與超導體有關的偏微分方程

林太家

從二十世紀初開始, 物理學家發現了超導現象。當溫度降到低於臨界溫度 T_c (約 $5°k$ 時), 某些金屬或合金類物質的電阻會趨於零, 這類物質被稱作超導體。生活在一個充滿電器的資訊時代中, 超導體的應用已逐漸受到物理和材料科學的廣泛重視。具體而言, 它可用在大型變壓器的線圈或大型電路的製作。目前, 美、日、歐盟等先進國家都有相關的研究在進行。

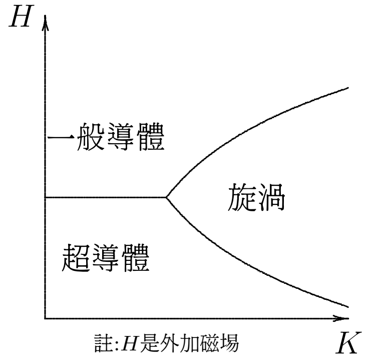


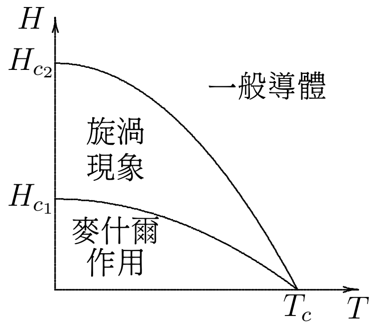
圖1

影響超導現象的一個主要因素是與物質有關的係數 K。當 K 較小時 ($K < \sqrt{2}$), 稱爲第一類(Type I) 超導體; 當 K 較大時 ($K > \sqrt{2}$), 稱爲第二類(Type II) 超導體。對第一類超導體而言, 外加磁場較小時會有超導現象, 而外加磁場較大時即變爲一般導體。但對第二類超導體而言, 外加磁場的大小會產生超導、旋渦 (vortex) 以及一般導體三種現象, 如圖1。

對第二類超導體而言, 旋渦現象是一重要的研究課題, 因爲旋渦的中心是一般導體, 而中心外是超導體。根據許多實驗觀察, 多數的旋渦會互相牽引而移動, 就如同許多颱風會彼此牽引一樣。因此超導體中的旋渦現象成爲一個被廣泛重視的問題。關於旋渦的詳細描述, 請參閱圖3。

溫度和外加磁場是兩個影響旋渦現象的主要因素。當溫度小於臨界溫度 T_c 而外加磁場小於第一臨界磁場 H_{c_1} 時, 麥什爾作用 (Meissner effect) 產生, 即外加磁場的磁力線無法穿透超導體, 並且整個物質本身都充滿了超導現象。但當外加磁場超過第一臨界磁場 H_{c_1} 時, 物質的某處被外加磁場的磁力線穿透並產生電阻, 而其他地方仍舊是超導無電阻。這種現象被稱爲超導體的旋渦現象。若外加磁場持續增加, 旋渦的數目會逐漸增加, 直到第二臨界磁場 H_{c_2} 附近。當

外加磁場達到第二臨界磁場 H_{c_2} 時, 旋渦的數目暴增, 大量的旋渦形成了旋渦晶格 (vortex lattice)。但當外加磁場突破第二臨界磁場 H_{c_2} 時, 超導現象全然消失而成爲一般導體。外加磁場、溫度和旋渦的關係, 如圖2。



註:T 是溫度, T_c 是臨界溫度
H_{c_1} 第一臨界磁場, H 外加磁場
H_{c_2} 第二臨界磁場

圖2

一般而言, 旋渦本身會受到一些物理因素的影響而移動, 並且各旋渦之間會彼此牽引而產生類似多體運動的情形, 這被稱爲旋渦動態 (vortex dynamics)。希望藉著對旋渦動態的了解, 能找到方法來控制旋渦進而能將其固定。這在理論和應用科學上都有重要價值。

傳統上, 許多重要的物理現象都可用偏微分方程加以描述。藉著對偏微分方程的研究, 往往可提供更多的了解。對超導現象而言, 我們要引進金斯伯-藍道自由能 (Ginzburg-Landan free energy) 如下:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}|(\nabla - iA)u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}(1-|u|^2)^2 + \frac{1}{2}|\nabla \times A - H|^2 \qquad (1)$$

其中 u 是複數值的有序參數 (order parameter), A 是二維向量的磁化能 (magnetic potential), H 是外加磁場, $\varepsilon = \frac{1}{K}, K$ 是前述的金斯伯-藍道係數 (Ginzburg-Landau parameter)。$|u|^2$ 代表超導電子密度, 故 $|u|^2 \approx 0$ 在旋渦中心附近而 $|u|^2 \approx 1$ 在旋渦中心之外。

我們可從式 (1) 找到具有意義的旋渦解。由於式 (1) 的公式複雜, 故先忽略磁力的作用。一般而言, 當溫度接近臨界溫度 T_c 且外加磁場在 H_{c_1} 曲線上時, 磁場的影響可被忽略, 詳如圖2。因此金斯伯-藍道自由能便可化簡爲

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}(1-|u|^2)^2 \qquad (2)$$

此自由能所對應的尤拉-朗格倫局方程 (Euler-Lagrange Equation) 如下:

$$\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2}(1-|u|^2)u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2. \qquad (3)$$

這是一個半線性橢圓偏微分方程組 (semi-linear elliptic system), 有許多相關的數學理論已被研究。

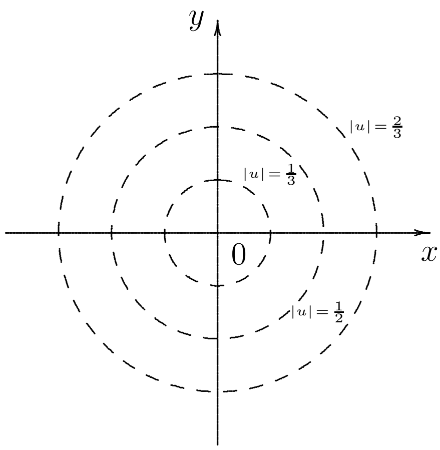


圖3: $|u|$ 的等高線

現在我們來看一個重要的特解叫做對稱旋渦解 (symmetric vortex solution)。令 $u=f(\frac{r}{\varepsilon})e^{i\theta}$, 其中 (r,θ) 是在平面上的極座標, 且 f 是一實數值函數。由式 (3) 可推導 f 滿足一常微分方程如下:

$$f''+\frac{1}{r}f'-\frac{1}{r^2}f+(1-f^2)=0, \quad r>0. \tag{4}$$

從式 (4) 可得到一個特解 f 是遞增函數且滿足

$$f(0)=0, \qquad f(+\infty)=1.$$

對稱旋渦解刻劃出旋渦的特性, 我們可利用等高線描述此解, 如圖3。

近年來, 隨著超導體的廣泛研究, 許多非傳統超導體被發現, 如氧化銅類高溫超導體, $Sr_2R_uO_4$ 以及 UPt_3 等。爲描述此類超導體, 許多新的自由能被物理學家提出如 S 和 d wave 金斯伯-藍道自由能以及 p wave 金斯伯-藍道自由能等。相關的偏微分方程問題很多, 是一值得研究的領域。有志於攻讀數學和物理的同學們, 偏微分方程是你們一個好的選擇。

—本文作者任教於中正大學數學系—