橢圓偏微分方程漫談

陳俊全

一. 橢圓方程

偏微分方程粗分爲橢圓、拋物及雙曲三類型, 它們是怎麼分的? 這麼分又有什麼好處? 首先, 考慮最簡單的情況, 假設函數 $u = u(x_1, x_2)$ 只有兩個變數, 並且滿足一階方程 (即最高次微分只有一次)

$$au_{x_1} + bu_{x_2} = 0, \tag{1.1}$$

其中 a, b 爲常數, $u_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}$, $u_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}$。通常解這類方程的方法是把左邊的微分組合解釋爲沿 (a, b) 方向的"方向微分", 即引進 s 及考慮 $u(x_1 + sa, x_2 + sb)$, 則 u 沿 (a, b) 方向的變化率爲

$$\frac{d}{ds}u(x_1 + sa, x_2 + sb) = au_{x_1} + bu_{x_2} = 0.$$

由此, 可推得在每一條直線 $\{(x_1 + as,\ x_2 + bs) : -\infty < s < \infty\}$ 上, u 都是常數。反之, 若 u 在這些直線上是常數, 則必定滿足方程 (1.1)。

現在, 考慮難一點的二階方程 (即最高次微分爲兩次)

$$au_{x_1x_1} + bu_{x_1x_2} + cu_{x_2x_2} = 0, \tag{1.2}$$

其中 a, b, c 爲常數, $u_{x_1x_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}$, $u_{x_1x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots$。一個解 (1.2) 的自然想法是把二階偏微分的組合分解成兩個一階微分的作用。如果二次方程

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{1.3}$$

有兩實根 λ_1 及 λ_2, 則可將 (1.2) 改寫成

$$\begin{aligned} 0 &= au_{x_1x_1} + bu_{x_1x_2} + cu_{x_2x_2} \\ &= a\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(u_{x_1} - \lambda_1 u_{x_2}) \right. \\ &\qquad \left. -\lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2}(u_{x_1} - \lambda_1 u_{x_2})\right] \\ &\equiv a(\frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2}) \\ &\qquad \cdot(\frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2})u. \end{aligned}$$

上式最後一項是以濃縮的方式表示微分作用。如此一來, (1.2) 左邊可解釋爲沿 $(1, -\lambda_1)$ 方向作微分, 再沿 $(1, -\lambda_2)$ 方向作微分。分兩次仿照解 (1.1) 的方法, 即可找出 (1.2) 的解。

當 λ_1, λ_2 非實數時, 我們必須用其它方法或在複數系中考慮方程 (1.2)。此時, 解的性質表現得非常不同。爲此原故, 根據 λ_1, λ_2 的不同可將方程 (1.2) 分成三類型 (在此假設 a, b, c 爲實數):

(1) 當 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 爲相異實根, 即 $b^2-4ab>0$, 稱方程爲雙曲型;
(2) 當 $\lambda_1=\lambda_2$ 爲實重根, 即 $b^2-4ab=0$, 稱方程爲抛物型;
(3) 當 λ_1 及 λ_2 非實數時, 即 $b^2-4ab<0$, 則稱方程爲橢圓型;

對更一般二階線性方程

$$au_{x_1x_1}+bu_{x_1x_2}+cu_{x_2x_2}+du_{x_1}$$
$$+eu_{x_2}+f=0,$$

它的分類只根據最高次微分項的係數 a,b,c 依同樣方法分類。三類型方程的名稱由來和二次曲線

$$ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2+dx_1+ex_2+f=0.$$

是一致的。$b^2-4ac>0,=0,<0$ 對應的二次曲線恰爲雙曲、抛物, 和橢圓。它們的代表方程分別爲 $x_2^2-x_1^2=1$, $x_2-x_1^2=0$ 及 $x_1^2+x_2^2=1$。若不考慮常數項部份, 相應的代表方程分別是

$$\text{波方程(雙曲)}\ u_{x_2x_2}-u_{x_1x_1}=0$$
$$\text{熱方程(抛物)}\ u_{x_2}-u_{x_1x_1}=0$$
$$\text{Laplace方程 (橢圓)}\ u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}=0.$$

關於這三個方程進一步性質, 請參看本期「劉太平」的文章。

當函數的變數個數增加或方程微分次數增高時, 雖然上述三種分類再也不能涵蓋所有情形, 但許多重要的例子仍然可歸於這些分類當中。以 Laplace 方程而言, 在 n 維空間中的自然推廣是

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\cdots+u_{x_nx_n}=0.$$

習慣上, 我們以 $\triangle$ 代表 $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ 這個運算, 稱之爲 Laplace 算子, 並將方程簡寫作

$$\triangle u=0.$$

對於一般 n 變數二階線性方程

$$\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{1\le i\le n} b_iu_{x_i}+cu=f \tag{1.4}$$

同樣的, 它的分類以最高次微分的係數 a_{ij} 作依據。在一個合理的分類當中, 方程的類型不應該隨座標變換而更動。當 $\sum a_{ij}u_{x_ix_j}$ 可經座標變換而化成 $\triangle u$ 時, 便稱 (1.4) 爲橢圓型方程。它的充分必要條件爲: 存在 $\lambda>0$ 使

$$\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \lambda \sum_{1\le i\le n} \xi_i^2 \tag{1.5}$$

對所有 $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ 都成立, 即矩陣 $(a_{ij})_{n\times n}$ 是正定的。

當 (1.4) 中的係數和 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ 有關時, 橢圓型的定義是在每一點 x 上, (1.5) 都成立。對於更高階線性方程式, 從經驗上來看, 橢圓型的定義應該要滿足類似 (1.5) 的條件。因此, 我們把最高次微分的項拿出來, 每一個偏微分運算 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 都用 ξ_i 取代, 並把 u 去掉, 這樣得到的數值若對任何 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)\neq(0,\ldots,0),\in\mathbb{R}^n$, 都不會是零, 便稱之爲橢圓型。對於非線性方程式, 我們利用泰勒展開式, 以線性方程作逼近, 再以線性方程的分類當作原方程的分類。在下面的文章裡, 我們會有較詳盡的討論。

