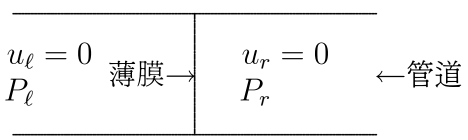
激波理論簡介

楊彤

偏微分方程根據其本身的特性可分爲雙曲型、拋物型、橢圓型及其混合型幾大類。有一類方程組被稱爲守恆律方程組, 它們來自於一些重要的物理模型, 如流體力學、彈性力學、電磁動力學和天體物理學等。這些方程組的特性是雙曲型或雙曲與拋物的混合型。其中最典型的例子是 Euler 方程組, 它包含了質量守恆、動量守恆和能量守恆。在三維空間中, 它是一個 5×5 的方程組, 即有5個方程和5個未知函數。由於各特徵方向的傳播速度有界, 這個方程組是雙曲型的。而與它對應的關於帶粘性的流體的方程組就是 Navier-Stokes 方程組, 由於粘性和熱傳導, 這個方程組是雙曲和拋物的混合型。以下我們將主要討論雙曲型守恆律組, 對於這類方程組的一個最要特徵是關於時間的整體光滑解通常不存在, 即方程組的解通常會包含間斷。故此, 解必須在弱意義下而非傳統的微分意義下進行討論。間斷解的引入導致了激波理論的發展, 而這一方面的研究至今仍是數學的一個十分活躍和富有挑戰性的分支。

本文將討論激波理論的幾個基本而本質的問題, 即激波的引入, 熵的定義, Riemann問題解的結構, 解的大時間性態, 解的存在性和穩定性。

激波理論的研究可追溯到1850年, 當時 Riemann 考慮以下一個氣體動力學的問題。用一片薄膜分格開管道中兩部分的靜止氣體, 如下圖:



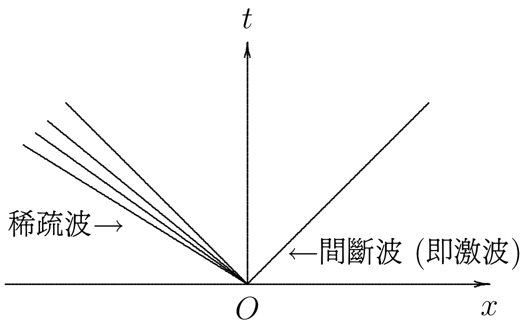
假設左邊的氣體的壓強比右邊的大, $P_\ell > P_r$, 而氣體的變化符合一維的等熵氣體動力學方程組, 即質量守恆和動量守恆,

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0,$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = 0.$$

這裡 ρ, u 和 $P(\rho)$ 分別代表氣體的密度, 速度和壓強。其中 ρ 和 u 是 x 和 t 的未知函數。可以驗證當 $P'(\rho) = \frac{dP(\rho)}{d\rho} > 0$ 時, 這個方程組是雙曲型的, 它的兩個特微分別是 $\lambda_\pm = u \pm c$, $c = \sqrt{P'(\rho)}$ 爲氣體的聲速。由於方程組雙曲型的特性,

信息是以有限速度傳播。現在我們回到剛才 Riemann 考慮的問題, 當薄膜突然被抽去, 左邊的氣體由於壓強大的原因會壓迫右邊的氣體, 從而產生一個具壓縮特性的間斷波。而爲了支持這樣一個間斷波向右傳播, 氣體中會產生另外一個稀疏波向左傳播. 如下圖



從這個簡單的問題中我們可以看到兩種不同的非線性現象, 一種是壓縮型的激波, 而另一種是擴散型的稀疏波。前者的特徵是左右的特徵線會進入激波, 而後者的特徵線則是散開。

其實雙曲型守恆律組的解會出現間斷這一現象, 可以從更簡單的方程看出, Riemann在這問題上的重要貢獻在於他首先考慮初值本身就具有間斷的情形, 而且給出了解的一個淸楚的描述。現在我們稱的 Riemann 問題是指初値爲兩個常狀態的問題。這個問題是雙曲型守恆律組的一個根本問題, 它的解給出了一個波不相互作用的結構, 而這一結構是一般初値問題的解在時間趨於無限大時的狀態, 它亦是以 $\frac{x}{t}$ 爲自變量的自相似解。這個問題我們稍後再作討論。現在我們先對一個簡單的單個守恆律方程做些計算, 從而看出爲什麼間斷通常會在解中出現。

