不合)。(ii) $a\neq -b$, 否則 $a+b\equiv 0 \pmod 5$。由 (i), (ii), 我們知道 $a=b$, 而且 $-a$ 可視爲 $4a$; $-2a$ 也可視爲 $3a$, 如果我們得到這樣情況所有的四個解 (如圖十一, 其中 a 代表1、2、3、4)。

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & 2a & & 3a & & \\
 & 2a & & 0 & & 3a & \\
a & & a & & 4a & & 4a
\end{array}
$$

圖十一

(b) 若 $a+2b+c=0$, 我們將證明這會導致矛盾。

因爲 $a+2b+c=0$, 所以 $c=-(a+2b)$, 又 $d=-(a+b+c)=b$。我們可改寫圖九爲圖十二。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & -2(a+b) & & & \\
 & & 0 & & -2(a+b) & & \\
 & a+b & & -(a+b) & & -(a+b) & \\
a & & b & & -(a+2b) & & b
\end{array}$$

圖十二

因爲在圖十二中已經出現二個 b, 二個 $-(a+b)$, 二個 $-2(a+b)$ 及一個0, 所以要從 $a, a+b, -(a+2b)$ 中再找一個0。

若 $a=0$ 則圖十二會有三個 b (不合); 若 $a+b=0$, 則 $-(a+b)=0=-2(a+b)$, 則圖九會至少有六個0(不合); 若 $-(a+2b)=0$, 則 $b=-(a+b)$, 這樣圖十二至少就會有四個 b (不合)。所以 $a+2b+c\neq 0$。

(c) 若 $a+b=0$, 我們將證明這會導致矛盾。

因爲 $a+b=0$, 所以 $b=-a$, 我們又知道 $d+c=-(a+b)=0$, 所以 $d=-c$。又可將圖九改寫爲圖十三。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 2(c-a) & & & \\
 & & c-a & & c-a & & \\
 & 0 & & c-a & & 0 & \\
a & & -a & & c & & -c
\end{array}$$

圖十三

圖十三中有三個 $c-a$, 這與規定不符, 所以 $a+b\neq 0$。

(d) 若 $a=0$, 我們將證明這會導致矛盾。

因爲 $d=-(a+b+c)=-(b+c)$, 可改寫圖九爲圖十四。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 2(b+c) & & & \\
 & & 2b+c & & c & & \\
 & b & & b+c & & -b & \\
0 & & b & & c & & -(b+c)
\end{array}$$

圖十四

因爲在 (圖十四) 中已經出現二個 b, 二個 c 及一個0, 所以要從 $-b, b+c, 2(b+c), -(b+c), 2b+c$ 中再找一個0。

因爲 $b \neq 0$, 則 $-b \neq 0$; 因爲 $b+c, 2(b+c), -(b+c)$ 三者同時爲0, 而圖十四不會超過二個0, 所以它們都不等於0; 若 $2b+c=0$, 則 $b=-(b+c)$, 這樣圖十四會有三個 b(不合); 所以 $a \neq 0$。

(e) 若 $b=0$, 我們將證明這會導致矛盾。

因爲 $d=-(a+b+c)=-(a+c)$, 所以可改寫圖九爲圖十五。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 2c & & & \\ & & a+c & & c-a & & \\ & a & & c & & -a & \\ a & & 0 & & c & & -(a+c) \end{array}$$

圖十五

因爲在圖十五中已經出現二個 a, 二個 c 及一個0, 所以要從 $-a, 2c, a+c, -(a+c), c-a$ 中再找一個0。因爲 $a \neq 0$, 則 $-a \neq 0$; 因爲 $c \neq 0$, 則 $2c \neq 0$; 因爲 $a+c, -(a+c)$ 二者同時爲0, 圖十五會有超過二個0(不合); 若 $c-a=0$, 則 $c=a$, 這樣圖十五至少會有四個 a (不合); 所以 $b \neq 0$ 。