在橢圓方程裡面, Laplace 方程是最單純的一個, 也是其它同類方程的根源。我們先來看看爲什麼它這麼重要。

二. Laplace 算子

對 $\Delta u = 0$ 我們可以做一些初步觀察。首先, 常數是一個解, 線性函數也是; 解和解相加, 或解乘一個倍數, 都還是解。我們也可以試著找一些特解, 例如假設 u 在 $x_2, \ldots, x_n$ 方向上爲常數, 或假設 u 爲多項式等。通常, 找一些有對稱性的特殊解, 對了解方程有很大幫助 (進一步的討論, 可參考本期「許健明」的文章)。比如, 考慮對原點對稱的解, 即 u 可寫成 $u = \psi(r)$, 其中 $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$。經由計算, 可得

$$0 = \Delta u = \frac{d^2}{dr^2}\psi(r) + \frac{n-1}{r}\frac{d}{dr}\psi(r).$$

兩邊同乘 r^{n-1} 得到

$$0 = r^{n-1}\Delta u = \frac{d}{dr}(r^{n-1}\frac{d}{dr}\psi).$$

因此

$$r^{n-1}\frac{d}{dr}\psi = C,$$

其中 C 爲一個常數。將 r^{n-1} 移至右邊, 再積分得

$$\begin{aligned}\psi(r) &= \int \frac{C}{r^{n-1}}dr \\ &= \begin{cases} C\ln r + C_1, \\ -\frac{C}{n-2}r^{-n+2} + C_1,\ n \geq 3, \end{cases}\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 C_1 爲另一常數。由於已知 C_1 本身是解, (2.1) 中令 $C_1 = 0, C = 1$ 得到一個代表解

$$\psi_0(r) = \begin{cases} \ln\ r, & n = 2 \\ -\frac{r^{-n+2}}{n-2}, & n \geq 3. \end{cases} \tag{2.2}$$

如果將原點平移至 P 點, 則 $\psi_0(|x-P|)$ 是滿足 Laplace 方程且對 P 點對稱的解。然而不幸的是, ψ_0 這種解在原點 $r = 0$ 時, 並沒有定義, 因此似乎不是一個好的有用的例子。

事實上, 大自然中經常有這種“不好”的函數。考慮眞空中 N 個帶電粒子位於 p_1, $\ldots$, p_N 的地方, 其電荷分別是 $q_1, \ldots, q_N$. 根據庫倫定律, 在 x 處的電場是

$$E(x) = \sum_{k=1}^{N} q_k \frac{x - p_k}{|x - p_k|^3},$$

在此假設庫倫常數爲1。相應的電位能可經積分得到

$$V(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{-q_k}{|x - p_k|}. \tag{2.3}$$

其中 $\frac{1}{|x-P_k|}$ 恰好是 $n = 3$ 時, ψ_0 的形式。因此我們馬上可以推論, 當 $x \neq p_1, \ldots, p_N$ 時

$$\Delta V(x) = 0, \tag{2.4}$$

即在沒有電荷的地方, 電位能 V 滿足 Laplace 方程。

當空間中佈滿電荷且在 x 點的電荷密度爲 $\rho(x)$ 時, 我們可將空間切成一塊塊方格, 並假設每一方格中, 電荷皆集中在中心點上。如此一來, 電位能便能用 (2.3) 的形式逼近。當格子切割越來越小時, 可得到位能的積分表示

$$V(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x - y|}dy. \tag{2.5}$$

由庫倫力的二次倒數規則, 可以推出電學的 Gauss 定律

$$\begin{aligned}-\int_{\partial\Omega} \nabla V \cdot \nu d\sigma &= 4\pi \cdot \Omega\text{中的電荷量} \\ &= 4\pi \int_{\Omega} \rho(y)dy,\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 $\partial\Omega$ 表 Ω 的邊界, ν 表 $\partial\Omega$ 上向外的單位法向量, $d\sigma$ 表示 $\partial\Omega$ 上的積分單元, ∇V 代表 V 的梯度。另一方面, 由 divergence 定理, 有

$$\int_{\partial\Omega}\nabla V\cdot\nu d\sigma=\int_{\Omega}\mathrm{div}\nabla V dy=\int_{\Omega}\Delta V dy. \tag{2.7}$$

上式中, 對一向量函數 $\vec{g}=(g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots,\ g_n(x))$, 其散度定爲

$$\mathrm{div}\vec{g}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial x_j}.$$

因此按定義有 div $\nabla V=\Delta V$。令 $|\Omega|$ 表 Ω 的體積, 並把 (2.6) 和 (2.7) 合起來, 得

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\Delta V dy=-\frac{4\pi}{|\Omega|}\int_{\Omega}\rho dy.$$

如果讓 Ω 包含 x, 並縮小到一點, 則上式取極限得

$$\Delta V(x)=-4\pi\rho(x). \tag{2.8}$$

此式描述了 Laplace 算子和 $\rho(x)$ 的關係, 是 (2.4) 的推廣。事實上, 對 (2.5) 直接取 Laplace 算子, 經過較小心的計算, 也可得到 (2.8)。

由於重力和庫倫力都遵循二次倒數的規則, (2.5) 和 (2.8) 的關係, 對重力位能也是成立的。

另一個跟 Laplace 算子有密切關係的是擴散作用。假定 u 代表溫度或化學物質的濃度。物質的溫度或濃度是由高處向低處流動。由於梯度 ∇u 代表 u 增加的方向, 一個合理的假定是 u 流動的方向及大小是 $-\nabla u$ 的倍數。爲方便起見, 假設正好是一倍。由於散度 (divergence) 的物理意義代表物質在一點的淨出入, 我們有

$$\begin{aligned}&x\text{ 點的擴散作用}\\&=u\text{ 在 }x\text{ 點的淨流進流出}\\&=\mathrm{div}(-\nabla u)=-\Delta u.\end{aligned}$$

我們也可以直接估算物質在 x 點的進出。令 $\partial B_r(x)=\{y\in\mathbb{R}^3:|y-x|=r\}$ 爲球表面。當 r 很小時, x 外圍的溫度或濃度可用 u 在 $\partial B_r(x)$ 上的平均值來代表。在 x 點擴散作用的方向和此平均值相對於 $u(x)$ 的大小有關, 合理的假設是

$$\text{擴散作用}\fallingdotseq c\Big(\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B_r(x)}u(y)d\sigma-u(x)\Big) \tag{2.9}$$