考慮一階擬線性方程的初値問題,

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad (1)$$

假設 $f(u)$ 是一個光滑函數並滿足 $\frac{d^2 f(u)}{du^2} > 0$。這個方程的特徵是

$$\frac{dx}{dt} = f'(u(x,t))$$

其中 $' = \frac{d}{du}$。沿著這一特徵有

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= u_t + u_x \frac{dx}{dt} \\ &= u_t + f(u)_x = 0.\end{aligned}$$

即沿著一條特徵解是常數。故從空間的一點 (x,t), 我們可以沿特徵線 $\frac{dx}{dt} = f'(u(x,t))$ 找到直線 $t = 0$ 上的一點 $(\xi, 0)$。由於特徵線是直線, ξ 可容易求出,

$$\xi = x - f'(u)t.$$

故

$$u(x,t) = u(\xi, 0) = u_0(x - f^{'}(u)t),$$

對上面的方程關於x微分一次, 我們有

$$u_x(x,t) = \frac{u_{0x}}{1 + u_{0x} f''(u)t}.$$

從這個表達式和 $f'' > 0$ 的假設, 我們可以看出, 若 $u_{0x}(x) \geqslant 0$ 對所有 x 成立, 則 $u_x(x,t)$ 就會有上下界。但若有一點 $(x_0, 0)$ 使 $u_0^{'}(x_0) < 0$, 就會存在一個時間 $T \leqslant \frac{1}{u_0^{'}(x_0) f''(u_0(x_0))}$ 滿足 $\lim_{t \to T} u_x(x,t) \to -\infty$對某一個 x 成立, 亦即是解在 (x, T) 出現間斷。

由於解中會出現間斷, 即解的一階導數包含 Dirac-delta 函數, 因此下面將討論的解不再是光滑解而是弱解。對一般的方程組 (1), 即 u 和 $f(u)$ 是 n 維向量的時候,

$u(x,t)$ 被稱爲 (1) 的一個弱解如果對每個 $C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ 的函數 $\phi(x,t)$, 我們有

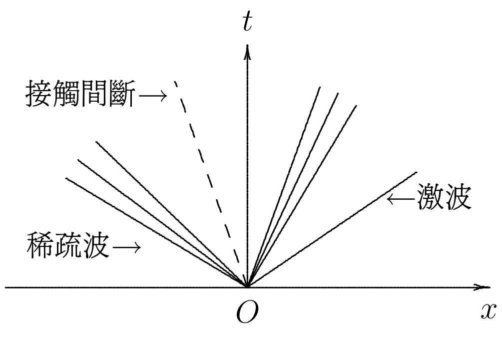
$$\int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} u\phi_t + f(u)\phi_x dxdt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\phi(x,0)dx = 0$$

可以看出上述 Riemenn 考慮的解是一個弱解。從這個弱解的定義或從考慮方程組的兩個 Dirac-delta 函數相消, 我們可以得到以下關於激波傳播速度及左右狀態的關係, 即

$$s[u] = [f], \tag{2}$$

這裡 s 是間斷波的傳播速度, $[f]$ 表示函數 f 左右狀態值之差。方程組 (2) 就是通常被稱爲的 Rankine-Hugoniot 條件。

對於一般嚴格雙曲型守恆律組 Riemann 問題的解的存在性和唯一性, 在1957年 Peter Lax 給出了一個總結和證明。證明中主要用了嚴格雙曲型方程組中各特徵以不同方向傳播的性質, 從而可以運用隱函數定理證明了當兩個常狀態相當接近時 Riemann 問題解的存在性和唯一性。當方程組的每個特徵是眞正非線性, 即 $r_i\cdot\nabla\lambda_i\neq 0$ 或線性退化 $r_i\cdot\nabla\lambda_i\equiv 0$ 時, Riemann問題的解是由幾個激波、或稀疏波或接觸間斷分開 $n+1$ 個常狀態構成, 如下圖。



這裡 λ_i 表示矩陣 $\nabla f(u)$ 的第 i 個特徵根, 而 r_i 是相對應的右特徵向量。不失一般性, 我們假設 λ_i 關於 i 有單調遞增性。在以下討論中, 對應於第 i 個特徵的波被稱爲第 i 族波。

