“一般折線”研究綜述

楊世明 · 張忠輔*

“一般折線”是 80 年代末開發的四類新的數學研究課題 (映射數列、數陣、絕對值方程和一般折線) 之一。事實上, 我國數學家傅種孫先生 (曾任北京師範大學副校長、教務長), 早在 50 年代就對正星形折線進行了研究[1], 以後又有對箏形、蝶形性質的研究。1991年, 楊之提出一般折線研究的課題[2]。

由於現代科學的發展, 一方面提出了整體把握和深入認識“一般折線”的要求, 另一方面, 科學哲學又使人們確信並動手探索混亂中的有序 (概率論、模糊數學、混沌學說和分形幾何都是這方面的範例), 組合學與拓樸學的研究, 則為之提供了必要的工具。“一般折線”課題經悠悠十年的“勘探開發”, 就取得了豐碩的成果, 而且業已探明, 它乃是不斷出思想、出方法、出課題、出成果的富礦。

1. 折線特徵性質的發現

平面上若干條線段順次首尾相接 (每條線段最多同另外兩條連接, 且端點不在線段內部), 所構成的圖形, 稱為平面折線 (簡稱折線), 如附圖 1, 其中線段稱為折線的邊, 線段的端點稱為頂點。同一邊上的頂點稱為相鄰頂點, 同一頂點引出的邊稱為鄰邊。如果一條折線每條邊都有兩條鄰邊, 就叫做閉折線 (如圖 1 中之 (b)(d)), 否則叫做開折線 (如圖 1 中 (a)(c))。

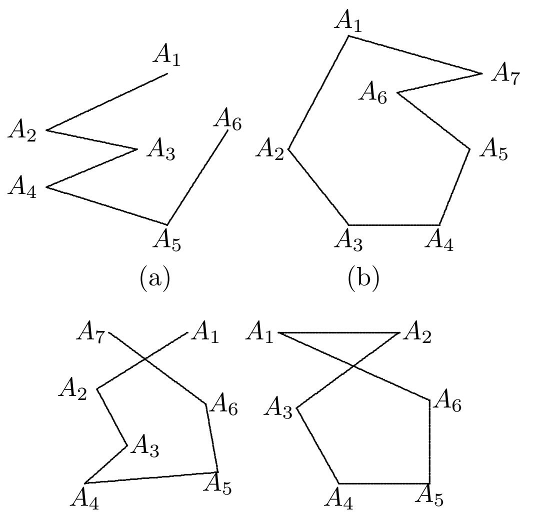


圖1. 平面折線

顯然, n 邊閉折線有 n 個頂點。這樣, 就可以對折線進行初步的分類, 並對幾個常用概念做出明確的界定: 邊不相交的折線稱為簡單折線 (如圖 1 中 (a)(b)), 簡單閉折線叫做多邊形 (如圖 1 中 (b))。多邊形劃分平面

爲兩部分, 其中的有限部分叫做內部, 無限部分叫做外部。應用歸納法可以證明: n 邊形內部可用不相交對角線劃分爲以其頂點爲頂點的互不重疊的 $(n-2)$ 個三角形, 從而可直接推出內角和定理。

文獻[3] 進一步提出如下課題, 作爲“問題或猜想21”:

1) 折線整體性質的研究: 拓樸與其他結構特徵; 組合計數問題; 折線複雜性指標; 折線的拼合與分折問題; 有關度量性質的研究等。

2) 特殊折線如直角折線、等角或等邊折線、平行多邊閉折線的研究, 具有某種特徵的折線的折線 (短程折線、遍歷折線) 的存在和構造問題。

3) 圓與凸多邊形內接折線 (如星形) 的研究。

爲了弄清折線的特徵性質, 我們不妨仔細觀察一條折線 (圖2所示的折線) $A_1A_2\cdots A_9$。看它的邊 A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 和 A_4A_5, 其鄰邊的折向有不同的情況 (如圖3所示): A_1A_2 的兩鄰邊 A_1A_9 和 A_2A_3 折向異側 (A_2A_3 之兩鄰邊亦復如此), 而 A_3A_4的兩條鄰邊 A_2A_3 與 A_4A_5 折向同測。兩鄰邊折向同側的邊叫做單折邊, 折向異側的邊叫做雙折邊 (如圖3(c) 的 A_3A_4 是單折邊; 圖3(a) 的 A_1A_2 是雙折邊)。在圖3(a) 與 (b) 中同爲雙折邊的 A_1A_2 和 A_2A_3, 又有不同的情況: 如沿 A_1A_2 的鄰邊 A_1A_9 和 A_2A_3 方向, 各加上一個力, 則 A_1A_2 會向右 (逆時針) 旋轉, 因此, 這樣的邊稱爲右旋邊, 類似的理由稱 A_2A_3 那樣的邊爲左旋邊。這種由於在頂點處的拐折而形成的邊的折性, 確是折線的特徵性質。這由如下兩條定理即可知曉:

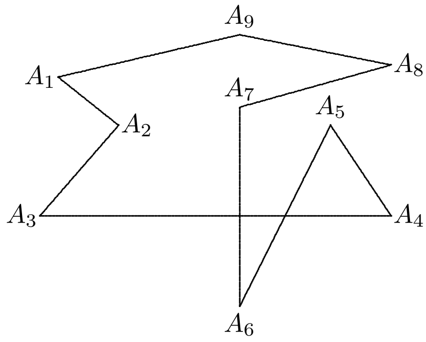


圖2

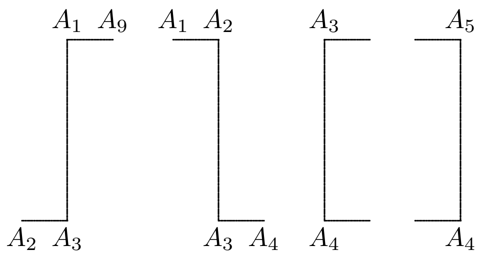


圖3

定理1: (特徵性質) 閉折線若有雙折邊, 則必有偶數條; 左、右旋邊各半且相間排列。

我們用“雙標號”法加以證明。

把閉折線 $A_1A_2\cdots A_n$ 的邊 A_iA_{i+1} $(i=1,2,\ldots,n, A_{n+1}$ 即爲 A_1, 下同) 這樣標號: 如 A_i 爲 A_iA_{i+1} 的左折點 (即當沿該邊由 A_{i+1} 走向 A_i, 過 A_i 走向鄰邊時向左拐), 在該邊的 A_i 處標“一”號, 否則標“十”號 (如圖4)。那麼容易看到:

(1) 每個頂點處的兩邊上標號相反;

(2) 單折邊兩端標號相反, 雙折邊兩端標號相同, 其中, 雙減號邊 $(-,-)$ 爲左旋邊, 雙加號邊 $(+,+)$ 爲右旋邊。

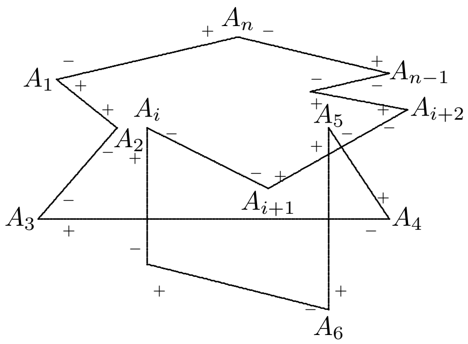


圖4

記 $a_i = A_iA_{i+1}$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 並設閉折線有雙折邊, 如果它們僅有一條, 不妨設爲 a_1 且 $a_1=(+,+)$ (讀作 "a_1 是雙加號邊, 下同), 則由標號規則及上述的 (1), (2), 閉折線 $A_1A_2\cdots A_n$ 各邊標號依次應爲

$$a_1=(+,+), a_2=(-,+),\ldots,$$
$$a_{n-1}=(-,+), a_n=(-,+)$$

但 $a_1 = A_1A_2$, $a_n = A_nA_1$, 可見在頂點 A_1 處標了兩個"+", 這與上述的 (1) 矛盾, 因此, $A_1A_2\cdots A_n$ 至少有兩條雙折邊。

考慮兩條"相鄰"雙折邊 a_i, $a_j (i<j)$: 它們之間的邊 $a_{i+1},\ldots,a_{j-1}$ 都是單折邊。如果 $a_i = (+,+)$。則按標號規則及上述 (1)(2), 有

$$a_{i+1}=(-,+), a_{i+2}=(-,+),\ldots,$$
$$a_{j-1}=(-,+)$$

因此 $a_j=(-,-)$; 如果 $a_i=(-,-)$, 則類似可知 $a_j=(+,+)$。這就證明了"左右旋邊相間排列"的結論。

現在依次考慮 $a_1,a_2,\ldots,a_n$, 設碰到的第一條雙折邊爲 a_{i_1}, 第二條爲 $a_{i_2},\ldots,$ 最後一條爲 a_{i_k} $(1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n)$。按上面所證明的, $a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_k}$ 的標號是 $(+,+)$、$(-,-)$ 相間, 從而 a_{i_1} 與 a_{i_k} 異號 (因爲 a_{i_k} 與 a_{i_1} 是相鄰的雙折邊), 因此, k 爲偶數, 這就證明了我們的結論。

由於有相交邊的閉折線無法區分內外部, 因此一般也沒有"內角"概念。但可以考慮頂角: 在頂點處的劣角 (小於平角的角)。有文獻說: "由於每個非簡單多邊形 (即閉折線) 的頂角和總可化爲一個或幾個凸多邊形的頂角和, 因此, 總可 $\cdots\cdots$ 得到"。事實並非如此, 而且一般地有

定理2: 如果閉折線有雙折邊, 則頂角和不定。

證明: 設 A_1A_2 是折線 $A_1A_2\cdots A_n$ 的一條雙折邊 (如圖5), 由於 $\angle A_nA_1A_2' < \angle A_nA_1A_2 < \angle A_nA_1A_2''$; $\angle A_2' < \angle A_1A_2A_3 < \angle A_1A_2''A_3$。所以閉折線 $A_1A_2'A_3\cdots A_n$ 頂角和 $<$ $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 頂角和 $<$ $A_1A_2''A_3\cdots A_n$ 頂角和。可見, $A_1A_2\cdot A_n$ 的頂角和是不定的。

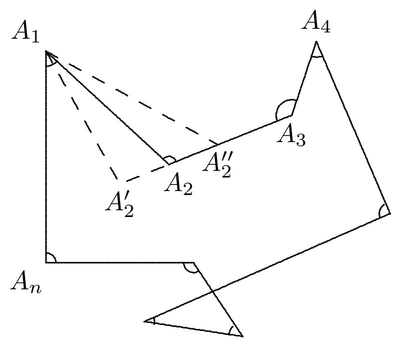
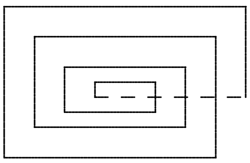
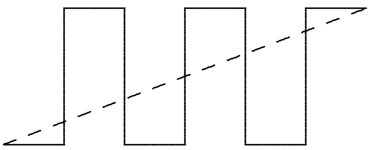


