網狀直線交點軌跡II

蕭健忠

在數學傳播第84期中, 提到了底下的問題:

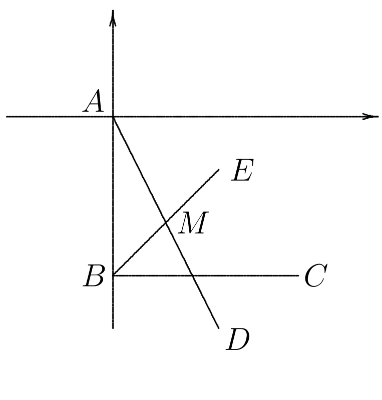
問題 C: ΔABC中, $\angle B$ 的大小是 $\angle A$ 的 n 倍, D、E 分別是 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 上的動點, 且$\angle EBC = n\angle DAB$, 設 M 是 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點, M 的軌跡為?

當時, 我們舉 $n=1$ 與 $n=2$ 的例子, M 的軌跡分別為圓及笛卡兒葉形線。這篇文章將給出一般的答案。

本文中, ΔABC 皆設為直角三角形, $\angle B = 90^\circ$, 且 A、B 的坐標固定為 $(0,0)$ 與 $(0,-1)$。

一. $n=3$ 的突破:

如圖一: M 是 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點, $\angle DAB = \varphi$, $\angle EBC = 3\varphi$,



圖一

直線 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AD}$ 的方程式為

(1) $AD: y = -x\cot\varphi$

(2) $BE: y+1 = x\tan 3\varphi$

由 (1), $\tan\varphi = -\frac{x}{y}$, 利用倍角公式,

$$\tan 3\varphi = \frac{3\tan\varphi - \tan^3\varphi}{1-3\tan^2\varphi} = \frac{x^3-3xy^2}{y^3-3x^2y},$$

代入 (2) 得

(3) $x^4 - y^4 = y^3 - 3x^2y$。

換成極坐標, 令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 代入 (3) 得

$$\begin{aligned}
&r^4(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\\
&= r^3\sin\theta(\sin^2\theta - 3\cos^2\theta)\\
&\Rightarrow r\cos 2\theta = \sin\theta(\sin^2\theta - 3 + 3\sin^2\theta)\\
&\Rightarrow r\cos 2\theta = 4\sin^3\theta - 3\sin\theta\\
&\Rightarrow r\cos 2\theta = -\sin 3\theta。
\end{aligned}$$

即 M 的軌跡為 $r\cos 2\theta + \sin 3\theta = 0$。

可以得到如此簡潔的極坐標方程式, 與 A、B 兩點的選擇有關, 尤其 A 當原點更是得以突破的關鍵。

利用相同的辦法, 當 $n=4$ 時, M 的軌跡爲 $r\sin 3\theta=\cos 4\theta$。

二. $n=4k+2$ 的情形:

有 $n=3$、$n=4$ 的成果, 再接再厲算出 $n=5$ 時, 軌跡爲 $r\cos 4\theta+\sin 5\theta=0$, 而 $n=6$ 時, 軌跡爲 $r\sin 5\theta=\cos 6\theta$。所以猜測 $n=$偶數時, 軌跡爲 $r\sin(n-1)\theta=\cos(n\theta)$, $n=$奇數時, 軌跡爲 $r\cos(n-1)\theta+\sin(n\theta)=0$。不過, 要證明可是非常繁複的工作, 首先要知道這兩件事:

(a) 將 $\cos(n\theta)$、$\sin(n\theta)$ 表示成 $\cos\theta$、$\sin\theta$ 的多項式。

(b) 將 $\tan(n\varphi)$ 表示成 $\tan\varphi$ 的分式多項式。

以上兩件事都可以從棣美弗定理導出, 爲了方便, 我們舉 $n=4k+2$ 的情形, 而其他情形是類似的。

(a) 由棣美弗定理

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta),$$

得

$$\cos(n\theta)=\sum_{j=0}^{2k+1}(-1)^jC_{2j}^n\cos^{n-2j}\theta\sin^{2j}\theta,$$
$$\sin(n\theta)=\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j-1}C_{2j-1}^n\cos^{n+1-2j}\theta\cdot\sin^{2j-1}\theta$$