如前指出, Riemann 問題解的重要性是它給出了一個沒有波相互作用的解的結構, 研究證明了這個結構等同於一般初值問題 (即 Cauchy 問題) 解的大時間性態。於1965年, James Glimm 在他的重要文章中就是用 Riemann 問題的解作爲構造方程組 Cauchy 問題近似解的 Building Block, 通過一個隨機變化的序列和對兩個 Riemann 問題解中的波的相互作用的估計, Glimm 引入了兩個隨時間不增加的非線性泛函, 而這兩個非線性泛函分別對應於解的 L_∞ 模和全變差。從而證明了弱解的存在性。當 $r_i\cdot\nabla\lambda_i$ 可能變號時, 解的結構就會變得十分複雜。例如在這情形下, 一個強激波可能會因爲和稀疏波相消而轉變成兩個不同傳播速度和較弱的激波, 同時也產生一些弱的同類稀疏波和其它族的波, 而這種情形不會在眞正非線性的假設下出現。 還有在一般的情形下, 波的速度的大小已無一個單調關係。這些現象都對一般情形下的研究構成相當大的困難。在這一方面的研究中, 解的存在性和大時間性態可參考 Tai-Ping Liu 的工作, 在這裡我們並不作詳細討論。

爲了更清楚地說明雙曲型方程組的解的結構, 我們考慮以下最簡單但具代表性的單個守恆律, 即不帶粘性的 Burgers 方程,

$$u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0. \tag{3}$$

同樣地, 我們首先考慮方程 (3) 的 Riemann 問題, 即初值爲

$$u(x,0)=\begin{cases}u_\ell, & x<0,\\ u_r, & x>0,\end{cases}\tag{4}$$

的初值問題。由於方程 (3) 和初值 (4) 在坐標變換 $(x,t)\to(\lambda x,\lambda t)$ 下是不變的, 這裡 λ 是任意常數, 故我們可以推斷方程的解只是 $\frac{x}{t}$ 的函數。設定

$$\xi=\frac{x}{t},\qquad u(x,t)=u(\xi).\tag{5}$$

將 (5) 代入 (3), 我們有

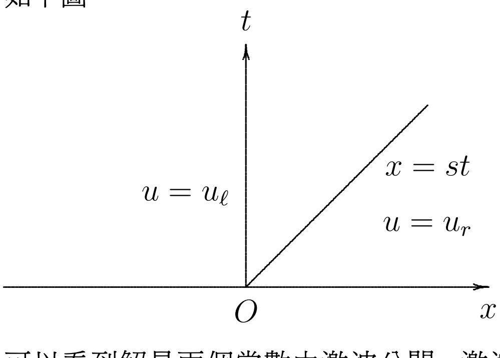
$$\frac{d}{d\xi}u(\xi)(u(\xi)-\xi)=0.\tag{6}$$

所以, $\frac{d}{d\xi}u=0$, 即 $u=$ 常數或 $u=\xi=\frac{x}{t}$. 因此方程的解可以分成以下兩個情形。

情形一:$u_\ell>u_r$, 在這種情形下,

$$u(x,t)=\begin{cases}u_\ell, & x<st,\\ u_r & x>st,\end{cases}$$

如下圖

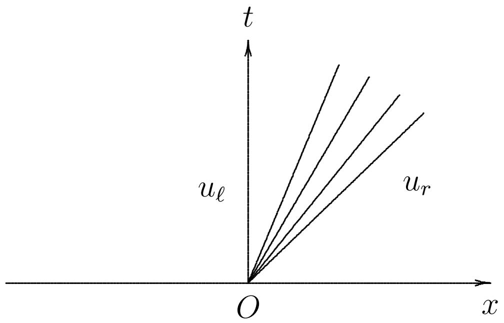


可以看到解是兩個常數由激波分開, 激波的傳播速度 s 滿足 Rankine-Hugoniot 條件, 即

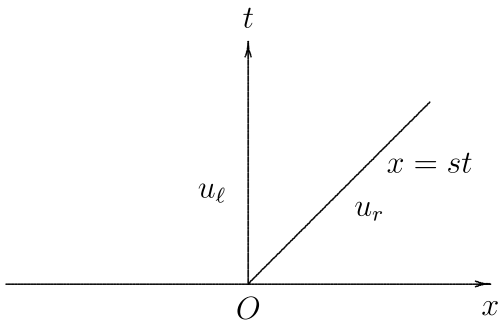
$$s=\frac{\frac{u_\ell^2}{2}-\frac{u_r^2}{2}}{u_\ell-u_r}=\frac{u_\ell+u_r}{2}.$$