其中 c 爲適當比例常數。在 x 附近, 將 u 作泰勒式展開

$$\begin{aligned}u(y)=u(x)&+\sum_j\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)(y_j-x_j)\\&+\frac{1}{2}\sum_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_j}(y_j-x_j)^2\\&+\sum_{i\neq j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x)(y_i-x_i)(y_j-x_j)\\&+o(|y-x|^2).\end{aligned}$$

將此展式代入 u 的平均值, 並利用 y_i-x_i 及 (y_i-x_i) (y_j-x_j), $i\neq j$ 爲奇函數, 其在 $\partial B_r(x)$ 上的積分爲零, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B_r(x)}u(y)d\sigma\\&=u(x)\\&\quad+\frac{1}{4\pi r^2}\sum_{j=1}^{3}u_{x_jx_j}(x)\int_{\partial B_r(x)}\frac{(y_j-x_j)^2}{2}d\sigma\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial Br(x)} o(r^2)d\sigma\\
&=u(x)+\frac{1}{24\pi r^2}\sum_j 4\pi r^4 u_{x_jx_j}+o(r^2)\\
&=u(x)+\frac{1}{6}r^2\Delta u(x)+o(r^2).
\end{aligned}
$$

將此計算代入 (2.9) 中, 令 $r \to 0$, 爲了不讓右邊的值消失, 可取 $C=\frac{6}{r^2}$, 則得到

$$\text{擴散作用} = \Delta u(x). \tag{2.10}$$

由於當 u 在 $\partial B_r(x)$ 上的平均值小於 x 點值時, 代表物質從 x 向外擴散, 因此 $\Delta u < 0$ 代表向外擴散, 同樣道理, $\Delta u > 0$ 則代表向內擴散。

如果考慮 u 如何隨著時間變動, 可假設 $u=u(x,t)$ 表示 x 位置, t 時刻的溫度, 則熱傳導的基本模型是: 溫度的增加正比於該點擴散進來的熱量, 即

$$u_t = c\Delta u,$$

其中 c 爲常數, 此即熱方程。當 u 代表化學物質濃度時, 同樣的方程式也成立。在實際的情況裡, 除了擴散作用外還有化學反應的發生, 此反應會影響物質的溫度或濃度, 而反應的大小往往又和 u 本身的大小有關。因此熱方程可再加上一個反應項 $f(u)$ 成爲

$$u_t = c\Delta u + f(u),$$

此即所謂反應擴散方程 (請參見本期羅主斌的文章)。它的不同形式被拿來講述生態上生物的消長; 斑馬、豹、蜥蜴身上的花紋; 神經軸上的脈衝; 以及多種化學反應。擴散及反應兩機制的交互作用, 產生多彩多姿意想不到的現象。

Laplace 算子在各科學領域中, 似乎隨手可見。由於擴散作用是布朗運動的巨觀表現, Laplace 算子在統計力學中佔有重要地位。在其它如量子力學, 流體力學, 材料科學當中, 也是不可或缺的部份。甚至在視覺影響處理, 神經網路的領域, 都有它的蹤跡。回到數學領域來, 也有同樣的情形。在複變函數的領域中, 一個解析函數的實部及虛部都滿足 Laplace 方程。在微分幾何的領域當中, 曲率的表示及估計都一再用到 Laplace 算子, 而從研究流形上調和函數 (即滿足 Laplace 方程之解) 及調和映射 (某種調和函數的推廣), 可以獲得許多分析、拓樸、及代數結構的資料。在分析領域, 研究 Laplace 算子相關的性質已發展成一門 potential theory。在解“不好”的偏微分方程時, 我們往往會加入 Laplace 算子以使方程變得穩定。由於 Laplace 算子是布朗運動的巨觀表現, 它和機率理論有非常自然的內在關聯。我們可以說上天賜予我們重要的東西如 $\pi, e, \sqrt{-1}\ldots$ 等不是那麼多, 而 Laplace 算子就是其中的一項。

三. Dirichlet 問題

形如 (2.8) 的方程, 稱作 Poisson 方程。假設我們在 $\mathbb{R}^n$ 中的區域 Ω 上考慮這樣的方程, 爲了得到少數或唯一的解, 需要另加限制條件在 $\partial\Omega$ 上。常見的有 Dirichlet 問題, 即求下列方程之解

$$\begin{cases}\Delta u = f(x) \text{ in } \Omega\\ u \quad = g(x) \text{ on } \partial\Omega.\end{cases} \tag{3.1}$$

如果把 u 想成溫度, $f(x)$ 取成零, (3.1) 代表的是邊界溫度控制在 $g(x)$ 的大小上, 而讓 u 在 Ω 內部達到均衡 (即擴散的淨作用為零)。若把邊界 $\partial\Omega$ 上的條件改為

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \;= 0 \text{ on } \Omega, \end{cases}$$

其中 ν 代表 $\partial\Omega$ 上向外的法向量, 則稱之為 Poisson 方程的 Neumann 問題。它代表邊界上內外溫度的變化為零, 因此沒有熱的進出。我們也可以在邊界上放其它限制條件, 有時候問題會變得很難或沒有解。在以下的討論裡, 為簡單起見, 只考慮 Dirichlet 問題 (3.1)。

為了研究 Δu 的性質, Green 將它乘上一個函數 v, 並做二次分部積分而得到

$$\begin{aligned} \int_\Omega v\Delta u dy &= \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}d\sigma - \int_\Omega \sum v_{x_j}u_{x_j}dy \\ &= \int_{\partial\Omega}(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})d\sigma \\ &\quad + \int_\Omega u\Delta v dy. \end{aligned} \tag{3.2}$$

對固定的 $p \in \Omega$, Green 令 $v(y) = \psi_0(|y-p|)$, 其中 ψ_0 為 (2.2) 中的函數。為使 (3.2) 有意義, 我們以 $\Omega \setminus B_r(p)$ 取代 Ω, 其中 $B_r(p) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-p| < r\}$ 為包含於 Ω 中的小球。這時 ψ_0 中沒定義的點起了神奇的作用。令 $\partial B_r(p)$ 表示 $B_r(p)$ 的邊界, 再利用 $\Delta\psi_0$ 在 $y \neq p$ 時為零, 則 (3.2) 變成

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\setminus B_r(P)} v\Delta u &= \int_{\partial\Omega}(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}) \\ &\quad + \int_{\partial B_r(P)}(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