(b)

$$\tan(n\varphi)=\frac{\sin(n\varphi)}{\cos(n\varphi)}=\frac{\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j-1}C_{2j-1}^n\tan^{2j-1}\varphi}{\sum_{j=0}^{2k+1}(-1)^jC_{2j}^n\tan^{2j}\varphi}。$$

除了 (a)、(b) 之外, 證明過程中還需要組合公式

(c) $C_m^n-C_{m-1}^n+C_{m-2}^{n-1}=C_m^{n-1}$, $\because$由巴斯卡定理 $C_m^n=C_m^{n-1}+C_{m-1}^{n-1}$, $C_m^n-C_{m-1}^n+C_{m-2}^{n-1}=C_m^n-(C_{m-1}^n-C_{m-2}^{n-1})=C_m^n-C_{m-1}^{n-1}=C_m^{n-1}$, 得證。

現在, 可以寫下問題 C 的解答:

解答一:

參考圖一: M 是 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點, $\angle DAB=\varphi$, $\angle EBC=n\varphi$, 直線 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AD}$ 的方程式爲

(1) $AD: y=-x\cot\varphi$

(2) $BE: y+1=x\tan(n\varphi)$

由 (1), $\tan\varphi=-\frac{x}{y}$, 利用 (b),

$$\tan(n\varphi)=\frac{\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^jC_{2j-1}^ny^{n+1-2j}x^{2j-1}}{\sum_{j=0}^{2k+1}(-1)^jC_{2j}^ny^{n-2j}x^{2j}}$$

代入 (2) 得

$$(y+1)\sum_{j=0}^{2k+1}(-1)^jC_{2j}^ny^{n-2j}x^{2j}=x\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^jC_{2j-1}^ny^{n+1-2j}x^{2j-1},$$

齊次項合併,

$$\sum_{j=0}^{2k+1}(-1)^jC_{2j}^ny^{n+1-2j}x^{2j}$$

$$-\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^j C_{2j-1}^n y^{n+1-2j}x^{2j}$$
$$=\sum_{j=0}^{2k+1}(-1)^{j+1}C_{2j}^n y^{n-2j}x^{2j},$$

$$\text{左式}=y^{n+1}+\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^j(C_{2j}^n-C_{2j-1}^n)\cdot y^{n+1-2j}x^{2j}$$
$$=y^{n+1}+\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^j(C_{2j}^n-C_{2j-1}^n+C_{2j-2}^{n-1})y^{n+1-2j}x^{2j}+\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j+1}C_{2j-2}^{n-1}y^{n+1-2j}x^{2j},$$

由(c)

$$=y^{n+1}+\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^j C_{2j}^{n-1}y^{n+1-2j}x^{2j}+\sum_{j=0}^{2k}(-1)^j C_{2j}^{n-1}y^{n-1-2j}x^{2j+2}$$
$$=y^2\sum_{j=0}^{2k}(-1)^j C_{2j}^{n-1}y^{n-1-2j}x^{2j}+x^2\sum_{j=0}^{2k}(-1)^j C_{2j}^{n-1}y^{n-1-2j}x^{2j}$$
$$=(y^2+x^2)\sum_{j=0}^{2k}(-1)^j C_{2j}^{n-1}y^{n-1-2j}x^{2j},$$

換成極坐標, 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 代入, 再由 (a) 得 $r\sin(n-1)\theta=\cos(n\theta)$。

三. 極坐標: 證明其實很簡單

發現答案的極坐標方程式如此簡潔, 覺得直接用極坐標來找方程式應該比較好, 結果正如預料。

解答二:

參考圖一: M 是 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點, $\angle DAB=\varphi$, $\angle EBC=n\varphi$。設 M 的極坐標 (r,θ), 即 $\overline{AM}=r$, $\theta=\varphi+\frac{3\pi}{2}$, 考慮 ΔABM, $\because \angle ABC=90°$, $\therefore \angle ABM=\frac{\pi}{2}-n\varphi$, $\angle AMB=\frac{\pi}{2}+(n-1)\varphi$; 又 $\overline{AB}=1$、$\overline{AM}=r$, 利用三角形的正弦定理, 得到

$$\frac{r}{\sin(\frac{\pi}{2}-n\varphi)}=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+(n-1)\varphi)},$$