情形二:$u_\ell<u_r$. 在這種情形下, 我們可以構造出無窮多個滿足 (6) 的解。下面我們列出其中兩個。

$$u_1(x,t)=\begin{cases}u_\ell, & x<u_\ell t,\\ \frac{x}{t}, & u_\ell t<x<u_r t,\\ u_r, & x>u_r t,\end{cases}$$



$$u_2(x,t)=\begin{cases}u_\ell, & x<st,\\ u_r, & x>st.\end{cases}$$



值得注意的是這兩個解都是問題 (3) 和 (4) 的弱解。第一個解被稱爲稀疏波, 而第二個解被稱爲稀疏激波。故這個簡單的例子指出了弱解並不是唯一的。爲了從衆多弱解中找到一個有物理意義的解, 解除了要滿足弱解的定義外, 還要滿足下面要討論的熵條件。從下面的討論可以看出稀疏激波並不滿足熵條件。故問題 (3) 和 (4) 的解是激波或稀疏波。

我們知道雙曲型守恆律是從物理模型推導出來, 而許多物理模型都具有粘性。方程

(3) 在這種情形下可以改寫爲

$$u_t + (\frac{u^2}{2})_x = \varepsilon u_{xx}, \tag{7}$$

這裡 $\varepsilon > 0$ 是粘性常數。(7) 被稱爲帶粘性的 Burgers 方程。由於多了 εu_{xx} 這一項, 方程不再是雙曲型而是拋物型。故即使初值不光滑, 解在 $t > 0$ 後都會變得光滑。設 $\eta(u)$ 是 u 的一個光滑凸函數, 即 $\frac{d^2}{du^2}\eta(u) > 0$. 我們對方程 (7) 兩邊乘上 $\frac{d\eta(u)}{du}$, 令函數 $q(u)$ 滿足 $\frac{d}{du}q(u) = u\frac{d\eta(u)}{du)}$, 我們有

$$\eta_t + q_x = \varepsilon\eta' u_{xx}. \tag{8}$$

假設 u, $\eta(u)$ 和 $q(u)$ 在 $x = \pm\infty$ 處爲零, 我們可以將方程 (8) 對 x 在 $(-\infty, \infty)$ 積分, 通過一次分部積分後便可得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\eta_t + q_x)dx = -\varepsilon \int \eta'' u_x^2 dx \leq 0.$$

由於在以上討論中 ε 是任意的正常數, 故讓 $\varepsilon \to 0$, 我們便得到方程 (3) 的熵條件, 即

$$\eta_t + q_x \leq 0,$$

對每個凸熵 $\eta(u)$ 在弱意義下成立。

對於前面考慮的 Riemann 問題的初值, 激波的熵條件又可通過考慮行波解淸楚地得到。設

$$u(x,t) = \varphi(x - st).$$

代入方程 (7), 我們得到

$$-s\varphi' + \varphi\varphi' = \varepsilon\varphi''. \tag{9}$$

假設

$$\varphi(-\infty) = u_\ell, \quad \varphi(\infty) = u_r.$$

積分方程 (9) 一次可得

$$\varepsilon\varphi' = \frac{\varphi^2}{2} - s\varphi - (\frac{u_\ell^2}{2} - su_\ell).$$