令 $r \to 0$ 及利用 $\frac{\partial v}{\partial \nu} = -\frac{d\psi_0}{dr}$, 有

$$\begin{aligned} &\int_{\partial B_r(P)} v\frac{\partial u}{\partial \nu} \longrightarrow 0 \text{ 及} \\ &\int_{\partial B_r(P)} u\frac{\partial v}{\partial \nu} \longrightarrow -\omega_n u(p), \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 ω_n 表 n 維單位球的表面積。因此, 當 $r \longrightarrow 0$ 時, 可利用 (3.3) 表示出 $u(p)$ 的值

$$\begin{aligned} u(p) = \frac{1}{\omega_n}\Big\{&\int_\Omega \psi_0(|y-p|)\Delta u(y)dy \\ &+ \int_{\partial\Omega}\Big(u(y)\frac{\partial\psi_0(|y-p|)}{\partial\nu} \\ &-\frac{\partial u(y)}{\partial\nu}\psi_0(|y-p|)\Big)d\sigma\Big\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

回到問題 (3.1), 則 (3.5) 右邊的 Δu 及在邊界上的 u 可用 f 及 g 取代。唯一不知道的是邊界上的 $\frac{\partial u}{\partial \nu}$。為了解決這個問題, 在 (3.3) 中重新取

$$v(y) = \psi_0(|y-P|) + w_p(y)$$

其中 w_p 是滿足邊界值問題

$$\begin{cases} \Delta w_p(y) = 0 \text{ in } \Omega \\ w_p(y) \quad = -\psi_0(|y-P|) \text{ on } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.6}$$

的解。為了符號上的方便, 我們定義 $G(y,p) = \frac{1}{w_n}v$。由於 w 以及 $\frac{\partial w}{\partial v}$ 都是有界的函數, (3.4) 仍然不受影響。利用 Δv 在 $y \neq p$ 時為零, 我們仍有 (3.3)。利用 v 在 $\partial\Omega$ 上為零, (3.3) 中關於 $\int_{\partial\Omega} v\frac{partialu}{\partial\nu}$ 的項將消失不見而得到

$$\begin{aligned} u(p) = &\int_\Omega G(y,p)f(y)dy \\ &+ \int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(y,p)}{\partial\nu}g(y)d\sigma, \end{aligned} \tag{3.7}$$

這便是著名的 Green 表現式, 而 $G(y,p)$ 就稱為 Green 函數。利用 Green 函數, 可以

將 Ω 內任一點 p 上的值 $u(p)$ 用 f 及 g 表示出來, Dirichlet 問題 (3.1) 也因而獲得解答。

在上述的推論當中有一個困難點, 即對一般區域 Ω, 由於需要解 (3.6) 這樣的問題, 很難知道 Green 函數是否存在。當 $\Omega = B_1 = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ 爲球時, 利用其幾何性質可以直接找出 Green 函數。

定理1: 假設 $\Omega = B_1$, 則

$$G(y,P) = \frac{1}{w_n}\Big[\psi_0(|y-p|) - |p|^{2-n}\psi_0 (|y-p^*|)\Big]$$

其中 $p^* = \frac{1}{|p|^2}p$.

事實上, 令 $w = -|p|^{2-n}\psi_0(|y-p^*|)$, 則由於 $p^* \notin B_1$, 有 $\Delta w = 0$。在邊界 ∂B_1 上, 利用球的幾何性質可驗證 $w = -\psi_0(|y-p|)$。因此 w 滿足 (3.6) 而按照定義 $G(y,p) = \frac{1}{w_n}(\psi_0 + w)$。由此可知定理1成立。由 (3.7) 及定理1立刻可以得到下面定理。

定理2: 假設 Ω 爲球, 則 Dirichlet 問題 (3.1) 可以解。

定理2可說是 Green 理論的重大勝利。當 Ω 非球時, Green 函數不一定能精確寫出, 但是我們仍能由 Green 表現式了解許多解 u 帶有的性質。

爲了解決一般區域 Ω 上的 Dirichlet 問題, 我們再看看 Laplace 方程還具備那些性質。由 (2.9) 及 (2.10), 當 $\Delta u = 0$ 時, 我們應該有

$$\frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} u(y)d\sigma = u(x),$$

其中 $|\partial B_r(x)|$ 表示球 $B_r(x)$ 的表面積。事實上, 我們有下列定理

均值定理: 令 Ω 表 $\mathbb{R}^n$ 中的開區域且 $B_r(x) \subset \Omega$。

(1) 若在Ω上 $\Delta u \geq 0$, 則

$$u(x) \leq \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} u(y)d\sigma \text{且}$$
$$u(x) \leq \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u(y)dy$$

(2) 若在Ω上 $\Delta u \leq 0$, 則

$$u(x) \geq \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} u(y)d\sigma \text{且}$$
$$u(x) \geq \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u(y)dy.$$

定理中, $|B_r(x)|$ 表示球 $B_r(x)$ 的體積。這個定理和 (2.9), (2.10) 的直覺解釋是相合的。它可以用 (3.7) 去證, 或經由下面的推導得到。假設 $\Delta u \geq 0$。令 $\rho = |y-x|$, $\omega = \frac{(y-x)}{\rho}$, 則由 divergence 定理有

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_{B_\rho(x)} \Delta u(y)dy &= \int_{\partial B_\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma \\
&= \int_{\partial B_\rho(x)} \frac{\partial u(x+\rho\omega)}{\partial \rho} d\sigma \\
&= \rho^{n-1}\int_{|\omega|=1} \frac{\partial u(x+\rho\omega)}{\partial \rho} d\omega \\
&= \rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial \rho}\int_{|\omega|=1} u(x+\rho\omega)d\omega \\
&= \rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{1}{|\partial B_\rho(x)|}\int_{\partial B_\rho(x)} ud\sigma\right].
\end{aligned}$$

因此, u 在 $\partial B_\rho(x)$ 上的平均值是遞增函數。特別地, 我們有

$$\begin{aligned}
u(x) &= \lim_{\rho\to 0^+}\frac{1}{|\partial B_\rho(x)|}\int_{\partial B_\rho(x)} ud\sigma \\
&\leq \frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} ud\sigma.
\end{aligned}$$