從 (a) $\sim$ (e) 的推論, 我們可證明底爲4的 Apex 模5三角形共有四組解。

(3) $n=10$ (底爲4的 Apex 模5三角形)。

我們知道底爲4的 Apex 模10三角形也是形成一個底爲4的 Apex 模5三角形。所以我們只要從我們所得到所有底爲4的 Apex 模5三角形的四組解再去分析就可以了。底爲4的 Apex 模5三角形中有二個0, 它們在底爲4的 Apex 模10三角形中是0和5, 已知底爲4的 Apex 模10三角形最上層的數是0, 所以, 另一個就是5。若 $x=k(\mathrm{mod}\ 5)$, 則 $x=k$ 或 $k+5(\mathrm{mod}\ 10)$。所以得到以下八組解 $(a=1,3,7,9)$, 其中如果 a 與10不互質, 則 $0, a, 2a, \ldots, 9a$ 中必有重複的數出現, 所以不合。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & 2a & & 8a & & \\ & 7a & & 5 & & 3a & \\ a & & 6a & & 9a & & 4a \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & 2a & & 8a & & \\ & 7a & & 5 & & 3a & \\ 6a & & a & & 4a & & 9a \end{array}$$

3. 底為5的 Apex 模 n 三角形

$k=5$ 時, 我們可以得到

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & a+4b+6c+4d+e & & & & \\
 & & & a+3b+3c+d & & b+3c+3d+e & & & \\
 & & a+2b+c & & b+2c+d & & c+2d+e & & \\
 & a+b & & b+c & & c+d & & d+e & \\
a & & b & & c & & d & & e
\end{array}$$

圖十六

$1+2+3+4+5=15\times 1=3\times 5=5\times 3$, 所以 n 可以等於15、3或5。

(1) $n=15$。我們將證明底爲5的 Apex 模15三角形不存在。

我們知道底爲5的 Apex 模15三角形也是形成一個底爲5的 Apex 模5三角形。所以我們將要從我們得到所有底爲5的 Apex 模5三角形和底爲5的 Apex 模3三角形的 c 都是0, 由中國餘式定理已知底爲5的 Apex 模15三角形的 c 是0, 這與底爲5的 Apex 模15三角形中只有一個0互相矛盾。所以底爲5的 Apex 模15三角形不存在。

首先我們考慮底爲5的 Apex 模3三角形。因爲 $a+4b+6c+4d+e\equiv 0(\text{mod } 15)$ 及 $5a+14b+19c+14d+5e\equiv 0+1+2+\ldots+14\equiv 0(\text{mod } 15)$。我們首先考慮底爲5的 Apex 模3三角形, 則 $a+b+d+e\equiv 0(\text{mod } 3)$ 及 $2(a+b+d+e)+c\equiv 0(\text{mod } 3)$, 所以 $c\equiv 0(\text{mod } 3)$。

再來我們考慮底爲5的 Apex 模5三角形。由於 $a+c+e+4(b+d)\equiv 0(\text{mod } 5)$ 及 $-(b+c+d)\equiv 0(\text{mod } 5)$, 我們得到 $a+2c+e\equiv 0(\text{mod } 5)$, 所以我們可以令 $d\equiv -(b+c), e\equiv -(a+2c)$, 這樣圖十六可以改寫成圖十七。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & a+2b+2c & & -(a+2b+2c) & & & \\
 & & a+2b+c & & c & & 2c-a-2b & & \\
 & a+b & & b+c & & -b & & 2c-a-b & \\
a & & b & & c & & -(b+c) & & -(a+2c)
\end{array}$$

圖十七

圖十七中恰有3個0, 由三角形的對稱性, 我們試試左半邊的數那個可能等於0。

(a) 若 $a=0$, 我們將證明這會導致矛盾。

當 $a=0$, 可改寫圖十七爲圖十八。

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& 0 &&&& \\ &&& 2(b+c) && -2(b+c) &&& \\ && 2b+c && c && 2(c-b) && \\ & b && b+c && -b && 2(2b+c) & \\ 0 && b && c && -(b+c) && -2c \end{array}$$