由於當 $\xi = x - st$ 趨於 ∞ 時, $\varphi' = 0$ 和 $\varphi = u_r$, 所以

$$s = \frac{u_\ell + u_r}{2}.$$

故 $\varphi(\xi)$ 滿足方程

$$\varphi' = \frac{1}{2\varepsilon}(\varphi - u_\ell)(\varphi - u_r).$$

因爲當 $u_\ell \neq u_r$ 及 φ 在 u_ℓ 和 u_r之間時, $\varphi'(\xi) < 0$, 所以連接 u_ℓ 和 u_r 的解 $\varphi(\xi)$ 存在當且僅當 $u_\ell > u_r$. 在這種情形下, $\varphi(\xi)$ 是連接 u_ℓ 和 u_r 的唯一激波 profile, 而且 $\varphi(\xi)$ 是單調下降的。若 $\varepsilon \to 0, \varphi(\xi)$ 將收斂到方程 (3) 的激波解, 故 (3) 的激波熵條件是 $u_\ell > u_r$ 或

$$f'(u_\ell) > s > f'(u_r). \tag{10}$$

簡單的推廣可以知道條件 (10) 對所有凸流函數 $f(u)$ 對應的激波都適用。將這個熵條件推廣到方程組, 就是以下的 Lax 熵條件。

假設 (u_ℓ, u_r) 是一個 p 族激波, 其中 u_ℓ 和 u_r 分別代表左、右狀態, 對應的激波速度記爲 $\sigma(u_\ell, u_r)$, 則 (u_ℓ, u_r) 被稱爲一個 admissible 激波, 如果有

$$\lambda_p(u_r) < \sigma(u_\ell, u_r) < \lambda_{p+1}(u_r),$$

和

$$\lambda_{p-1}(u_e) < \sigma(u_\ell, u_r) < \lambda_p(u_\ell).$$

若我們考慮激波 (u_ℓ, u_r) 附近的一個鄰域, 可以看到共有 $n+1$ 條特徵進入激波及

$n-1$ 條特徵離開。換言之, 激波是一個壓縮波。從 Rankine-Hugoniot 條件我們也可看到, 給定一個左狀態及激波速度這 $n+1$ 個量, 右狀態可以在左狀態的一個小鄰域中唯一確定。對於其它的物理模型, 如燃燒理論、電磁動力學等, 會出現 undercompressive 或 overcompressive 的激波, 在此我們不作討論。

對於單個守恆律方程, Kruskov 提出了以下的熵條件, 即 $u(x,t) \in L_\infty$ 是方程 (1) 的熵解, 如果

$$|u-c|_t+(\text{sign}(u-c)(f(u)-f(c)))_x \le 0,$$

在弱意義下成立, 這裡 $c \in \mathbb{R}$ 是任意常數。並且若初值滿足對所有 $k>0$,

$$\lim_{t\to 0}\int_{|x|\le k}|u(x,t)-u_0(x)|dx=0,$$

問題 (1) 的熵解是唯一的。對於其它的熵條件以及它們之間的關係, 我們在這裡不作討論, 有興趣的讀者可參考有關文獻。

對於 Burgers 方程 (3), 值得再作討論的是 Hopf-Cole 變換, 在這個變換下, 方程 (3) 可轉換成熱傳導方程, 從而方程 (3) 的解可以顯式地表達出來。Hopf-Cole 變換是設

$$\begin{aligned} u &\equiv -2\varepsilon\frac{\omega_x}{\omega}, \\ \omega_t &= \varepsilon\omega_{xx}. \end{aligned} \tag{11}$$

而對應的熱傳導方程 (11) 的初值是

$$\omega(x,0)=e^{-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x u(y,0)dy}.$$

所以 Burgers 方程的解可寫成

$$u(x,t)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-y}{t}e^{-\frac{U(x,t,y)}{2\varepsilon}}dy}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{U(x,t,y)}{2\varepsilon}}dy},$$

其中

$$U(x,t,y)=\frac{(x-y)^2}{2t}+\int_0^y u(z,0)dz.$$

從這個 Burgers 方程解的表達式, 容易得到 Burgers Kernel 即當初值爲一個常數 C 乘以 Dirac-delta 函數時方程的解。設

$$u(x,0)=C\delta(x).$$

對應的解可寫成

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{t}}\frac{(e^{\frac{c}{2\varepsilon}}-1)e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon t}}}{\sqrt{\pi}+(e^{\frac{c}{2\varepsilon}}-1)\int_{\frac{x}{\sqrt{4\varepsilon t}}}^{\infty}e^{-y^2dy}}.$$