由此還可進一步得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)}u(y)dy\\&=\frac{1}{|B_r(x)|}\int_0^r|\partial B_\rho(x)|\frac{\int_{\partial B_\rho(x)}ud\sigma}{|\partial B_\rho(x)|}d\rho\\&\geq\frac{1}{|B_r(x)|}\int_0^r|\partial B_\rho(x)|u(x)d\rho=u(x).\end{aligned}$$

同樣的方法, 可以證明均值定理的第 (2) 部份。應用均值定理可以得到

極大值原理: 令 $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$, u 爲 Ω 上的連續函數。

(1) 若在 Ω 上 $\Delta u\geq 0$, 則 $u\leq\max\limits_{\partial\Omega}u$。

(2) 若在 Ω 上 $\Delta u\leq 0$, 則 $u\geq\max\limits_{\partial\Omega}u$。

由這個定理, 可以發現當 Δu $\geq$0 時, 最大值總是可以在邊界上找到; 當 $\Delta u\leq 0$, 則最小值可在邊界上找到。定理的證明如下: 假設 $\Delta u\geq 0$, 且有 $x_0\in\Omega$ 使 $u(x_0)=\max_\Omega u>\max_{\partial\Omega}u$。由均值定理, 在 x_0 附近的小球上有

$$\begin{aligned}u(x_0)&\leq\frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)}u(y)dy\\&\leq\frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)}u(x_0)dy=u(x_0).\end{aligned}$$

若在 $B_r(x_0)$ 上某些 $u(y)<u(x_0)$, 則第二個 "$\leq$" 中, "$<$" 號必會成立而得到矛盾。因此在 $B_r(x_0)$ 上, $u=u(x_0)$。現在, 再取 $x_1\in\partial B_r(x_0)$, 同樣的論證可得 u 在 x_1 附近的小球區域取值都是 $u(x_0)$。依此類推, u 取值 $u(x_0)$ 的區域可以擴充出去直到邊界 $\partial\Omega$ 上。但由假設 $\max_{\partial\Omega}u<u(x_0)$, 我們得到矛盾。同樣的論證, 可證明 $\Delta u\leq 0$ 的情形。極大值原理的一個馬上應用是解的唯一性。

唯一性定理: 假設 u,v 是 $\overline{\Omega}$ 上的連線函數, 在 Ω 上 $\Delta u=\Delta v$, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=v$, 則 $u=v$。

證明: 令 $w=u-v$, 則

$$\begin{cases}\Delta w=0 & \text{in }\Omega\\ w=0\text{ on }\partial\Omega.\end{cases}$$

由極大值原理, 有 $0=\min\limits_{\partial\Omega}w\leq w\leq\max\limits_{\partial\Omega}w=0$, 即 w 恆爲零。

從唯一性定理可以得到 Dirichlet 問題 (3.1) 的唯一性。極大值原理的另一個應用是

比較定理: 假設 v,u,w 爲 $\overline{\Omega}$ 上連續函數, 在 Ω 上 $\Delta v\geq 0$, $\Delta u=0$, $\Delta w\leq 0$, 且在 $\partial\Omega$ 上 $v\leq u\leq w$, 則在 Ω 上有 $v\leq u\leq w$。

證明: 令 $h=v-u$, 則在 Ω 上 $\Delta h=\Delta v-\Delta u\geq 0$ 且在 $\partial\Omega$ 上 $h=v-u\leq 0$。由極大值原理, 有 $v-u=h\leq\max\limits_{\partial\Omega}h\leq 0$。同理可證 $w-u\geq 0$。

在 Ω 上, 當 $\Delta u\geq 0$ 時, 我們稱 u 爲 subharmonic 函數, 當 $\Delta u=0$ 時, 稱之爲 harmonic 函數, 當 $\Delta u\leq 0$ 時, 則稱爲 subharmonic。當 u 只是連續而不一定二次可微時, 我們以均值定理 (1) 及 (2) 的不等式取代 Δu 的不等式。若在每一點 $x\in\Omega$ (1) 中的不等式對夠小的 r 都成立, 則稱 u 爲 subharmonic; 若 (2) 中不等式對夠小的 r 都成立, 則稱 supharmonic。至於 harmomic 的定義, 則是把不等號改成等號。當

u 是二次可微時, 利用類似從 (2.9) 到 (2.10) 的計算過程, 很容易看出新的 subharmonic, subharmonic 定義和原來的是一樣的。由於比較定理是由極大值原理證得, 極大值原理又只依賴均值定理。我們可以重新敍述廣義版本的比較定理。令 $\bar{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$。

廣義比較定理: 設 v, u, w 在 $\overline{\Omega}$ 連續且不一定二次可微, v 爲 subharmonic, u 爲 harmonic, w 爲 supharmonic, 且在 $\partial\Omega$ 上 $v \le u \le w$, 則在 Ω 上有 $v \le u \le w$。

較弱的 subharmonic 定義還有一個好處, 即

引理: 若 u, v 爲 subharmonic, 則 $\max(u, v)$ 也是 subharmonic。

證明: 令 $w = \max(u, v)$, 則對夠小的 $B_r(x) \subset \Omega$ 有

$$\begin{aligned}
w(x) &= \max(u(x), v(x)) \\
&\le \max\Big(\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u(y), \\
&\qquad \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} v(y)\Big) \\
&\le \max\Big(\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} w(y), \\
&\qquad \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} w(y)\Big) \\
&= \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} w(y),
\end{aligned}$$

即 w 也是 subharmonic。

由廣義比較定理知, 當邊界相同時, harmonic 函數是最大的 subharmonic 函數。利用這個想法及球上的存在性定理2, 我們可以解決 Dirichle 問題。

存在性定理: 假設 Ω 的邊界及 f 夠平且滑, 且 g 是連續函數, 則 Dirichlet 問題 (3.1) 有唯一解。

首先, 我們把 (3.1) 簡化一下。類似 (2.5) 及 (2.8) 的關係, 經由小心計算, 有

$$\Delta \int_\Omega \psi_0(|y-x|) f(y)dy = \omega_n f(x).$$

令 $u_0 = \frac{1}{w_n}\int \psi_0(|y-x|)f(y)dy$, $\tilde{u} = u - u_0$, $\tilde{g} = g - \Delta u_0$, 則 $\tilde{u}$ 滿足