圖十八

因爲在圖十八中已經出現二個 b, 二個 c 及二個0, 所以要從圖十八其他9個數, $-b$, $-2c$, $b+c$, $2(b+c)$, $-(b+c)$, $-2(b+c)$, $2b+c$, $2(2b+c)$ 及 $2(c-b)$ 中再找一個0。因爲 $b\neq 0$, 則 $-b\neq 0$; 因爲 $c\neq 0$, 則 $-2c\neq 0$; 因爲 $b+c$, $2(b+c)$, $-(b+c)$ 及 $-2(b+c)$ 四者會同時爲0, 這樣會造成圖十八會超過三個0(不合); 若 $2(c-b)=0$, 則 $b=c$, 這樣圖十八會有四個 b (不合), 所以 $a\neq 0$。

(b) 若 $b=0$, 我們將證明這會導致矛盾。

當$b=0$, 可改寫圖十八爲圖十九。

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& 0 &&&& \\ &&& a+2c && -(a+2c) &&& \\ && a+c && c && 2c-a && \\ & a && c && 0 && 2c-a & \\ a && 0 && c && -c && -(a+2c) \end{array}$$

圖十九

因爲在圖十九中已經出現三個0, 三個 c 及二個 a, 二個 $2c-a$ 及二個 $-(a+2c)$, 所以要從 $a+c, a+2c, -c$ 中再找一個 a。(i) 因爲 $c\neq 0$, 則 $a+c$ 和 $a+2c$ 都不等於 a; (ii) 若 $a=-c$, 則 $a+c=0$; 這樣圖中有四個0(不合)。由 (i) 與 (ii), $a+c, a+2c, -c$ 都不等於 a, 則圖中只有二個 a (不合), 所以 $b\neq 0$。

(c) 若 $a+b=0$。我們將證明這會導致矛盾。

因爲 $a+b=0$, 所以 $b=-a$。可改寫圖十七爲圖二十。

$$\begin{array}{c}
0\\
2c-a \qquad a-2c\\
c-a \qquad c \qquad a+2c\\
0 \qquad c-a \qquad a \qquad 2c\\
a \qquad -a \qquad c \qquad a-c \qquad -(a+2c)
\end{array}$$

圖二十

圖二十中有二個0, 二個 a, 二個 c 及二個 $c-a$, 所以要 $-a, 2c, a+2c, -(a+2c), a-2c, 2c-a, a-c$ 中找一個0。(i) 因爲 $a \neq 0$, 則 $-a \neq 0$; (ii) 因爲 $c \neq 0$, 則 $2c \neq 0$; (iii) 因爲 $a+2c, -(a+2c)$ 會同時爲0, $2c-a$與 $a-2c$ 也會同時爲0。這樣會造成圖二十超過三個0(不合), (iv) 因爲 $a-c=0$ 則 $a=c$, 會有四個 a (不合)。由以上推論可知 $a+b \neq 0$。

(d) 若 $b+c=0$, 我們將證明這會導致矛盾。

因爲 $b+c=0$, 所以可以把 c 視爲 $-b, d=-(b+c)=0$。這樣圖十七可改寫成圖二十一。

$$\begin{array}{c}
0\\
a \qquad -a\\
a+b \qquad -b \qquad b-a\\
a+b \qquad 0 \qquad -b \qquad 2b-a\\
a \qquad b \qquad -b \qquad 0 \qquad 2b-a
\end{array}$$

圖二十一

因爲在圖二十一中已經出現三個0, 三個 $-b$, 二個 a, 二個 $2b-a$ 及二個 $a+b$, 所以要從 $b, -a, b-a$ 中找一個 a 。(i) 若 $a=b$ 則 $b-a=0$, 這樣圖二十一至少有四個0 (不合)。(ii) 若 $a=b-a$ 則 $2b-a=a+b$, 則圖十八至少有四個 $a+b$ (不合)。(iii) 若 $a=-a$ 則 $a=0$, 這樣圖二十一至少有六個0(不合)。根據以上的推論圖二十一只有二個 a, 所以 $b+c \neq 0$。