這個 Burgers Kernel 其實代表了當初值滿足

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)dx=C,$$

時 Burgers 方程解在大時間的性態。可以看到, 當 $t\to\infty$ 時, 仍起作用的量是初值也是解的總質量。對於單個具有凸流函數 $f(u)$ 的帶粘性守恆律方程

$$u_t+f(u)_x=\varepsilon u_{xx}.$$

由於解的光滑性, 在方程兩邊乘上 f'' 後, 可將方程寫成

$$(f')_t+(\frac{(f')^2}{2})_x=\varepsilon(f')_{xx}-\varepsilon f'''u_x^2.$$

所以除了高階項 $-f'''u_x^2$ 外, f' 滿足 Burgers 方程。可以證明, 對應於 Burgers 方程的解的大時間性態對具有凸流函數的單個守恆律也成立。而 Burgers 方程的解可以用顯式表達這一性質也被應用於研究帶粘性方程組的解的性質和邊界效應等。

解的大時間性態是研究守恆律組的一個重要問題。關於這個問題, 對單個雙曲型守恆

律或雙曲型守恆律組當每條特徵是眞正非線性或線性退化的情形下, 至今的研究已給出了這個問題的一個很好的理解, 即解當 $t \to \infty$ 時會趨於 N-wave, 或 N-wave 和 travelling wave 的疊加。但當特徵不是眞正非線性或線性退化, 即 $r \cdot \nabla\lambda$ 會變號時, 這個問題關於方程組仍未能解決。下面我們用單個方程對這問題作一解釋。爲簡單起見, 我們假設

$$f(0) = f'(0) = 0,$$

和初值 $u_0(x)$ 有緊支集 $[S_-, S_+]$, $|S_\pm| < \infty$, 及有界。對於解的大時間性態, 以下兩個量十分重要。即

$$q = \max_y \int_y^\infty u_0(x)dx$$

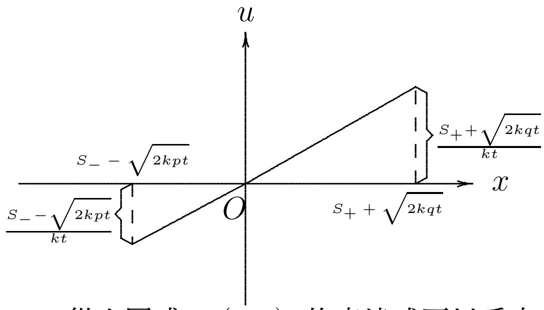
和

$$-p = \min_y \int_{-\infty}^y u_0(x)dx.$$

若 $u(x,t)$ 是方程 (1) 具有以上初值的熵解, 則通過考慮最左和最右兩條特徵線, 及充分利用 $f(u)$ 的凸性, 可以証明 $u(x,t)$ 當 $t \to \infty$ 時趨於 N-wave。而 N-wave 的定義主要依賴於 p 和 q, 其表達式爲

$$n(x,t) = \begin{cases} \frac{x}{kt}, & \text{當 } S_- - \sqrt{2kpt^{\frac{1}{2}}} < x \\ & \qquad < S_+ + \sqrt{2kqt^{\frac{1}{2}}}, \\ 0, & \text{當 } x \le S_- - \sqrt{2kpt^{\frac{1}{2}}} \\ & \quad \text{或 } x \ge S_+ + \sqrt{2kqt^{\frac{1}{2}}}, \end{cases}$$

其中 $k = f''(0)$. 對一個給定的時間 $t > 0$, $n(x,t)$ 如下圖。



從上圖或 $n(x,t)$ 的表達式可以看出, $n(x,t)$ 是由兩個激波和它們之間的一個稀疏波構成, 而激波 decay 的速度是 $t^{\frac{-1}{2}}$。總的來說, Lax 證明了以下的結果, 當 $t \to \infty$ 時, 有

$$\|u(x,t) - n(x,t)\|_{L_1(\mathbb{R})} = 0(t^{\frac{-1}{2}}).$$

値得注意的是當初值是周期函數時, 解會收斂到周期解的平均値, 其收斂的速度是 t^{-1}.