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u} = 0 \text{ in } \Omega \\ \tilde{u} = \tilde{g} \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

因此只要能解 (3.8), 就可解出 (3.1)。

存在性定理的證明: 只需證明 (3.8) 有解即可。令 $S_{\tilde{g}} = \{v : v$ 是 subharmonic, 且在 $\partial\Omega$ 上 $v \le \tilde{g}\}$ 及 $v_0 =$ 常數 $= \max_{\partial\Omega}\tilde{g}$。由於 $\Delta v_0 = 0$ 且在 $\partial\Omega$ 上對 $v \in S_{\tilde{g}}$ 都有 $v_0 \ge v$, 從比較定理可知在 Ω 上 $v \le v_0$, 即 $S_{\tilde{g}}$ 有上界 v_0。利用 harmonic 函數是同邊界中最大 subharmonic 函數的想法, (3.8) 解的候選人應是 $u = \sup_{v\in S_{\tilde{g}}} v$。由引理知, subharmonic 函數取其大仍是 subharmonic, 因此 u 是 subharmonic。那麼 Δu 是否爲零呢? 對 $B_r(x) \subset \Omega$, 利用定理2, 可以找到解 h 滿足

$$\begin{cases} \Delta h = 0 \text{ in } B_r(x) \\ h = u \text{ on } \partial B_r(x). \end{cases}$$

由比較定理知在 $B_r(x)$ 上 $u \le h$。事實上, 我們可證在 $B_r(x)$ 上, $u = h$。若非, 則有 $z \in B_r(x)$ 且 $u(z) < h(z)$。

令

$$w(y) = \begin{cases} u(y),\ y \notin B_r(x) \\ h(y),\ y \in B_r(x) \end{cases}$$

則 w 仍是 subharmonic。原因如下: 當 $p \notin B_r(x)$ 且 ρ 很小時, 有

$$\begin{aligned} w(p) = u(p) &\le \frac{1}{|B_\rho(p)|}\int_{B_\rho(p)} u(y)dy \\ &\le \frac{1}{|B_\rho(p)|}\int_{B_\rho(p)} w(y)dy. \end{aligned}$$

當 $y \in B_r(x)$ 時, 取 ρ 很小使 $B_\rho(p) \subset B_r(x)$, 則

$$w(p) = h(p) = \frac{1}{|B_\rho(p)|}\int_{B_\rho(p)} h(y).$$

因此, w 滿足 subharmonic 的定義, 而有 $w \in S_{\tilde{g}}$。如此一來,

$$\begin{aligned} u(z) &= \sup\{v(z) : z \in S_{\tilde{g}}\} \\ &\ge w(z) = h(z) > u(z), \end{aligned}$$

這是一個矛盾。所以唯一的可能是在 $B_r(x)$ 上 $u = h$, 即 $\Delta u = 0$。對每一點 $x \in \Omega$, 都可取附近的小球做同樣論證, 而得到在 Ω 上 $\Delta u = 0$。另一方面, 由於假設 Ω 邊界很平滑, $S_{\tilde{g}}$ 中的 subharmonic 函數, 在 $\partial\Omega$ 上可任意接近 $\tilde{g}$, u 的邊界値也因此必定是 $\tilde{g}$。證明完畢。

上述利用 subharmonic 求解的方法稱 Perron 方法。其它還有 Poincare 的 sweeping 方法, Fredholm 的積分方程方法, Hilbert 空間的方法及底下將提及的變分方法等。Perron 方法的好處是適用於非常廣泛的情況, 它的論述也非常基本。

四. Schauder 理論及連續性方法

對於一般二階線性橢圓方程 Dirichlet 問題

$$\begin{cases} Lu \equiv \sum a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum b_i(x)u_{x_i} + c(x)u \\ \quad = f(x) \text{ in } \Omega \\ u \quad = g \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

上一節的方法很難直接應用。在這裡, 一個大膽的想法是所謂連續性方法: 將原有問題連續變動到一個較簡單可解的問題, 然後證明當問題從簡單的“慢慢”往回變時, 由於每次只更動一點, 下一步驟的可解性應該可從前一步驟得到, 最後也能得到原問題的可解性。這個想法雖然巧妙, 但實際上行得通嗎?

令 Lu 如 (4.1) 所定義。由於已知 Laplace 算子的 Dirichlet 問題可解, 我們可定義連續變動的算子爲 $L_tu = (1-t)\Delta u + tLu$, $0 \le t \le 1$。當 $t = 0$ 時, L_t 爲 Laplace 算子; 當 $t = 1$ 時, $L_t = L$ 爲原來的算子。首先, 將 (4.1) 簡化一下。任取 u_0 使在 $\partial\Omega$ 上, $u_0 = g$。令 $\tilde{u} = u - u_0$, $f = f - Lu_0$, 則 $\tilde{u}$ 滿足

$$\begin{cases} L\tilde{u} = \tilde{f} \text{ in } \Omega \\ \ \tilde{u} \ = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

由於 (4.2) 和 (4.1) 等價, 可考慮新問題的形式如下

$$\begin{cases} L_tu = f \text{ in } \Omega \\ \ u \ = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3}$$

我們希望 $t = 0$ 時問題的可解性可傳到 $t = 1$ 來。假設已知 $t = s$, 問題可解, 如何說明當 $t = s + \varepsilon$, ε 很小時問題也可解? 將 $L_{s+\varepsilon}u = f$ 改寫成

$$\begin{aligned} L_su &= L_{s+\varepsilon}u + (L_su - L_{s+\varepsilon}u) \\ &= f + \varepsilon(\Delta u - Lu). \end{aligned}$$

將 $t = s$ 時的解記作 $L_s^{-1}f$。上述方程等價於

$$u = L_s^{-1}(f + \varepsilon(\Delta u - Lu)). \tag{4.4}$$

利用疊代的方法解 (4.4)。首先取 $u_0 = 0$, 並定義 u_k 和 u_{k-1} 的關係如下

$$u_k = L_s^{-1}(f + \varepsilon(\Delta u_{k-1} - Lu_{k-1})), \tag{4.5}$$

則 u_k 和 u_{k-1} 的差距爲

$$\begin{aligned} u_k - u_{k-1} = \varepsilon L_s^{-1}\Big(&\Delta(u_{k-1} - u_{k-2}) \\ &-L(u_{k-1} - u_{k-2})\Big). \end{aligned} \tag{4.6}$$

