偏微分方程的相似解

許健明

當我們遇到一個偏微分方程時, 第一步是去找方程的特別解, 去明白方程的特性, 找特別的解的方法有很多, 包括 separation of variables, 相似解等, 在這一篇文章中我們將討論一個找相似解的方法。

考慮熱方程:

$$u_t = \triangle u \quad 在\mathbb{R}^n \times (0, \infty) \tag{1}$$

其中

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

$n \in Z^+$, 爲簡化起見, 令 $n = 1$, 則 (1) 簡化爲

$$u_t = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 在 \quad \mathbb{R} \times (0, \infty) \tag{2}$$

要是

$$v(x, t) = \alpha u(\beta x, \gamma t)$$

也是 (2) 的解, 其中 $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ 爲常數, 則

$$v_t = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Longrightarrow \alpha\gamma u_{t'}(\beta x, \gamma t) = \alpha\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} \tag{3}$$

其中 $t' = \gamma t, x' = \beta x$, 從 (2) 和 (3) 我們有

$$\gamma = \beta^2$$

$$所以 \qquad v(x, t) = \alpha u(\beta x, \beta^2 t) \tag{4}$$

我們希望能把 $v(x, t)$ 寫成一個變量的函數, 所以我們令

$$\beta^2 t = 1 \Longleftrightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{t}} \tag{5}$$

另外, 我們希望有 mass 守恆, 所以令

$$\begin{aligned}
&\int v(x, t)dx = \int u(x, t)dx, \ \forall t > 0 \\
\Longrightarrow\ & \alpha \int u(\beta x, \beta^2 t)dx \\
&\qquad = \int u(x, t)dx, \ \forall t > 0 \\
\Longrightarrow\ & \frac{\alpha}{\beta} \int u(y, \beta^2 t)dy \\
&\qquad = \int u(x, t)dx, \ \forall t > 0
\end{aligned} \tag{5$'$}$$

另外 Mass 守恆 $\Longrightarrow M = \int u(x, t)dx$ 爲一跟 $t > 0$ 無關的常數

$$所以\ (5)' \Longrightarrow \alpha = \beta \tag{6}$$

$$(4),(5),(6) \Longrightarrow v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\mu(\frac{x}{\sqrt{t}},1)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{t}}f(\frac{x}{\sqrt{t}}) \qquad (7)$$

其中 $f(y)=u(y,1)$。

代 (7) 進去 (2), 我們有

$$\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}f''+\frac{x}{2t^2}f'+\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}f=0$$
$$\Longrightarrow f''+\frac{y}{2}f'+\frac{1}{2}f=0$$
$$\Longrightarrow f'(y)+\frac{y}{2}f(y)=\text{constant}(=A \text{ say})$$

其中

$$f''(y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y), f'(y)=\frac{\partial f}{\partial y}(y)$$
$$\Longrightarrow f(y)=Ae^{-\frac{y^2}{4}}\int^y e^{\frac{s^2}{4}}ds+Be^{-\frac{y^2}{4}}$$

B 爲一常數。爲簡化起見令 $A=0$, 則

$$f(y)=Be^{-\frac{y^2}{4}} \qquad (8)$$

代進 (7),

$$v(x,t)=\frac{B}{\sqrt{t}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

所以 $v_1(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ 爲方程 (2) 的一個相似解, 因

$$w(x,t)=v_1(x_1,t)v_1(x_2,t)\cdots v_1(x_n,t)$$

(其中 $x=(x_1,\ldots,x_n)$) 滿足 (1), 故

$$w(x,t)=\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{4t}}$$

爲 (1) 的一個相似解。同樣的方法也可應用在找其他的 evolution 方程的相似解。

參考文獻

1. F. John, Partial Differential Equations, (4th ed.) Springer-Verlay.

—本文作者任職於中央研究院數學研究所—