對於方程組的大時間性態, 問題就變得複雜好多, 在這裡不能作詳細論述。

如前所述, 弱解的存在性也是一個重要的問題, 對此現有的方法是 Glimm 格式, Compensated Compactness 及其它的一些差分格式。其中 Compensated Compactness 只能應用於單個守恆律和 2×2 方程組, 並且由於對解的正則性所知不多, 故用這方法只能得到較少解的性質。而另一主要的方法是 Glimm 格式和與它本質一致的 Wave front tracking 方法, 由於得到的是 BV 解, 即對解的全變差有一致估計, 故能知道較多解的局部和大時間的性質。下面我們對單個守恆律用 Lax-Friedrichs 格式來指出其熵解的存在性。由於單個守恆律的特性, 這樣構造的近似解序列有一致的全變差

的上界。但即使對 2×2 方程組, 雖然 Lax-Friedrichs 格式的近似解能通過 Compensated Compactness 方法證明其收斂性, 如何證明這一格式得到的近似序列有一致的全變差仍是一個 open 的問題, 其主要的困難關係到 Vanishing viscosity 這一大問題。

下面我們簡單表述一下 Oleinik 早期對解存在性的一些工作。對於單個守恆律 (1), Lax-Friedrichs 格式是

$$\frac{u_n^{k+1}-\frac{u_{n+1}^k+u_{n-1}^k}{2}}{h}+\frac{f(u_{n+1}^k)-f(u_{n-1}^k)}{2\ell}=0, \tag{12}$$

其中我們將 $x-t$ 的上半平面分成許多小格, $t=kh, x=n\ell, n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, $k=0,1,2,\ldots$, 而 $h=\Delta t>0$, $\ell=\Delta x>0$ 分別是時間和空間的 grid size 。若令

$$A=\max_{|u|\le M}|f'(u)|,$$

其中 $M=\|u_0\|_{L\infty}$. 格式 (12) 必須滿足下面的穩定性條件,

$$Ah\le \ell.$$

Lax-Friedrichs 格式只與三點的值有關。利用中值定理,(12) 可寫成

$$u_n^{k+1}=(\frac{1}{2}+\frac{h}{2\ell}f'(\theta_n^k))u_{n-1}^k+(\frac{1}{2}-\frac{h}{2\ell}f'(\theta_n^k))u_{n+1}^k.$$

所以 u 在格點 $(n,k+1)$ 的值是 u 在格點 $(n-1,k)$ 和 $(n+1,k)$ 的帶權平均。由穩定性條件, 我們知道每個權都是非負數。故容易從這個表達式直接導出單個守恆律的最大值原理, 即 $\|u(x,t)\|_{L\infty}\le \|u(x,0)\|_{L\infty}$. 若假設初值的全變差有界, 由於這個表達式對各個量有簡單的關係, 用它構造出來的近似解序列的全變差和熵條件也能直接得到。故我們能夠證明有一子序列收斂於方程的熵解。

最後我們討論一下弱熵解的穩定性這一重要問題。由於守恆律組有 $\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx$ 守恆這一特性, 可推知 L_1 模是這類方程組的本質量度。對於單個方程, L_1 模的穩定性是熵條件的一個直接推論。具體地說, 對方程 (1) 的兩個不同初值的解 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$, 我們有

$$\|u(x,t)-v(x,t)\|_{L1}\le\|u_0(x)-v_0(x)\|_{L1},\quad t>0.$$

事實上, $\|u(x,t)-v(x,t)\|_{L1}$ 是不變的, 除非在時間 t 某個解如 $u(x,t)$ 中有一個激波 (u_ℓ,u_r) 位於 x 處, 而這一激波被另一個解 $v(x,t)$ 穿過, 即 $v(x,t)$ 在 u_ℓ 和 u_r 之間。在這種情形下, $\frac{d}{dt}\|u(x,t)-v(x,t)\|_{L1}$ 在 x 處的 decay 速度是

$$\begin{aligned}&|u_\ell-v(x,t)||\sigma(u_\ell,u_r)-\sigma(u_\ell,v(x,t))|\\&=|u_r-v(x,t)|\,|\sigma(u_\ell,u_r)-\sigma(u_r,v(x,t))|.\end{aligned}$$

所以對單個守恆律, L_1模是 Contrative 的。

對於方程組, 因爲非線性和不同族的相互 Coupling, L_1 模的穩定性問題就變得比較複雜。爲方便起見, 我們可以首先看其中一個解是常數的情形, 亦即常數解的 L_1 模的穩定性問題。由於稀疏波線與激波線有兩階接觸, 即從一點發出的同族激波與稀疏波線在該點的一階和二階導數相同, 故激波與相對應的同強度稀疏波的差別是激波強度的三次冪。而對於單個守恆律, 若流函數是凸時, 傳

