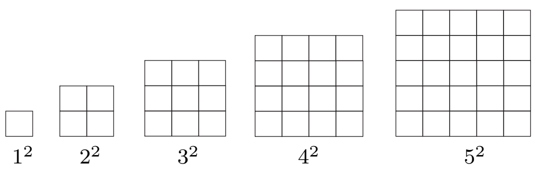
再談如何求出 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

傅海倫

拜讀貴刊第二十三卷第一期「如何求出 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$」一文, 啓發頗深。文中介紹了七種方法, 運用了數列從特殊項推測到一般項、數列的分項對消, 以及倒過來寫相加等技巧。同時, 還運用了函數、堆疊與體積的觀念, 體現出諸多創新思想, 是“有中生新”之例證。但所舉例子在論證過程中略顯繁雜, 讓人感到不易理解, 本文從數學構造法的角度, 再介紹幾種證明方法, 以求簡明、直觀、形象。

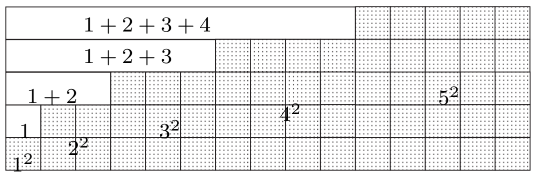
方法一: 正方形塊的構造

分別將 $S_n = 1+^2+2^2+\cdots+n^2$ 的各項看作各自的正方形塊。首先考慮特殊的 $S_5=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$。各項對應的正方形塊爲 (圖一)



圖一

將各正方形塊按順序, 組合在一起, 並補成大的長方形 (所補圖形面積正好爲 $1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)$ 如圖二), 利用面積關係可列式。



圖二

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\Big[1+(1+2)\\&+(1+2+3)+(1+2+3+4)\Big]\\=\ &5(1+2+3+4+5)\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}S_5&=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2\\&=5(1+2+3+4+5)-\Big[1+(1+2)\\&\quad+(1+2+3)+(1+2+3+4)\Big]\end{aligned}$$

如果把 5 改成 n, 則

$$\begin{aligned}S_n&=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\\&=n(1+2+3+\cdots+n)-\Big[1\\&\quad+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\\&\quad+(1+2+\cdots+n-1)\Big]\qquad(1)\end{aligned}$$

若令 $T_n = 1+2+3+\cdots+n$, $T_n=\frac{n(n+1)}{2}$, 則 (1) 式爲

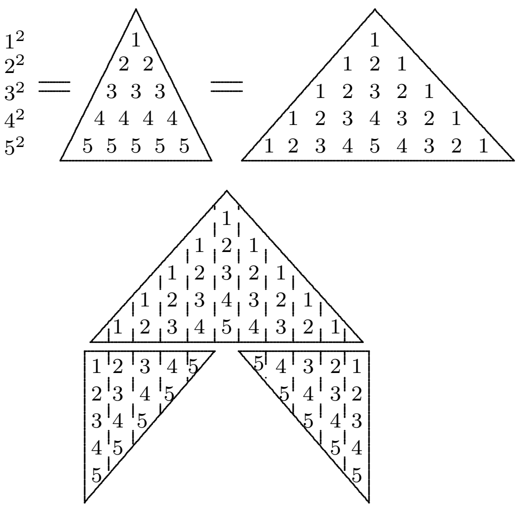
$$\begin{aligned}
S_n &= nT_n-\Big[1+(1+2)+(1+2+3)\\
&\quad +\cdots+T_{n-1}\Big]\\
&=\frac{1}{2}n^2(n+1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k-1)\\
&=\frac{1}{2}n^2(n+1)-(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k)\\
&=\frac{1}{2}n^2(n+1)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k\\
&=\frac{1}{2}n^2(n+1)-\frac{1}{2}\cdot S_n+\frac{1}{4}n(n+1)
\end{aligned}$$

$$\therefore\ 4S_n = 2n^2(n+1)-2S_n+n(n+1)$$

即 $S_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

方法二: 數碼三角形的構造

先考慮特殊的 S_5, 將 S_5 的各項擺成三角形, 如圖三, (同一行中的加號省略, 可得兩個等價的數碼三角形)



圖三

對三角形適當排列組合, 直觀可得:

$$\begin{aligned}
&3(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)\\
&=(1+2+3+4+5)\times(2\times5+1)\\
&\text{即 } 3S_5=T_5\times(2\times5+1)
\end{aligned}$$