即 $r\cos(n-1)\varphi=\cos(n\varphi)$, 將 $\varphi=\theta-\frac{3\pi}{2}$ 代入, 得

$$r\cos[(n-1)\theta-\frac{3\pi}{2}(n-1)]=\cos(n\theta-\frac{3\pi}{2}n),$$

分別以 $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$ 討論, 得到,

$n=$偶數時, $r\sin(n-1)\theta=\cos(n\theta)$,

$n=$奇數時, $r\cos(n-1)\theta+\sin(n\theta)=0$。

四. 結語

當發現直接利用極坐標, 證明其實很簡單的時候, 覺得在直角坐標上與多項式的搏鬥, 將成爲「抽屜裡的計算紙」, 最好藏起來。後來想想, 不一定簡單的證明就比較有價值, 在此題目中, 我們於直角坐標上的衝鋒陷陣, 似乎有意思多了。

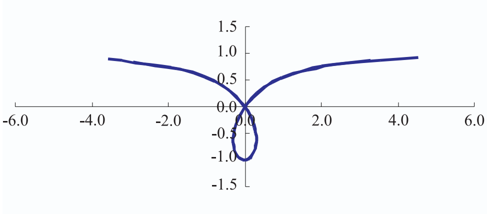
利用 Excel, 我們作出 $n=2,3,4,5,6$ 時, 極坐標方程式的圖形。看到這些圖形的人, 都覺得像是某種昆蟲, 而 $n=6$ 的圖形, 更讓人聯想到蜘蛛。在網狀直線中跑出蜘蛛來, 也算趣味十足吧!

參考資料:

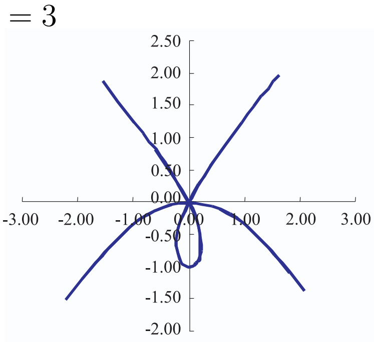
1. 蕭健忠, 網狀直線交點軌跡, 數學傳播季刊, 第二十一卷第四期, 1997, pp.68-71。

附圖:

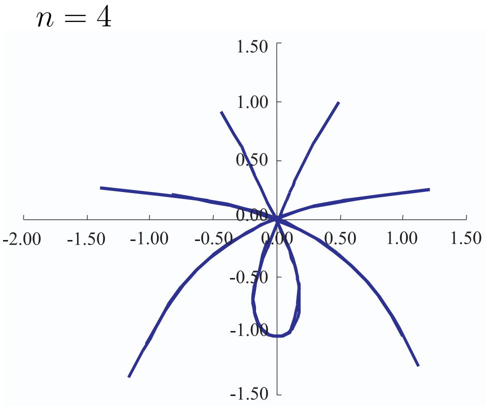
$n = 2$:



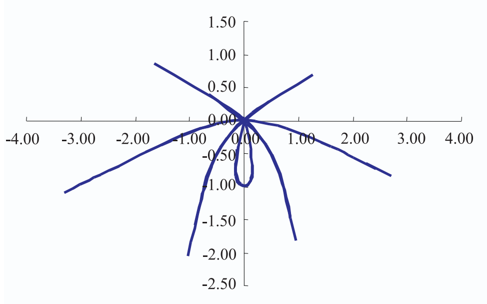
$n = 3$



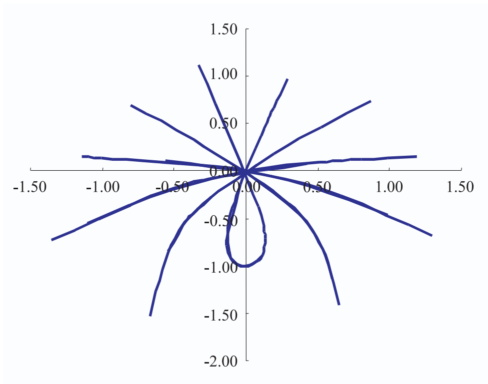
$n = 4$



$n = 5$



$n = 6$



—本文作者任教於聖功女中—