關於數列的通項公式的思考

宋秉信

在中學數學教材中都明確的提到: 如果數列 $\{a_n\}$ 的第 n 項與 n 之間的函數關係可以用一個公式 $a_n = f(n)$ 來表示, 那麼此公式就叫做這個數列的通項公式。

我們現在所遇到的問題是並不是所有的數列都可以寫出它的通項公式。我們常遇到有的數列的通項公式, 在形式上又不是唯一的, 但又是表示同一個數列。特別是有些數列只給它的前面幾項, 並沒有給出它的構成規律, 若僅僅根據所給出的有限項而歸納出來的所謂“通項公式”, 也不一定是唯一的。由於“通項公式”之不同, 由它們所寫出來的後繼項就不一樣。本文所論述的就是指這一類數列。

引理: 根據所給的條件, 可以寫出無窮數列的任意項, 這樣的條件叫做完全的。否則, 這些條件是不完全的。

爲什麼只從數列的有限項來歸納其通項公式是不一定可靠的? 爲回答這一問題, 我們來證明下面的命題。

定理: 設 a_i 爲已知常數, 且$a_i \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 對於任意給定的常數 $a_{n+1} \in A$, 必存在數域 A 上的一個多項式 $f(x)$ 滿足 $f(k) = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n, n+1)$。

證明: 設 $f(x) = b_1+b_2x+b_3x^2+\cdots+b_{n+1}x^n$。由已知 $a_k \in A$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$, 而多項式 $f(x)$ 爲 A 上的多項式,

令

$$\begin{aligned} f(1) &= a_1 \\ f(2) &= a_2 \\ &\vdots \\ f(n+1) &= a_{n+1} \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n+1} = a_1 \\ b_1 + 2b_2 + 2^2b_3 + \cdots + 2^nb_{n+1} = a_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ b_1 + (n+1)b_2 + (n+1)^2b_3 + \cdots \\ \quad +(n+1)^nb_{n+1} = a_{n+1} \end{cases}$$

這是一個由 $(n+1)$ 個一階線性方程組成的

線性方程組。其係數行列式爲:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \cdots & (n+1)^n \end{vmatrix}$$

因 D 是一個範德蒙行列式, 且 $1,2,3,\ldots,n+1$ 兩兩互不相等, 所以 $D\neq 0$, 由此根據克萊姆法則知方程組存在有唯一解。即 $b_1,b_2,b_3,\ldots,b_{n+1}$ 唯一存在, 使得 $f(x)=\sum_{i=1}^{n+1} b_i x^{i-1}$ 且滿足 $f(k)=a_k(k=1,2,\ldots,n+1)$。證畢

顯然, 如果把這一理論應用到數列上, 即將 $a_i(i=1,2,\ldots,n)$ 視作一數列的前 n 項, 對於任意給定的常數 a_{n+1} 作爲該數列的第 $n+1$ 項, 那麼, 它的第 $k+1$ 項不是唯一的。也就是說, 它的通項公式不能由 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k$ 來唯一確定。這就是通常教材及參考資料中的例題、習題裡給了一個數列若干項後, 強調只要寫出此數列的一個通項公式的理由所在。

一般地說, 給出了一個數列的最初若干項, 不能完全確定這個數列的構成法則。例如: 對於數列 $1,4,7,10,13,\ldots$。經觀察知, 各項都是將前項加3而得到後項。即

$$\begin{aligned}
&\text{第一項}: 1=1+3\cdot 0\\
&\text{第二項}: 1+3=1+3\cdot 1\\
&\text{第三項}: 1+3+3=1+3\cdot 2\\
&\qquad\vdots\\
&\text{第}n-1\text{項}: 1+\underbrace{3+3+\cdots+3}_{n-2\text{個}3}\\
&\qquad=1+3\cdot(n-2)\\
&\text{第}n\text{項}: 1+\underbrace{3+3+\cdots+3}_{n-1\text{個}3}\\
&\qquad=1+3(n-1)
\end{aligned}$$