圖5

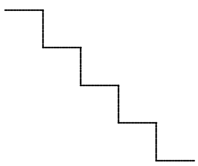
這兩條定理有一系列重要推論, 如奇數條邊的閉折線至少有一條單折邊; 多邊形爲凸多邊形的充要條件是無雙折邊等等。且可一眼看出若干折線的結構特徵, 如圖6所示: (1) 是回形折線, 無雙折邊, (2) 是齒形折線: 單雙折邊相間; (3) 是階形 (開) 折線: 無單折邊, 而圖7畫的閉折線 (a) 是五邊回式星形, 由單折邊構成, 頂角和爲 180°; (b) 是十邊階式星形, 由雙折邊構成, 頂角和不定。



(1)

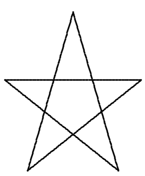


(2)

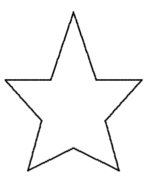


(3)

圖6



(a)



(b)

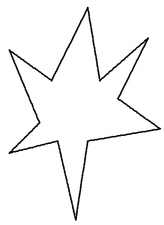
圖7

2. "複雜性指標"的探索

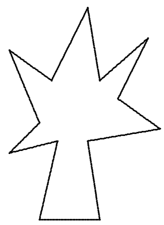
當我們說一條 n 邊折線Z_n"很複雜"的時候, 我們指的是甚麼呢? 或者說, 我們用甚麼指標來描述 Z_n 的複雜程度呢? 經十餘年的探索, 我們初步地找到了三個指標: 描述邊的轉折情況的雙折數、描述邊間交織情況的自交數和自相纏繞情況的環數。以下用 Z_n 表示 n 邊閉折線。

(1) Z_n 的雙折邊數 $S(n)$ 叫做它的雙折數, 以 $S_0(n)$ 表示 $S(n)$ 的最大値。由於凸多邊形、回式星形折線等無雙折邊, 所以 $S(n) = 0$, 而階式星形無單折邊, 故 $S(n) = n$, 因此 $0 \le S(n) \le n$, 更具體地, 關於 $S_0(n)$ 我們有

$$S_0(n) = \begin{cases} 0, & n = 3 \\ 2, & n = 4 \\ n-1\,, & n \ge 5 \text{ 爲奇數} \\ n\,, & n \ge 6 \text{ 爲偶數} \end{cases}$$

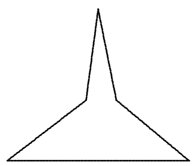


n爲偶數

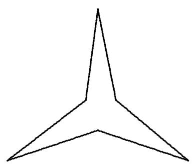


n爲奇數

圖8



$n = 5$



$n = 6$

圖9

其中, 圖7分別畫出了 n 爲奇數和偶數時 $S(n)$ 達到最大的 Z_n, 圖9是 $n=5$ 與 $n=6$ 兩種特殊的 Z_n, 則當 $n\ge 5$ 時, 可統一地寫成 $S_0^{(n)}=n-\frac{1}{2}[1+(-1)^{n-1}]$。那麼, 有如下兩個問題值得深入研究:

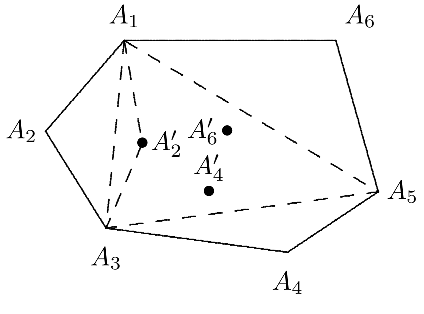
第一. 設 k 是偶數, 且 $0\le k\le S_0(n)$, 是否存在閉折線 Z_n, 使其 $S(n)=k$?

第二. 按單雙折邊不同個數及不同排列, Z_n 可分成多少類? 特別地, 設 n 邊形 B_n 有 $L_{(n)}$ 類, 則 $L(n)=$?

對第一問題的回答是肯定的。

定理3: 對任意偶數 $k\in[0,S_0(n)]$, 存在閉折線 Z_n, 使其 $S(n)=k$。

略證如下: 設 $Z_n=A_1A_2\cdots A_n$ 爲凸 n 邊形, (如圖10), 則 $S(n)=10$, 知對 $k=0$, 結論正確。現在依次把頂點 $A_2,A_4,\ldots,A_n$ (n 爲偶數) 或 A_{n-1} (n 爲奇數) 移到對角線 A_1A_3, $A_3A_5,\ldots,A_nA_1$ (n 爲偶數) 或 $A_{n-2}A_n$ (n 爲奇數) 內側的 $A_2',A_4',\ldots,A_n'$ 或 A_{n-1}'。所得折線 $A_1A_2'A_3\cdots A_n$, $A_1A_2'A_3A_4'A_5\cdots A_n,\ldots,A_1A_2'A_3A_4',\cdots,A_{n-1}\,A_n'$ (n 爲偶) 或 $A_1A_2'A_3A_4'\cdots A_{n_2}A_{n-1}'A_n$ (n 爲奇數) 的雙折數即分別爲 $k=2,4,\ldots,n$ (n 爲偶數) 或 $n-1$ (n 爲奇數) (即每移一個頂點 A_k 到對角線 $A_{k-1}A_{k+1}$ 內側的 A_k', 就增加以 A_k' 爲共同端點的雙折邊), 證畢。