(e) 若 $a+2b+c=0$, 我們將證明這會導致矛盾。

因爲 $a+2b+c=0$, 所以 $a=-(2b+c)$。我們可改寫圖十七成圖二十二。

$$\begin{array}{c}
0\\
c \qquad -c\\
0 \qquad c \qquad -2c\\
-(b+c) \qquad b+c \qquad -b \qquad b-2c\\
-(2b+c) \qquad b \qquad c \qquad -(b+c) \qquad 2b-c
\end{array}$$

圖二十二

因爲在圖二十二中已經出現三個 c, 二個0, 二個 $-(b+c)$, 所以要從其他的八個數 $-c$, $-2c$, $b+c$, $-b$, $b-2c$, $-(2b+c)$, b, $2b-c$ 中再找一個0。

因爲 $-c,-2c,c$ 會同時爲0; b 和 $-b$ 會同時爲0; $(b+c),-(b+c)$ 會同時爲0; $b-2c$ 和 $-(2b+c)=-2(b-2c)$ 會同時爲0, 因爲圖二十二中只有三個0, 所以它們都不爲0。

若 $2b-c=0$, 則 $c=2b=-(b+c)$, 我們可得到五個 c (不合), 根據以上的推論, 所以 $a+2b+c\neq 0$。

(f) 若 $a+2b+2c=0$, 我們將證明這會導致矛盾。

因爲 $a+2b+2c=0$, 所以 $a=-2(b+c)$, $e=-(a+2c)=2b$。我們可改寫圖十七成圖二十三。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & & \\
 & & -c & & c & & -c & & \\
 & -(b+2c) & & b+c & & -b & & b-c & \\
-2(b+c) & & b & & c & & -(b+c) & & 2b
\end{array}
$$

圖二十三

因爲在圖二十三中已經出現三個0, 二個 c 及二個 $-c$, 所以剩下的八個數 $b,-b,b+c,-(b+c),-2(b+c),2b,b-c,-(b+2c)$ 都不爲0, 但是, $b=c+(b-c)$; $-b=c-(b+c)$; $b+c=c+b$; $-(b+c)=c-(b+2c)$; $-2(b+c)\equiv c-2(b-c) \pmod 5$; $2b\equiv c+2(b+2c) \pmod 5$; 所以我們知道這六個數 $b,-b,b+c,-(b+c),-2(b+c),2b$ 都不等於 c; 又因爲 $b-c=c+(b-2c)$; $-(b+2c)\equiv c-(b-2c) \pmod 5$; 所以 $b-c,-(b+2c)$ 同時等於 c (不合)。根據以上的推論, 圖二十三只有二個 c (不合), 所以 $a+2b+2c\neq 0$ 。

從 (a) $\sim$ (f) 的推論, 我們證明所有底爲5的 Apex 模5三角形的 c都是0, 另外我們已知所有底爲5的 Apex 模3三角形的 c 也都是0。由中國餘式定理已知底爲5的 Apex 模15三角形的 c 是0, 這與底爲5的 Apex 模15三角形中只有一個0互相矛盾。所以底爲5的 Apex 模15三角形不存在。

(2) 當 $n=3$ 及 $n=5$ 時, 可以仿照前面的作法, 分各種情況討論。下列我們寫出所有底爲5的 Apex 模3和模5三角形的第一排數字 $a_1(1),a_1(2),\ldots,a_1(5)$。

底爲5的 Apex 模3三角形:

01020 01121 01201 02010 02102 02212 10210 12012 12110 20120 21021 21220

底爲5的 Apex 模5三角形:

11044 14332 14423 22033 23114 23341 32214 32441 33022 41132 41223 44011

4. 寫電腦程式來找所有的底為 k 的 Apex 模 n 三角形。

$k=6,7,8,\ldots,$ 都可以用上面演算法來找答案。另外也可以寫電腦程式來找所有的答案, 我們可以選擇每一個 $a_1(i), 1\le i\le k,$ 爲 $0,1,\ldots$ 或 $n-1$ 後, 去建構底爲5的三角形; 接著去計算三角形中的數 $a_p(i), 1\le p\le k, i\le k+1-p$ 是否恰好是 d 個0, d 個1, $\ldots$, d 個 $n-1$, 如果對的話, 那麼它就是一個底爲 k 的 Apex 模 n 三角形。照這個方法我們可以找出所有的答案。可是當 k 大一點時, 電腦就會跑很久。例如 $k=8, n=36$ 時我們要考慮 $36\times 35\times 34\times 33\times 30\times 29(=1,220,096,908,800)$ 種底爲8的三角形。但是如果我們先找底爲8的 Apex 模3三角形, 最上層的數是0及全部的數之和 $=\frac{d\times n(n-1)}{2}$的條件, 那只有考慮 $3^6(=729)$ 種底爲8的三角形, 經過檢驗之後, 我們可以找出所有的底爲8的 Apex 模3三角形, 再利用同餘定理, 從這些底爲8的 Apex 模3三角形去建構底爲8的 Apex 模9三角形, 結果總共有114組答案。

若把底爲8的 Apex 模9三角形中的每一個數乘以 s, 其中 $s=1,2,4,5,7,8$, 則我們會得到另一組新的底爲8的 Apex 模9三角形。下列我們寫出 $19(=\frac{114}{6})$ 組底爲8的 Apex 模9三角形的第一排數字 $a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(8)$ 。

01348056	01478223	10430865	12345678	12435432
13706802	14280648	15263748	15301758	15672348
16136838	16276215	17620863	31078620	31118886
31281786	61148250	61318683	63107328	

同樣地, 我們藉由先找底爲8的 Apex 模2的三角形再建構所有的底爲8的 Apex 模 4的三角形, 另外我們已得到所有的114組底爲8的 Apex 模9三角形。由中國餘式定理, 我們可以找出所有底爲8的 Apex 模36三角形, 但是結果是0個。我們也發現到 $k=6,7,8$ (已討論過 $k=5$ 的情形) 時也都沒有底爲 k 的 Apex 模 $\frac{k(k+1)}{2}$三角形。

四. 荷蘭讀者的問題

如果直接考慮荷蘭讀者的問題底爲的最上層的數就不一定是0了。所以我們要先考慮 3^7 $(=2187)$ 種底爲8的 Apex 模3三角形, 結果共有 190 種答案, 再利用中國餘式定理, 從這些“底爲8的 Apex 模3三角形”去建構“底爲8的 Apex 模9三角形”, 結果總共有306組答案。下列我們寫出 $51(=\frac{306}{6})$ 組底爲8的 Apex 模 9三角形的第一排數字 $a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(8)$。

01348056	01478223	01608753	01650375	03158874
10204341	10251765	10430865	10435572	10685358
10756038	10857735	12345678	12435432	12505206
12857817	13518867	13521402	13706802	14228730
14280648	14340201	14512584	14641308	15263748
15301758	15601320	15672348	16034208	16136838
16276215	16551702	16554234	17327526	17536752
17620863	17836785	18205833	18364086	18776205
30170715	31053618	31078620	31118886	31281786
31781685	61148250	61318683	61570320	63107328
66140718				

附註:

爲了完整性, 我們列出一些用電腦程式計算出的結果:
底爲5的 Apex 模3三角形總共有12組答案;
底爲5的 Apex 模5三角形總共有12組答案;
底爲6的 Apex 模3三角形總共有52組答案;
底爲6的 Apex 模7三角形總共有12組答案;
底爲6的 Apex 模21三角形總共有0組答案;
底爲7的 Apex 模2三角形總共有12組答案;
底爲7的 Apex 模4三角形總共有64組答案;
底爲7的 Apex 模7三角形總共有78組答案;
底爲7的 Apex 模28三角形總共有0組答案;
底爲8的 Apex 模2三角形總共有40組答案;
底爲8的 Apex 模4三角形總共有300組答案;
底爲8的 Apex 模3三角形總共有190組答案;
底爲8的 Apex 模9三角形總共有306組答案;
底爲8的 Apex 模36三角形總共有0組答案。

五. 參考資料及其他

1. M. Gardner, Mathematical Carnival, Mathematical Association of America, Washington, 1969.

—本文作者就讀於萬芳高中國中部—