所以它的一個通項公式爲: $a_n=3n-2$ $(n\in N)$。或 $a_n=3n+1$ $(n=0,1,2,\ldots)$

可是, 另外由 $a_n=3n-2+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)f(n)$ 給定的數列的第一項到第五項也是 $1,4,7,10,13$, 而 $f(n)$ 可以取 $n(n\in N)$ 的任意函數。所以, 這樣的數列就有無窮多個。既然通項公式不是唯一的, 那麼要求它的前 n 項之和, 當然也是不能唯一確定的。

根據不同問題, 有時我們也只能假定一種適當的 (即最簡單的) 法則, 依這個法則去求數列的其它各項。

例一: 已知無窮數列 $\{a_n\}$ 的前五項爲:

$$3,7,11,15,19,\ldots$$

求這個數列 $\{a_n\}$ 的通項公式。

解: 因爲所給的條件是不完全的。根據引理, 我們不可能寫出數列的所有各項。所以它的通項公式 a_n 有不只一種解析表達式。下面僅舉幾種不同的表達式。

第一種: 因 $3=4-1=4\cdot 1-1$; $7=8-1=4\cdot 2-1$; $11=12-1=4\cdot 3-1$; $15=16-1=4\cdot 4-1$; $19=20-1=4\cdot 5-1$; $\cdots$

所以通項公式爲:

$$a_n=4n-1\ (n\in N) \tag{1}$$

第二種:

$$a_n=\frac{103}{7200}n^6-\frac{321}{1440}n^5+\frac{1931}{1440}n^4 -\frac{377}{96}n^3+\frac{20861}{3600}n \qquad (2)$$

第三種:

$$\begin{aligned}a_n=&3\cdot\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)}\\&+7\cdot\frac{(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}\\&+11\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-4)(n-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}\\&+15\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)}\\&+19\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)} \qquad (3)\end{aligned}$$

顯然, 其中 (1) 是在分析無窮數列的前五項構成的特點後, 才發現它是公差爲4的等差數列, 依此就認爲下面各項也是具有相類似的規律而得出的。(2) 是在假定其通項公式爲一個 n 的六次式:

$$a_n=an^6+bn^5+cn^4+dn^3+en^2,$$

代入五個已知條件:

$$\begin{cases}3=a+b+c+d+e\\7=64a+32b+16c+8d+4e\\11=729a+243b+81c+27d+9e\\15=4096a+1024b+256c+64d+16e\\19=15625a+3125b+625c+125d+25e\end{cases}$$

解方程組得出 a,b,c,d,e 而得到的。(3) 則是由公式:

$$\begin{aligned}a_n=&a_1\cdot\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)}\\&+a_2\cdot\frac{(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}\\&+a_3\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-4)(n-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}\\&+a_4\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)}\\&+a_5\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}\end{aligned}$$

而得出的。

請大家注意, 在這個問題裡, (3) 與 (1) 實際上是相同的, 將 (3) 化簡後即可得出 (1)。

由於所給的條件是不完全的, 所以其答案也就不是唯一的。同時, 從第五項以後並沒有給定, 因而隨意性很大。每一種答案都可以按它所考慮的規律去計算第五項以後各項的值。實質上, 都是對前五項組成的數列的一個擴展。

比較 (1), (2), (3), 顯然以 (1) 式最好, 形式不但簡單, 而且方法也好。它是從前五項的結構組成發現的一個簡單的規律。中學數學教材中所使用的方法, 大都是採用這種方法: 從有限項中找出一個熟悉的規律作爲通項公式。但要知道它僅是其中的一個而並非唯一。

現在有些輔導資料中常常可以看到給出一個數列的若干項, 要求讀者寫出其通項公式或求其前 n 項的和。如果所給數列是有限數列, 則完全無可非議。若是無窮數列, 那麼就不夠嚴密了。讀者也只能根據自己的能力, 找出一個只要能夠使所給的若干項滿足的公式便可以了。實際上他們並沒有眞正找出所給無窮數列的整個構成規律。

例二: 求數列 $7, 77, 777, \ldots$ 前 n 項的和

(周玉政編著「中學數學綜合練習題選」)

解:

$$\begin{aligned}
\because\ \ 7 &= 7\times\frac{10-1}{9},\\
77 &= 7\times\frac{10^2-1}{9};\\
77 &= 7\times\frac{10^3-1}{9};\ldots\\
\therefore\ 7+77+&777+\cdots\\
&=\frac{7}{9}(10^1+10^2+\cdots+10^n-n)\\
&=\frac{7}{9}(\frac{10^{n+1}-10}{10-1}-n)\\
&=\frac{7}{9}(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n)。
\end{aligned}$$