統熵, 即 u 的任意一個凸函數 $\eta(u)$ 都會給出以下的估計

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}\eta(u(x,t))dx=-c\Sigma_{\alpha}|\alpha|^3,$$

這裡 $c>0$ 是一個只依賴於 $f(u)$ 的常數, 上面方程的右邊是對 $u(x,t)$ 中所有的激波求和。故同一族中的非線性的特徵可以用傳統熵來刻劃, 而不同族的互相 Coupling 則可通過另外一個用 L_1 模和全變差組合成的非線性泛函來刻劃。因此常狀態的 L_1 模的穩定性可以利用以上兩個泛函通過構造一個與 L_1模等價的非增泛函得出。

但由於兩個解之間的 L_p 模 $(p>1)$ 不具有 decay 的性質, 故當考慮兩個解之間的 L_1 模的變化時, 傳統的熵將不再適合, 對此我們引入了一個廣義熵, 其主要構成是兩個解中波的強度和兩個解之間的 L_1 距離, 這個廣義熵充分地反應了同一特徵的非線性變化的性質。從而兩個解的 L_1 距離的穩定性可以利用這個廣義熵和以上提到的用來刻劃不同族的 Coupling 的泛函, 通過構造一個非增的非線性泛函得到。在通過構造泛函來證明 L_1 模穩定性前, Alberto Bressan 等引進了另外一個方法, 他們是通過估計兩個非常接近的解的變化及利用一個 homotopic 的思想來證明 L_1 模的穩定性。事實上, 以上的研究都是基於各特徵是眞正非線線或線性退化的假設下得到, 對於一般的情形, L_1 模穩定性至今仍是一個 open 的問題。應該指出, L_1 模穩定性的研究加上對解空間一些結構上的描述, 便得出方程組熵解的唯一性。

以上我們簡單地討論了守恆律組的弱熵解的定義、存在性、穩定性和大時間性態。可以看到雖然這個領域的發展已是十分迅速, 但仍有許多富有挑戰性的 open 問題。尤其是多維方程組的問題更是重要, 而少有進展, 參看 Courant-Friedrichs。

希望以上的論述能給讀者對這個領域一個初步的印象。以下我們列出一些文獻供讀者參考, 由於所列文獻不可能詳盡, 有興趣的讀者請參考文獻中所引的文章和其它文獻。

參考資料

1. R. Courant and K. Friedrichs, Supersonic flow and shock waves, Wiley-lnterscience: New York, 1948.
2. S. Godunov, An interesting class of quasilinear systems. Dok. Akad. Nauk., SSSR, 139(1961) 521-523. English transl. in Sov. Math., 2(1961), 947-949.
3. S. Kruskov, First-order guasilinear equations with sereral space variables, Mat. Sb., 123(1970) 228-255, English transl. in Math. USSR Sb., 10(1970), 217-273.
4. P. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws, II. Comm. Pure Appl. Math., 10(1957), 537-566.
5. J. Glimm, Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. Comm. Pure Appl. Math., 18(1965), 95-105.
6. J. Glimm and P. Lax, Decay of solutions of systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, Amer., Math. Soc. Memoir., No.101, A.M.S.:Providence, 1970.

7. O. Oleinik, Discontinuous solutions of nonlinear differential equations. Usp. Mat. Nauk. (N S.), 12, (1957) 3-73; English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 26, 95-172.
8. R.J. DiPerna, Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamies, Comm. Math. Phys., 91, 1-30, 1983.
9. T.-P. Liu, Admissible solutions of hyperbolic conservation laws, Amer. Math. Soc. Memoir, no.240, Providence, 1981.
10. A. Bressan, G. Crasta & B. Piccoli, Well posedness of Cauchy problem for nxn systems of conservation laws, Amer. Math. Soc. Memoir, to appear.
11. T. P. Liu and T. Yang, Well-posedness theory for hyperbolic conservation laws, Comm. Pure Appl. Math., 52 (1999), no.12, 1553-1586.

—本文作者任教於香港城市大學數學系—