將5改成 n, 則可推得一般式:

$$\begin{aligned}
3S_n &= -T_n\times(2n+1)\\
&=\frac{n(n+1)}{2}-(2n+1)\\
S_n &= \frac{n}{6}\cdot(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

方法三: 列表、歸納推求一般式

n	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
T_n	1	3	6	10	15	21	28	$\cdots$
n^2	1	4	9	16	25	36	49	$\cdots$
S_n	1	5	14	30	55	91	140	$\cdots$
$\frac{T_n}{S_n}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{3}{15}$	$\cdots$

由上表可猜得 $\frac{T_n}{S_n}=\frac{3}{2n+1}$。即

$$S_n=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$$

以上三種證法用簡單的圖表作爲鋪墊, 使證明過程直觀、形象、具體而生動。

下面介紹中國古代數學中對該問題的證明方法。

方法四: 中國南宋數學家楊輝 (生活於約十三世紀中葉至後半葉, 生平不詳) 在其著作「詳解九章算法」商功章中, 用方錐比類果垛 I(又名四隅垛) 如圖四, 其術曰:「下方加一, 乘下方爲平積; 又加半爲高, 以乘下方爲高積, 如三而一。」這相當於給出求積公式:

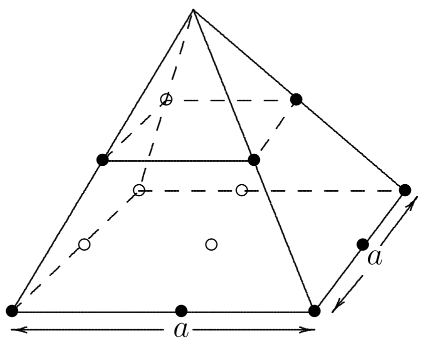
方錐: $V=\frac{1}{3}a^2h$

果垜 I:

$$S = 1^2+2^2+3^2+\cdots+a^2 = \frac{1}{3}a(a+1)(a+\frac{1}{2})$$

考慮 $a=n$, 即有

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$



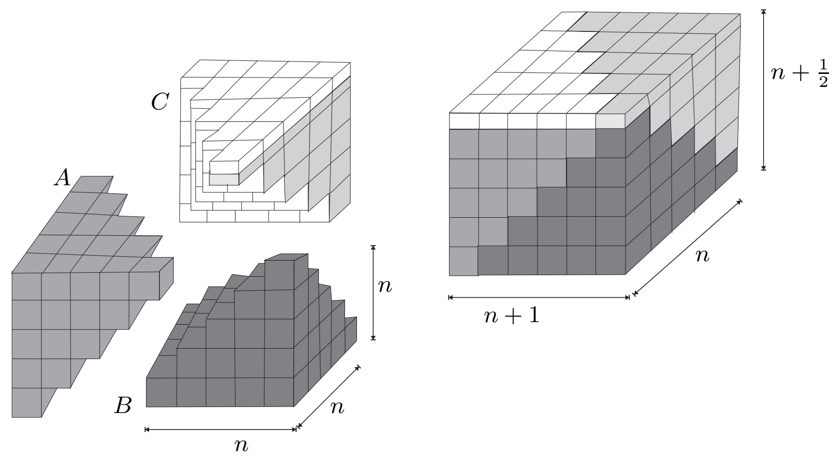
方錐—果垜I

圖四

楊輝以比類方法給出此求積公式的證明。這是把三個類方錐垜的合積當成一個三邊各爲 n、$n+1$ 和 $n+\frac{1}{2}$ 的方棧酒垜來考慮的, 如圖五, 經過下述拼合之後, 在 C 垜的頂部卻有一層高出於 A 垜和 B 垜之上, 此時只須從 C 垜頂部削去半層 (圖中繪有砂點的部分), 再旋轉 $180°C$ 放到 A 垜上面, 就正好拼成一個長爲 $n+1$, 寬爲 n、高爲 $n+\frac{1}{2}$ 的方棧酒垜。這就說明楊輝採用公式

$$S = \frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

的表述形成而非其他形式的原因。



圖五. 三類方錐垜合成一方棧酒垜

由圖五可知, 古代的證明方法仍是傳統的以盈補虛或出入相補原理的具體運用。

參考文獻

1. 陳國裕, 如何求出 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$,「數學傳播」, 第二十三卷第一期, 民國八十八年三月。
2. 樊亞東, 把數學教得簡單容易一點,「中學數學月刊」, 1999年第3期。
3. 劉鈍,「大哉言數」, 遼寧教育出版社, 1995年版。

—本文作者任教於山東師範大學數學系—