這樣解法是司空見慣的常規解法。但我們不禁要問, 數列的第四項一定是7777嗎? 第 n 項也一定是 $\underbrace{77\cdots7}_{n個}$ 嗎? 其和等於 $\frac{7}{9}(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n)$ 是唯一的嗎? 根據定理, 顯然其和不是唯一的。問題就出在題目中沒有給出數列一個通項公式或者指明它的第四項及以後項的構造規律。類似這樣的題目在各種資料中常可見到, 這就不能不引起我們數學教育工作者的注意。命題一定要嚴密些。

例三: 求數列 $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ 的一個通項公式。

解: 上面數列可以寫成:

$$\frac{1\times2}{2}, \frac{2\times3}{2}, \frac{3\times4}{2}, \frac{4\times5}{2}, \frac{5\times6}{2}, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}, \ldots,$$

所以它的一個通項公式爲 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$ $(n\in N)$。或這樣分析:

$$\begin{aligned}
&a_1=1\\
&a_2=3=1+2\\
&a_3=6=1+2+3\\
&a_4=10=1+2+3+4\\
&a_5=15=1+2+3+4+5\\
&\qquad\vdots\\
&a_n=1+2+3+4+5+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}。
\end{aligned}$$

例四: 已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3$ 求通項公式 a_n。

解: 因所給的條件是完全的 (相當於有無窮多個條件), 所以就不能用前面所提到的公式 (3), 也不能用 (2) 的待定係數法來確定通項公式, 只能用 (1) 的方法, 先寫出若干項找出其規律, 並認爲 (或加以證明) 此規律就是通項公式的規律。但必須要證明這個規律是符合已知條件的。

$$\begin{aligned}
&\because\ a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+3\\
&\therefore\ a_1=1,\\
&\quad a_2=2a_1+3=2\cdot1+3=5\\
&\quad a_3=2a_2+3=2\cdot5+3=2(2+3)+3\\
&\qquad=2^2+2\cdot3+3=13\\
&\quad a_4=2a_3+3=2(2^2+2\cdot3+3)+3\\
&\qquad=2^3+2^2\cdot3+2\cdot3+3=29\\
&\quad a_5=2a_4+3=2(2^3+2^2\cdot3+2\cdot3+3)+3\\
&\qquad=2^4+2^3\cdot3+2^2\cdot3+2\cdot3+3=61\\
&\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 3 = 2^{n-1} + 3(2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1) = 2^{n+1} - 3$$

下面來證明這個規律是適合已知條件的。用數學歸納法證。

證明: 當 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 時, 命題是成立的。

假設 $n = k$ 時, 命題也命立, 即 $a_k = 2^{k+1} - 3$ 成立, 則

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k + 3 = 2(2^{k+1} - 3) + 3 \\ &= 2^{k+2} - 2 \cdot 3 + 3 = 2^{k+2} - 3 \\ &= 2^{(k+1)+1} - 3。\end{aligned}$$

$\therefore$ 當 $n = k + 1$ 時命題也成立。

由此可知, 對於任意自然數 n, 命題都是成立的。

值得注意的是, 對於完全條件下的數列的通項公式有時也可以有不同形式表達式, 但從這不同形式的通項公式所寫出的數列卻是一個。比如對於數列: $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$, 即 $a_{2n-1} = 1$, $a_{2n} = 0$。求它的通項公式。

所給條件是完全的, 但我們可以寫出若干個形式不同的通項公式:

$$a_n = \frac{1 - (-1)^n}{2};\ a_n = \sin^2 \frac{n\pi}{2};$$
$$a_n = \frac{1 - \cos n\pi}{2}; \ldots$$

但不論 n 取任何自然數, 這些通項公式計算出來的值都是數列: $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$。

參考資料

1. 周玉政,「中學數學綜合練習題選」, 遼寧東北師大出版社, 1974年。
2. 王子興、宋秉信、昌國良,「中學數學教育心理研究」, 湖南長沙, 湖南師範大學出版社, 1999年5月。

—本文作者任教於中國湖南湘潭教育學院—