在此, 必須引進函數收斂的觀念來說明 u_k 如何收斂到一個解。常見衡量函數間差距的方法有

$$\begin{aligned} ||h-\phi||_{C(\Omega)} &= \sup\nolimits_{x\in\Omega}|h(x)-\phi(x)|, \\ ||h-\phi||_{C^2(\Omega)} &= \sup\nolimits_{x\in\Omega}\Big\{|h(x)-\phi(x)| \\ &\quad + \sum_i \Big|\frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\Big| \\ &\quad + \sum_{i,j} \Big|\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}\Big|\Big\} \end{aligned}$$

等等。假設有某種衡量函數間距離的方式 $||\ ||$, 則 " u_k 收斂到 u "可定義爲"當 $k \to \infty$ 時, $||u_k - u|| \to 0$"。如果另外有 (4.6) 右邊的估計

$$\begin{aligned} &||L_s^{-1}\Big(\Delta(u_{k-1} - u_{k-2}) - L(u_{k-1} - u_{k-2})\Big)|| \\ &\le C||u_{k-1} - u_{k-2}|| \end{aligned} \tag{4.7}$$

對某固定常數 C 成立, 則 (4.6) 變成

$$||u_k - u_{k-1}|| \le C\varepsilon ||u_{k-1} - u_{k-2}||.$$

如果取 $\varepsilon \le \frac{1}{2C}$, 則 $C\varepsilon < 1$。上式因而表示 u_k 和 u_{k-1} 在疊代進行中靠近得非常快, 並且能收斂到某個 u (此即所謂收縮映射的固定點定理)。現在, 在 (4.5) 左右兩邊令 $k \to \infty$, 則 (4.4) 有解 u。這表示原方程 $L_{s+\varepsilon}u = f$ 也有解。利用這種論證, 從 $t = 0$ 的可解性, 可依次推得 t 在 $[0, \frac{1}{2C}]$, $[0, \frac{2}{2C}]$, $\ldots$, $[0, \frac{m}{2C}]$, $\ldots$ 有可解性, 最後可以得到原問題 (4.2) 或 (4.1) 有解。

在上述推論中, 唯一缺少的環節便是 (4.6) 的估計。Schauder 的理論, 便是爲了完成這項估計。在取適當的距離 $||\ ||$後, Schauder 證明若 $c(x) \le 0$, 則 (4.1) 中 u 的大小可由 f 及 g 決定。利用這個結果, 可以獲得 (4.6) 的估計。

在更一般的非線性橢圓方程當中, 連續性方法也是很重要的。它的成敗往往在於是否能對適當的衡量距離 $||\ ||$, 獲得類似(4.6) 的估計。

五. 變分問題, 非線性方程及弱解

如果 E 對函數 u, 指定一個實數 $E(u)$, 便稱之爲泛函。研究 $E(u)$ 極大值, 極小值或只是臨界值的學問稱爲變分學。很早以來, 數學家就注意到 Laplace 方程具有變分的結構 (方程和變分的關係請參考本期林太家的文章)。令 $W_g = \{v : v$ 二次可微分, 且在 $\partial\Omega$ 上 $v = \tilde{g}\}$, 及令

$$E(v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 dy \tag{5.1}$$

爲定義在 $W_{\tilde{g}}$ 上的泛函。如果 u 滿足 (3.8), 則對任何 $v\in W_{\tilde{g}}$ 有

$$\int_\Omega |\nabla v|^2=\int_\Omega\Big(|\nabla v-\nabla u|^2 +2<\nabla v-\nabla u,\nabla u>+|\nabla u|^2\Big),$$

其中 $<\ ,\ >$ 表是內積。由分部積分可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega <\nabla v-\nabla u,\nabla u>\\ =&\int_{\partial\Omega}(v-u)\frac{\partial u}{\partial\nu}-\int_\Omega(v-u)\Delta u=0,\end{aligned}$$

上式中用了在 $\partial\Omega$ 上 $v-u=0$ 及在 Ω 上 $\Delta u=0$。因此可以得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega|\nabla v|^2&=\int_\Omega|\nabla v-\nabla u|^2+\int_\Omega|\nabla u|^2\\ &\geq\int_\Omega|\nabla u|^2,\end{aligned}$$

即 u 是同邊界值函數中, 使 E 最小的函數。

反之, 假設 u 是二次可微分, 在 $\partial\Omega$ 上 $u=\tilde{g}$ 且 u 是在同邊界值函數中, 使 E 最小的函數, 則 u 滿足 (3.8)。理由如下, 任取二次可微函數 φ, φ 在邊界 $\partial\Omega$ 上爲零, 及 $t\in\mathbb{R}$。利用 $E(u)$ 的最小性, 及 $u+t\varphi$ 和 u 有相同邊界值, 可得 $E(u+t\varphi)\geq E(u)$。現在把 $E(u+t\varphi)$ 看作 t 的函數。由於 $t=0$ 有極小値, 因此

$$\frac{d}{dt}E(u+t\varphi)\Big|_{t=0}=0.$$

經過計算, 上式左邊成爲

$$\begin{aligned}0&=\frac{d}{dt}E(u+t\varphi)\Big|_{t=0} \qquad (5.2)\\ &=\int_\Omega\frac{d}{dt}|\nabla u+t\nabla\varphi|^2\Big|_{t=0}\\ &=\Big\{2\int_\Omega<\nabla\varphi,\nabla u>\\ &\qquad+2\int_\Omega t|\nabla\varphi|^2\Big\}\Big|_{t=0}\\ &=2\int_\Omega<\nabla\varphi,\nabla u>\\ &=2\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial u}{\partial\nu}-\int_\Omega\varphi\Delta u\\ &=-\int_\Omega\varphi\Delta u,\end{aligned}$$

上式倒數第二行用了 φ 在 $\partial\Omega$ 爲0的事實。由於 φ 可以任取, 上式能成立唯一的可能性就是在 Ω 上 $\Delta u=0$, 即 u 滿足 (3.8)。