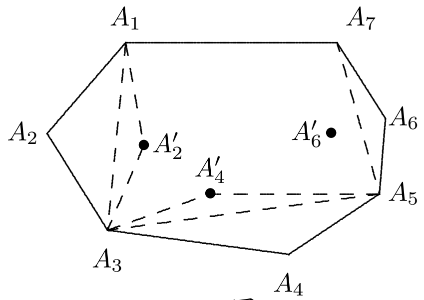


圖10

第二問題的後一半, 就是多邊形的分類問題。觀察圖11所示的3-7邊形, 可以得到若干資料。圖中的 d 表示單折邊, s 表雙折邊, 而一個 n 邊形唯一對應著 $2m$ 個 s 和 $k=n-2m$ 個 d 組成的環形排列, 因此 $L(n)$ 就等於這種排列的個數。

由圖11中看到 $L(3)=1$, $L(4)=2$, $L(5)=4$, $L(6)=8$, $L(7)=9$。可見, 只能作出 $L(n)$ 遞增的猜想。因此, 第二個問題離解決尚遠。

(2)Z_n的邊與邊之間交點個數 $\theta(n)$ (頂點不計, k 條邊交點算 C_k^2 個) 叫做 Z_n 的自交數, 記 $\theta_0(n)=\max\theta(n)$, 則我們已證得

$$\theta_0(n)=\begin{cases}\frac{n(n-3)}{2} & n\ge 3 \text{ 爲奇數}\\ \frac{n(n-4)+2}{2} & n\ge 4 \text{ 爲偶數}\end{cases}$$
$$=\frac{n^2-3n}{2}-\frac{1}{4}[(-1)^n+1](n-2)\qquad(n\ge 3)$$

於是有 $0\le 0(n)\le\theta_0(n)$; 而多邊形的 $\theta(n)=0$, 證明上述公式時構造的閉折線使其 $\theta(n)=\theta_0(n)$。那麼有如下兩個問題:

第一. 是否對任何整數 $k\in(0,\theta_0(n))$, 都存在 Z_n 使其 $\theta(n)=k$?

第二. 對符合條件的 $k: 0\le k\le\theta_0(n)$, 使得 $\theta(n)=k$ 的 Z_n 怎樣分類? 共有多少類?

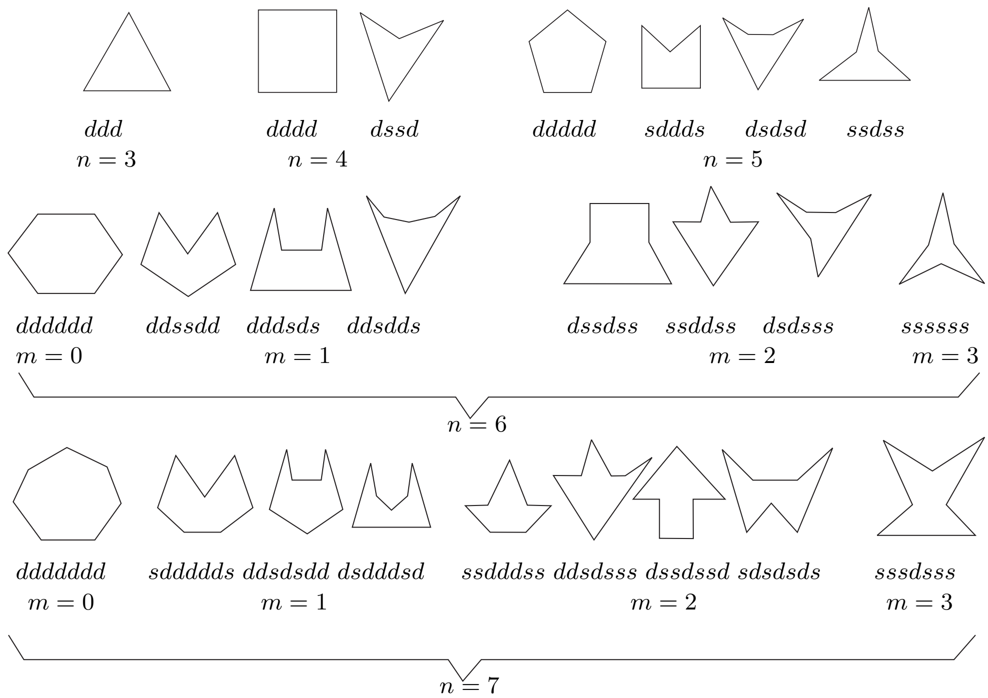


圖11

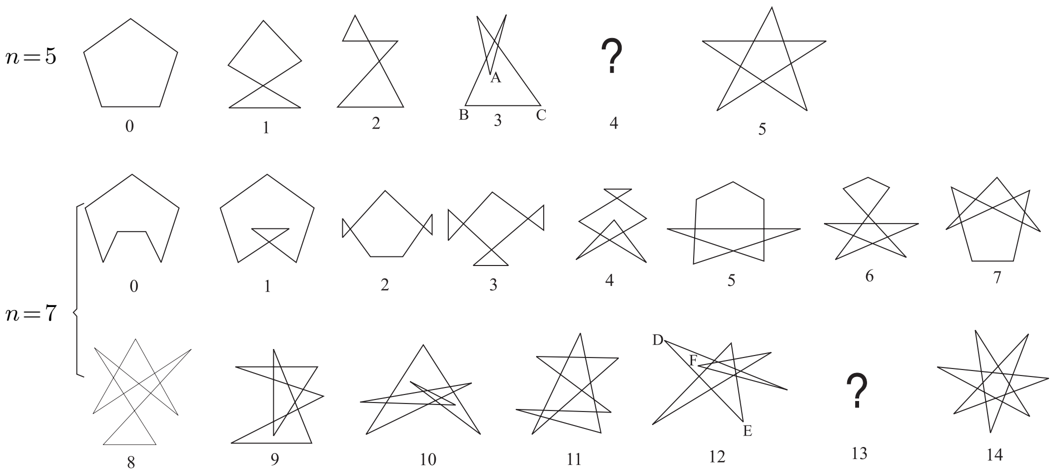


圖12

通過實際構圖不難知道, 當 $n = 3, 4, 6, 8$ 時, 第一問題的回答是肯定的。現在, 我們來看看 $n = 5$ 和 $n = 7$ 的情形 (如圖12)(圖下面標的是該折線的自交數)。

首先, 我們看到若干演化的規律, 使得具有某一自交數 k 的 Z_n 如果存在, 則具有另一自交數 $k \pm 2$ 的圖形 Z'_n 也存在。比如, 上述 $\theta(5) = 3$ 的 Z_5 存在, 如 A 越過 BC 邊, 則五角星 Z'_5, 使 $\theta(5) = 5$。又如將 $\theta(7) = 12$ 的 Z_7 中的 F 點穿過 DE

邊, 即得 Z_7' 使 $\theta(7)=14$ 等等。但無論如何, 演化不出使 $\theta(5)=4$ 和 $\theta(7)=13$ 的閉折線 Z_5 和 Z_7。我們猜想: 不存在自交數爲4的五邊閉折線和自交數爲13的7邊閉折線。怎樣證明? 對於哪些 n, 存在著相應的 $k\in(0,\theta_0^{(n)})$, 使得 $\theta(n)=k$ 的 Z_n不存在?

在圖13中, 畫出了 Z_n 和 Z_n 的三種聯接方式, 從而有

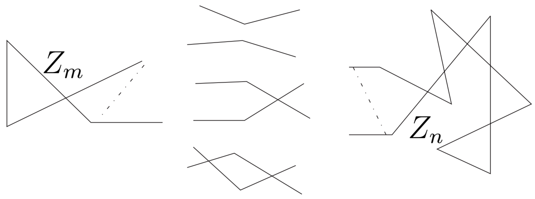


圖13

定理4: 若存在 Z_m, Z_n 使 $\theta(m)=k$, $\theta(n)=\ell$, 則存在 Z_{m+n}, 使 $\theta(m+n)=k+l$, $k+l+1$ 及 $k+l+2$。

(3) 我們知道, 沿著 Z_n 的邊行走有兩個方向, 當我們按一個方向沿周界走遍 Z_n 時, 我們實際上圍繞某個中心轉過了 $H(n)$ 圈, 那麼 $H(n)$ 就叫做 Z_n 的環數。計算方法是(以圖14所示的 Z_5 爲例):

1. 給折線選一個環繞方向: $A_1\to A_2\to\cdots\to A_5\to A_1$;
2. 在平面上任選一點 O, 作 $\bigcirc O$;
3. 作向量 $\overrightarrow{OB_i}=k_i\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ ($k_i>0$, $i=1,2,\ldots,5$, A_6 即爲 A_1) 交 $\bigcirc O$ 於 B_i, 則 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 即對應於 B_i;
4. 於是由 A_1($\overrightarrow{A_5A_1}$ 方向) 出發, 依次走過 A_2, A_3, A_4, A_5, 再回到 A_1, 共轉了5次彎 (轉角依次爲 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_5$, 稱爲折角)。

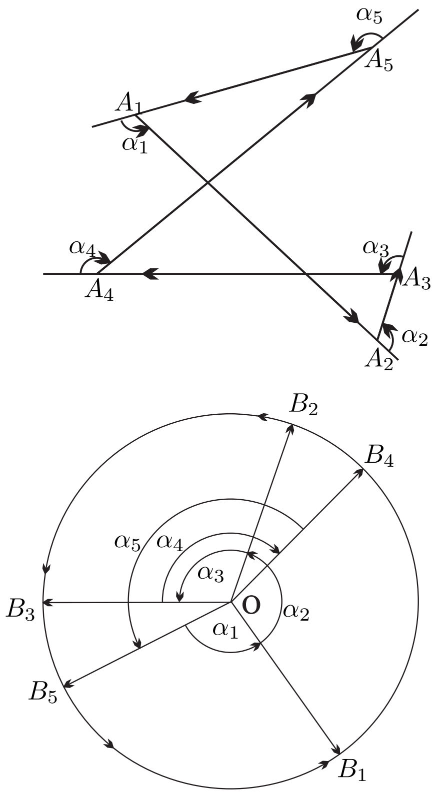


圖14

這時, 轉過的週數就相當於由 B_5 出發依次經 B_1、B_2、B_3、B_4 再回到 B_5 時, 繞 O 點轉過的圈數, 如角度 (以弧度爲單位) 選定逆時針爲正, 順時針爲負, 則易見折線 Z_n 的環數

$$H(n)=\frac{1}{2\pi}\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right|$$