由上面的討論, 可知變分問題 $E(v)$ 和 Dirichlet 問題 (3.8) 是等價的。是否也可用變分方法去解 (3.8) 呢? 若可找到某 $u\in W_{\tilde{g}}$, 使 $E(u)=\inf_{W_{\tilde{g}}}E(v)$, 則 $E(u)$ 就達到最小値。一般而言, 最大下界不一定取得到。例如令 $h=2+\frac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$, 則最大下界 $\inf_{\mathbb{R}}h=2$, 但找不到 $x\in\mathbb{R}$ 使 h(x)=2。無論如何, 先找一序列 $v_1,v_2,\ldots,v_k,\ldots\in W_{\tilde{g}}$, 使 $\lim_{k\to\infty}E(v_k)=\inf_{W_{\tilde{g}}}E(v)$。假設 $\{v_k\}$ 有子序列收斂到某個 w, 則很可能就有 $E(w)=\inf_{W_{\tilde{g}}}E$。相應的, (3.8) 也有解 w。很自然的, 我們可採取上節所述的距離 $||\ ||_{C^2}$ 來當作衡量 v_k 收斂與否的工具。從 $\{v_k\}$ 逼近最大下界這件事實, 我們對它們的了解大約只有: 存在上界 M, 使

$$E(v_k)=\int_\Omega|\nabla v_k|^2\leq M,\quad k=1,2,\ldots. \tag{5.3}$$

式子 (5.3) 只控制了一次微分, 並且是積分的形式, 它和 $||\ ||_{C^2}$ 所要求逐點都有二次微分的控制相差很大。因此, 很難找到子序列 $\{v_{k_j}\}$ 及 w 使 $||v_{k_j}-w||_{C^2}\to 0$。較好的策略是, 找一個和 $E(v)$ 本身相近的距離

觀念, 這樣子就可以利用 (5.3) 提供的資訊。所以我們定義

$$||v||_{1,2}=(\int_\Omega |v|^2)^{\frac{1}{2}}+(\int_\Omega |\nabla v|^2)^{\frac{1}{2}},$$

其中足標1表示有一次微分的項, 2表示取平方積分, 並且考慮函數空間

$$H=\{v: \text{存在一序列一次可微分函數}\ \{h_k\}\text{使}||h_k-v||_{1,2}\to 0\}.$$

H 稱爲 Sobolev 空間, 其中的元素雖都可被一次可微分函數逼近, 卻不一定具傳統意義的一次微分。其原因就像能被有理函數逼近的數, 不一定是有理數。

$||\ ||_{1,2}$ 比 $||\ ||_{C_2}$ 好的地方在於:(1) 它和 $E(v)$ 更像; (2) 由於它是用積分定義, 更容易有收斂性。基於這些優點, 利用 (5.3) 對 $\{v_k\}$ 的限制, 確實可找到子序列 $\{v_{k_j}\}$ 及 $w\in H$ 使 $||v_{k_j}-w||_{1,2}\to 0$ 且 $E(w)=\inf E(v)$。由於 w 不一定是二次可微, 我們把它稱作 (3.8) 的“弱解”。如果確知 w 是二次可微, 則由 (5.2) 的論證, 可以知道它滿足 $\Delta w=0$, 所以是一個“眞正解”。事實上, 確實可經由 $E(w)$ 是極小値這件事情, 證明 w 是二次可微, 這就是所謂的“正則性”論證。由弱解存在性再加上正則性, 便可由變分問題求得 Dirichlet 問題的解。

許多橢圓偏微分方程, 都和變分學有關。一個著名的例子是最小曲面方程。考慮鐵絲圈放入肥皂水中再拿出來。通常可以見到肥皀膜形成。假設 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, 而皀膜在 Ω 正上方, 其高度是 u, 鐵絲則在 $\partial\Omega$ 的上方。由於表面張力, 皀膜要儘量保持面積最小。它的表面積爲

$$A(u)=\int_\Omega\sqrt{1+|\nabla u|^2}dy.$$

因此對其它高度爲 v, 同邊界値的曲面, 必定有

$$A(u)\le A(v).$$

利用類似 (5.2) 的想法, 可以證明 u 滿足

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u_{x_j}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)=0. \tag{5.4}$$

上式可展開成

$$\sum_{1\le i,j\le 2}a_{ij}(\nabla u)\cdot u_{x_ix_j}=0 \tag{5.5}$$

其中

$$a_{11}=1-\frac{u_{x_1}^2}{1+|\nabla u|^2}$$
$$a_{12}=a_{21}=-\frac{u_{x_1}u_{x_2}}{1+|\nabla u|^2}$$
$$a_{22}=1-\frac{u_{x_2}^2}{1+|\nabla u|^2}.$$

可以驗證矩陣 $(a_{ij})_{2\times 2}$ 是正定的, 因此 (5.4) 被認定成橢圓方程。

方程式 (5.4) 及許多不見得有變分結構的橢圓方程都可以用求弱解的方式來解決。弱解的觀點, 開啓了解方程新的寬闊大道, 它在各不同類型方程中都扮演重要的角色 (參見本期楊彤的文章)。今日, 它已成爲偏微分方程裡不可缺少的基本語言。

六. 幾個觀察

從我們討論過的這些題材來看, 或許有幾點深具啓發性

(1) 不好的函數反而有用: 在 Green 表示式 (3.7) 中, 可以看到 ψ_0 異想不到的作

用。ψ_0 在原點不可定義的特性反而讓我們得到新的公式。

(2) 精確公式和定性的論證一樣重要: 由於方程式太複雜了, 不可能都寫下公式解。這時候很多關於解性質的理論變得很重要。

(3) 放鬆定義: 解代數方程時, 不能停留在實數裡, 必須到複數中去看。放鬆偏微分方程解的定義到弱解, 讓我們更有彈性, 看到海平面下的冰山。

參考資料

1. Partial Differential Equations, L. C. Evans, American Mathematical Society, 1998.
2. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, D. Gilbarg and N. Trudinger, Springer, 1983.
3. Foundations of Potential Theory, O. D. Kellogg, Dover Publications, New York, 1954.
4. A Survey of Minimal Surfaces, R. Osserman, Dover Publications, New York, 1986.
5. Lectures on Minimal Surfaces, Volume 1, J. C. C.Nitsche, Cambridge University Press, 1989.
6. Variational Methods, M. Struwe, Springer-Verlag, 1991.

—本文作者任教於台灣大學數學系—