命 $h(n)=\min H(n), H_0(n)=\max H(n)$, 則由圖15(因三角形外角和爲 2π) 易知

$$h(n)=\begin{cases}1, n=3\\ 0, n\geq 4。\end{cases}$$

對 $H_0(n)$, 有如下資料:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$H_0(n)$	1	1	2	2	3	3	4	4	$\cdots$

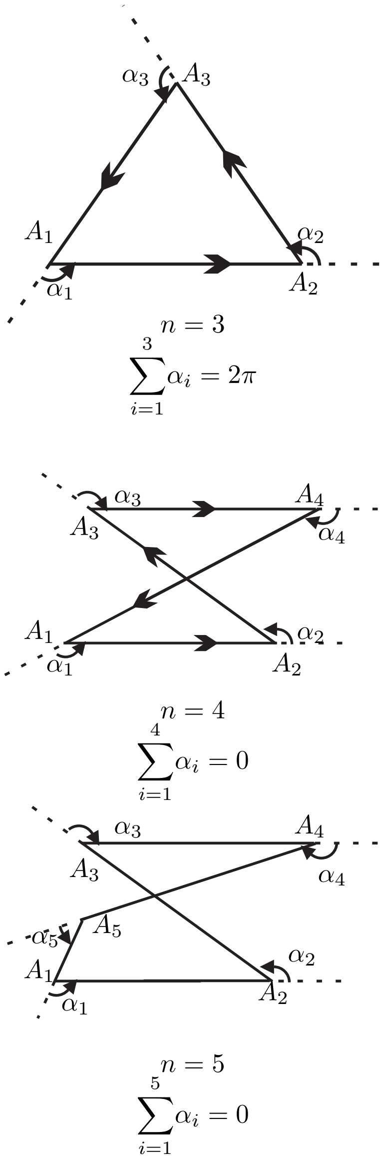


圖15

於是猜想有

定理5: n 邊折線 Z_n 的最大環數

$$H_0(n) = [\frac{n-1}{2}] = \frac{n}{2}\frac{3+(-1)^n}{4} \quad (n \geq 3)$$

略證: 按“折角”定義, $-\pi < \alpha_i < \pi$, $H(n)$ 要盡可能大, α_i 就要同號 (Z_n 爲單折邊), 因而不妨取 $0 < \alpha_i < \pi$, $0 < \sum_{i=1}^{n}\alpha_i < n\pi$, 就是

$$0 < H(n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i < \frac{n\pi}{2\pi} = \frac{n}{2}$$
$$\therefore H_0(n) < \frac{n}{2}$$

另一方面, 文獻 [3]中證明了 n 邊 $c = H(n)$ 環單折邊閉折線頂角和 $\sigma(n,c) = (n-2c)\pi$, 由於 m 階 n 邊星形 (即每個頂角內含 $m(0 \leq m \leq n-3)$ 個頂點的 n 邊星形), 知其頂角和 $\sigma(n,c) = (m+1)\pi$, 當 n 爲奇數時, 星形最小階數 $m = 0$, 這時 $c = H(n)$ 達到最大 $H_0(n)$, 就是

$$(0+1)\pi = (n-2H_0(w)\pi,$$
$$\therefore H_0(n) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \quad (n \text{ 爲奇數})$$

n 爲偶數時 $n-1$ 爲奇數, 考慮 $(n-1)$ 邊回式星形 (截去一頂角即爲 n 邊“准”星形, 環數不數), 按上述討論得

$$H_0(n) = \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} \quad (n \text{ 爲偶數})$$

綜合 n 的奇、偶兩種情形, 即得欲證。

那麼, 類似的問題是: 對任一整數 $k \in [h(n), H_0(n)]$, 是否存在 Z_n, 使 $H(n) = k$? 回答是肯定的。

定理6: 對自然數 $n \geq 3$ 和任一整數 $k: h(n) \leq k \leq H_0(n)$, 存在閉折線 Z_n, 使得 $H(n) = k$。

引理: 若存在 Z_n, 使 $H(n) = k$, 則對任何 $m \in N$, 有 Z_{n+m} 使 $H(n+m) = k$。

證: 按圖16的方法, 在 Z_n 的 P 處把它“打開”, 接上一個 m 邊的開折線即得 Z_{n+m}, 其環數未變。

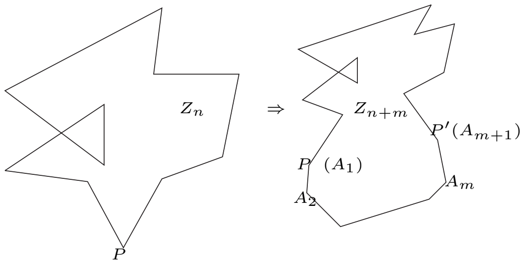


圖16

定理6 的證明: 設整數 $k : h(n) \leq k \leq H_0(n)$, 現取整數 $p \leq H_0(n)$, 使得

$$k = \frac{p}{2} - \frac{3+(-1)^p}{4}$$

則由定理5知, 存在 Z_p, 使得

$$H(p) = \frac{p}{2} - \frac{3+(-1)^p}{4} = k$$

取 $t = n - p$, 由引理即知存在 $Z_n = Z_{p+t}$, 使 $H(n) = H(p+t) = k$。

這樣一來, 如果一條折線 Z_n 定下來了, 那麼它的雙折數 $S(n)$, 自交數 $\theta(n)$ 和環數 $H(n)$ 也就定下來了, 而文獻 [3]曾提出:

問題或猜想 22: 應進一步探索“自交數”和單、雙折邊特性在折線結構上的作用, 能否依此對折線進行一般的分類?

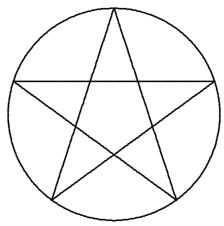
問題或猜想 23: 折線還有甚麼結構特徵? 現在, 作爲補充, 我們可以更具體地提出:

第一. 對於同一條折線 Z_n 來說, $S(n)$, $\theta(n)$, $H(n)$ 之間有何關係?

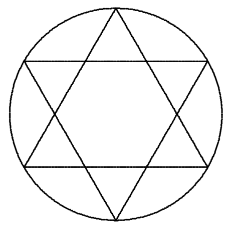
第二. 對整數 k, l, m 滿足 $k \in [0, S_0(n)]$, $l \in [0, \theta_0(n)]$, $m \in [h(n), H_0(n)]$, 是否存在 Z_n, 使得 $S(n) = k$, $\theta(n) = l$, $H(n) = m$? 若存在 Z_n, 它是否唯一? 在什麼條件下是存在且唯一的?

3. 星形折線研究

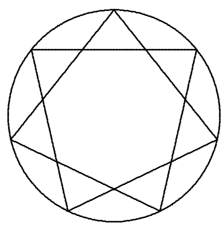
除了對折線的一般性質進行探索外, 還應選取若干類型的特殊折線進行深入研究, 首先被選中的是星形。



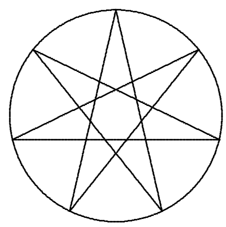
(1) $n = 5$, $c = 2$



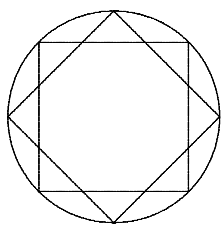
(2) $n = 6$, $c = 2$



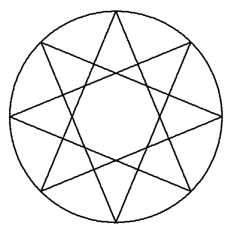
(3) $n = 7$, $c = 2$



(4) $n = 7$, $c = 2$



(5) $n = 8$, $c = 2$



(6) $n = 8$, $c = 3$

圖17

1951年, 傅種孫在 [1]中研究了正星形 (圖17) 將圓 n 等分, 作成圖的內接 n 邊星形, 每邊跨 c 段弧, c 叫邊幅 (不難證明, $0 < c < \frac{n}{2}$ 時, c 正好是環數 $H(n)$)。[1]證明了: 正 n 角星共有 $Z_{a|n}\varphi(a)$ 個 ($\varphi(a)$ 爲 Euler 函數, 表示小於 a 且與 a 互質的數的個數), 若 $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_\lambda^{\alpha_2}$ (質因數分解式), 則 n 角星共分爲 $F(n) = \prod_{i=1}^{\lambda}(\alpha_i+1)$ 類, 其中在 $n/a = b$ 支的一類中, 共有 $\varphi(a)$ 個。

例如當 $n = 7$ 時, 獨支的 $\varphi(7) = 6$ 個, 邊幅 c 從1到6的各1個, 但 $c = 1$ 與 $c = 6$ 的相同, $c = 2$ 與 $c = 5$ 的相同, $c = 3$ 與 $c = 4$ 的相同, 故只有3個 ($c = 1$ 的是正7邊形, 圖17中畫出了$c = 2, 3$兩種情形, 7支的 (與 $c = 0$ 的相同) 退化成7個點。

又如當 $n = 6$ 時有 $c = 2$ 的2星形 (如圖17中的 (2))。另外, 星形的頂角爲等弦構成的圓週角, 如弦跨 c 段弧 (以下總認爲 $0 < c < \frac{n}{2}$), 則頂角對 $d = n-2c$ 段弧, d 就是角幅, 則正 n 角星每個頂角爲 $d\pi/n$, 於是邊幅爲 c 的正 n 角星頂角和爲

$$D_c = n\cdot\frac{d\pi}{n} = (n-2c)\pi \quad (0 < c < \frac{n}{2})。$$

我們著重研究“獨支星形”即素星形(二支以上的叫做合星形)。邊幅爲 c 的 n 邊素星形存在的充要條件是 $(c, n) = 1$, 其個數爲 $K_n = \varphi(n)/2$。

一般星形由凸n邊形的邊或“同類的”對角線生成。如圖18所示的凸7邊形所生成的星形共有三個: 4階7邊星形 $A_1A_2\cdots A_7$ (即凸7邊形本身, 它每個頂角內含4個頂點 (如 $\angle A_1$, 中含 A_3, A_4, A_5, A_6 等), 故謂4階), 2階7邊星形 $A_1A_3A_5A_7A_2A_4A_6$ (點劃線畫出), 其每個頂角內含2個頂點和0階7邊星形 $A_1A_4A_7A_3A_6A_2A_5$。如前所述, 我們把每個頂角內含 $m(0 \le m \le n-3)$ 個頂點的 n 邊形稱爲 m 階 n 邊星形。(“同類的”對角線是指“相隔頂點一樣多”的對角線。) 我們有

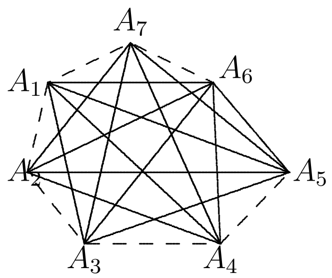


圖18

定理7: m 階 n 邊 $(0 \le m \le n-3)$ 星形的環數

$$H(n) = \frac{n-m-1}{2}$$

證明: 頂角內含 m 個頂點, 就含有 $(m+1)$ 條凸n邊形的邊, 那麼在這頂角的每條邊 (即生成星形的對角線) 之外, 就有 (圖19) $\frac{n-(m+1)}{2}$ 條凸多邊形的邊, 因此, 遍歷這 m 階 n 邊星形的各邊一次, 也就相當於遍歷凸n 邊形各邊 $\frac{n-m-1}{2}$ 次,

$$\therefore H(n) = \frac{n-m+1}{2}$$

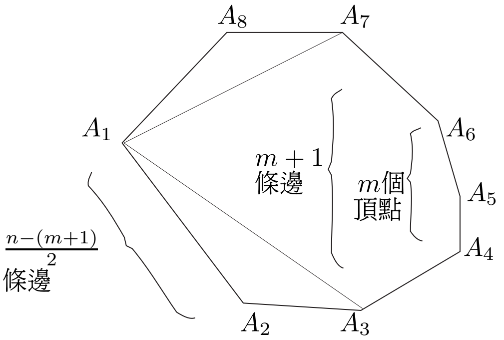


圖19

定理8: m 階 n 邊星形的頂角和

$$D(n,m)=(m+1)\pi$$

證明: 在第2節的 (3) 中給出的環數公式是 $H(n)=\frac{1}{2\pi}|\sum_{i=1}^n \alpha_i|$, 由於我們這裡星形的邊都是單折邊 (稱爲單折邊星形或回式星形), 因此它的頂角的外角的符號相同, 不妨設爲正, 又記相應頂角爲 A_i, 則 $A_i+\alpha_i=\pi$, 於是

$$\begin{aligned} H(n) &= \frac{1}{2\pi}|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i| = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}(\pi - A_i) \\ &= \frac{1}{2\pi}(n\pi - D(n,m)) \\ \therefore \quad D(n,m) &= [n-2H(n)]\pi \end{aligned}$$

又由定理7, $H(n)=(n-m-1)/2$, 代入上式即得欲證。

$D(n,m)=(m+1)\pi$ 與星形邊數無關而僅與階數有關, 說明頂角和是關於星形邊數的不變量。

爲了弄淸星形組合特徵並應用代數方法研究星形問題, [4]中討論了"序號數列的遍歷性"。

問題: 沿星形所在凸多邊形某一方向將頂點標號 $1,2,3,\ldots,n,n+1,n+2,\ldots$ (如圖20, 約定 $n+i$ 與 i 標同一頂點), 然後從"1"出發, 沿邊前行, 所經頂點依次記作 $1=b_1<b_2<\cdots<b_n$, 最後回到 $b_1=1$。如圖20所示: $b_1=1$, $b_2=3$, $b_3=5$ (每次取使 $\{b_i\}$ 遞增的最小數, 故不取 $b_2=8$, $b_3=10$), $b_4=7$, $b_5=9$。則

$$B_n=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$$

叫做序號數列。顯然, 星形對應的序號數列的模 n 剩餘是 $0,1,\ldots,n-1$ 的一個排列, (稱 B_n 的這個性質爲遍歷性), 反之, 如 B_n 具有遍歷性, 則順次連接 $b_1,b_2,\ldots,b_n$, 就生成一個 n 邊星形。且有

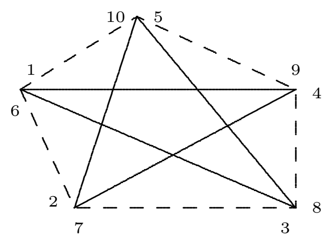


圖 20

定理9: 若 B_n 是公差爲 r $(r\in N)$ 的等差數列, 則 B_n 具有遍歷性的充要條件是 $(n,r)=1$。

這裡 $r=H(n)-1$ 可叫做生成數, 如把生成數爲 r 的 n 邊星形記爲 $P_r(n)$, 則文[5]證明了

定理10: 正星形 $P_r(n)$ 的第 i 層上的交點構成正星形 $P_{r-i}(n)$, $i=1,2,\ldots,r$,

其邊長

$$a_i = 2R\tan\frac{r-i+1}{n}\pi\cos\frac{r+1}{n}\frac{1}{n}$$
$$(i=0,1,\ldots,r)$$

其中 R 是 $P_r(n)$ 外接圓半徑。

* * *

事實上, 近年對折線的某些度量性質也進行了很多研究, 限於篇幅, 此不贅述。

致謝: 作者衷心感謝審稿者所提出的修改意見。

参考文獻

1. 傅種孫, 從五角星談起,「中國數學雜誌」一卷二期, 1952年2月。
2. 楊之, 折線基本性質初探,「中學數學」(湖北), 1991年1月。
3. 楊之,「初等數學研究的問題與課題」, 湖南教育出版社 (長沙), 1993年5月第1版, 1996年3月第二次印刷。
4. 王方漢, 關於序號數列的遍歷性, 「數學通訊」(武漢), 1997年2月。
5. 王方漢, 正星形自交點構成的子星形系列,「數學通報」, 1995年12月。

—楊世明任職於天津市寶坻縣教研室, 張忠輔任教於蘭州鐵道學院—