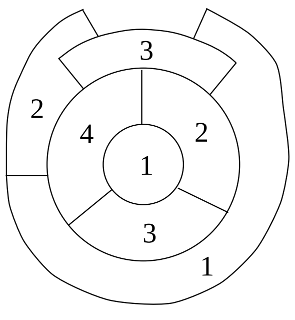
圖的著色遊戲*

朱緒鼎 · 蔡孟根 · 黃昱豪 · 何思賢 · 陳冠廷

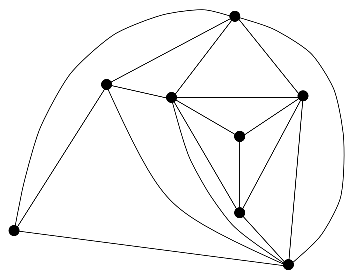
大家或許都聽說過四色定理。假設我們需要畫一張世界地圖, 爲了可清楚地看見每個國家的邊界, 我們把每一個國家塗上一種顏色, 有公共邊界的國家被塗上不同的顏色。至少需要多少種顏色才能把地圖畫好呢? 注意, 沒有公共邊界的國家是可以塗上一樣的顏色的。也許你會說, 這要看各個國家間的邊界是怎麼連結的, 才能確定需要多少種顏色, 比如說, 一百年前的世界地圖和現在的地圖可能需要的顏色不一樣, 一百年後的世界地圖需要的顏色也不一樣多。但是, 四色定理告訴我們: 不管地圖上的國家怎麼劃分, 最多只要四種顏色就可以把世界地圖畫好了 (唯一的假設條件是每個國家是一個連通的區域)。

我們看一個例子:

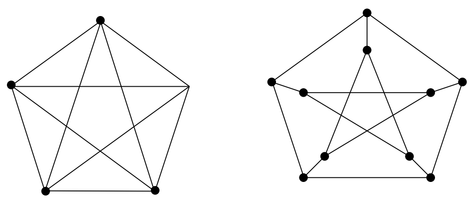


例1.

地圖的著色, 我們常將它化成圖的著色。比如上面這個例子, 將每一個國家用一個點來表示, 代表有公共邊界的兩個國家的兩點之間用一條線可連起來, 這條線可稱之爲邊。我們得到如下的結構:



像這樣的結構, 我們稱之爲一個圖, 準確地講, 一個圖是由一些頂點和一些邊組成。其頂點是任意的一組元素, 而每一條邊都是連結某兩個頂點的。下面是兩個圖的例子:



我們用 $G = (V, E)$ 表示一個圖, 其中 V 表示頂點集, E 表示邊集。有的圖是由某個"地圖"導出來的, 有些圖不可能由"地圖"導出來, 像上面兩個例子都不可由"地圖"導出來。

* 本研究承蒙八十七學年度「高雄區高中數學科學習成就優異學生輔導實驗計畫」資助, 特此致謝。

而圖的著色是什麼呢？　就是把圖的每一個頂點塗上一種顏色, 有邊相連的頂點則要塗不同的顏色。同四色定理所討論的問題一樣, 我們希望用的顏色愈少愈好。這最少的顏色數由圖 $G=(V,E)$ 的結構所確定。記 $\chi(G)$ 爲對 G 的頂點著色所需的最少顏色數, $\chi(G)$ 稱爲 G 的色數。例如圖2中的兩個圖, 一個的色數是5, 另一個的色數是3。

四色定理的另一個表述方法, 每一個由"地圖"導出來的圖 G 都滿足 $\chi(G)\le 4$。

本文介紹一個圖的著色遊戲, 是一種變形的著色問題。它是一個由兩個人玩的遊戲。玩遊戲所需要的是:

(一) 兩個人 A 和 B 。

(二) 一個圖 $G=(V,E)$ 。

(三) 一組顏色, 比如說若干隻彩色鉛筆。

遊戲規則如下:

(一) 輪流一人走一步, 由 A 走第一步。

(二) 輪到某人走的時候, 他就挑一個未著色的頂點, 挑一個顏色塗在該頂點上。
一定要保證有邊相連的頂點不著同樣顏色。

遊戲結束:

(一) 如果每個頂點都被著色, 則遊戲結束。

(二) 如果輪到某人走時, 雖然有頂點未著色, 但任何一種顏色都不適用於該頂點, 則遊戲結束。

遊戲勝負:

如果遊戲結束時, 每個頂點都被著色, 則 A 贏, 如果遊戲結束時, 還有未被著色的點, 則 B 贏。

所以, 玩遊戲時, 雖然兩人都在著色, 但各自目標相反, 可謂同床異夢。A 是想把圖的頂點著色著好, B 是想讓 A 著不好。B 是來搞破壞的。

現在的問題是誰會贏呢？當然這除了圖的結構之外, 還有顏色的多少是關鍵。顏色很多, 比如說, 和頂點數一樣多, 那自然就是 A 贏啦！顏色很少, 比如說, 少於 $\chi(G)$, 那自然是 B 贏啦! (因爲即使 B 不搞破壞, A 也著不好所有的頂點)。

一個圖的對局色數 $\chi_g(G)$ 是最少的顏色數使得 A 有一個穩贏的策略。反過來說, $\chi_g(G)-1$ 是最多的顏色數使得 B 有一個穩贏的策略。注意: 這是完全信息的二人零和遊戲, 所以, 任何情況下恰好有一個人有穩贏的策略。

我們看一個例子:

G

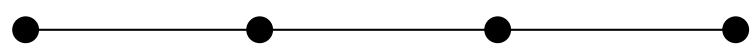
像上面這個圖, 對局色數是2, 也就是說如果有2個顏色, A 有穩贏的策略 (並不是說 A 穩贏, 只是說, 如果 A 不犯錯, 他就贏)。假設這兩種顏色是 $\{1,2\}$ (注意, 我們顏色的名字不叫紅、黃, 而叫1、2, 這樣方便, 因爲如果要100種顏色, 我們就取顏色的 $\{1,2,\ldots,100\}$, 而不用想哪100種顏色。在玩遊戲時, 顏色的多少是關鍵, 但顏色叫什麼名字, 一點關係都沒有)。

A 的策略就是先把中間一點著顏色1, 則以後就高枕無憂了。

當然, 如果 A 犯錯, 把邊上某點著顏色1, 則該 B 贏, 因爲 B 可把另一個邊上的頂點著顏色2, 則中間一點無顏色可用。

所以, 有兩種顏色時, A 有穩贏的策略。而只有一種顏色, 則該 B贏。故 $\chi_g(G)=2$

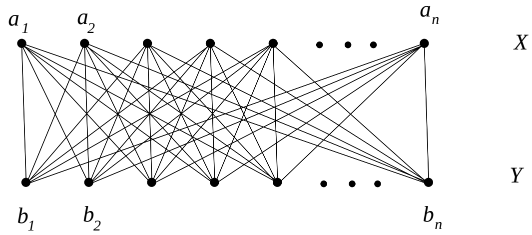
再看一個例子:



G'

這個圖的對局色數是多少呢? 請讀者想想看。

再看一個例子:



這個圖叫做完全二分圖, 記做 $K_{n,n}$, 共有 $2n$ 個頂點, 分成兩部份, X, Y。X 和 Y 各有 n 個頂點, X 的每一個頂點都和Y 的每一個頂點有邊相連。除此之外, 沒有其它的邊。

這個圖的對局色數是3。 $(n\geq 2)$

要證明這一點, 需證明當有3種顏色時, A 有穩贏策略, 而只有2種顏色時, B 有穩贏策略。

首先看有3種顏色 $\{1,2,3\}$ 的情形。

A 先把 a_1 著顏色1, 接下來不管 B 著色哪一個點, A 都挑一個未用過的顏色和 Y 中一個未著色的點 M 把該顏色塗上去。以後 A 就可以高枕無憂了。

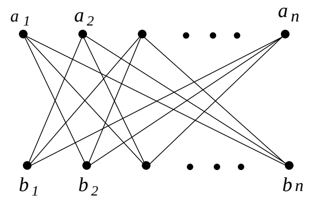
讀者不妨自己試試看。

接下來看只有兩種顏色 $\{1,2\}$ 的情形。

根據對稱性, 不妨假設 A 在第一步把 a_1 塗顏色1, 則 B 把 a_2 塗上顏色2。這樣一來, Y 中的頂點就沒有顏色好用了。

所以, $\chi_g(K_{n,n})=3$。

再看一個例子。令 G 是從 $K_{n,n}$ 中去掉下面的邊組成的圖: $\{a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n\}$。也就是說 G 是下面的圖:



請想想看, G 的對局色數是多少呢? 答案是 $x_g(G)=n$, 請讀者自己試試看, 是否可以證明這一點。

有沒有感覺到要確定一個圖的對局色數是很難的呢? 確實如此, 只要圖稍微複雜一點, 對局色數就很難求。這是壞事, 也是好事。要不然, 這遊戲就沒有趣了。

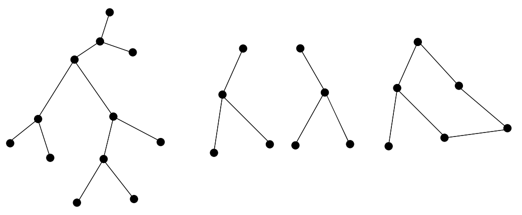
但是, 如果你仔細研究, 有些圖的對局色數還是可以得到一些有趣的結果。如果你找到一些最優策略而對方沒有, 則你遊戲中獲勝的機率就大大提高了。接下來我們證明一個定理。

首先我們定義什麼叫做一棵樹。

假設 $G=(V,E)$ 是一個圖, 如果從 G 的任何一個頂點, 都可以經由 G 的邊走到 G 的任何一個其它的頂點, 則稱 G 是連通圖。

如果 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 G 的一串不同的頂點 $(n\geq 3)$, 其中 x_ix_{i+1} 是 G 的邊, 且 x_nx_1 也是 G 的邊, 則稱這串頂點是 G 的一個迴路。如果 G 是一個連通的且沒有迴路的圖, 則稱 G 是一棵樹。

例子:



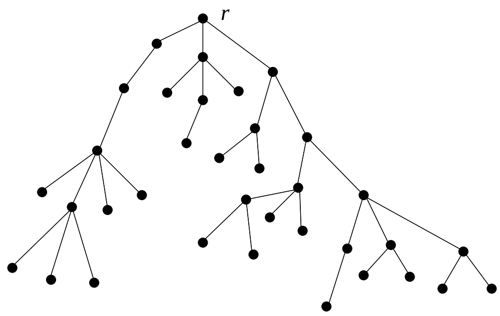
A　　　　　　B　　　　C

A 是樹, B 不是樹, 因爲不連通, C 不是樹, 因爲有迴路。

定理: 如果 G 是一棵樹, 則 $\chi_g(G) \leq 4$。

證明: 假定 G 是一棵樹, 假定有4種顏色 $\{1,2,3,4\}$, 我們需要給出 A 一個穩贏策略。

首先把樹找一個頂點“吊起來”。



最上角的頂點, 稱爲樹根, 記做 r 。

A 首先將 r 著色 (A 不選顏色, 也就是說隨便挑一個合法的顏色即可, 下面也是一樣)。

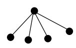
假設 B 下次著色頂點 x , 則 A 把連接 x 和 r 的“路”標出來, 上面的每個頂點都標一個記號, 比如說“active”(即“活的”) 或者是任何其它記號, 然後將該路上離 r 最近的未著色的點著色。

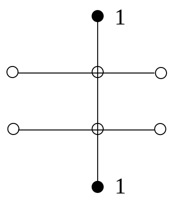
假設 B 下次再著頂點 y , 則 A 把連接 y 和 r 的“路”標出來。如果這條路上有原來已標過的頂點, 則沿 y 出發, 向 r 方向搜索, 碰到第一個已標號的頂點, 就把它著色。以後均照此方案應對。

萬一 A 按上面的方案找出的頂點已被著色, 則 A 挑一個離 r 最近的未著色的頂點著色。

A 用這種策略, 可證明每個未著色的頂點最多只有三個已著色的“鄰居” (i.e. 和它相連的頂點)。所以, 有4種顏色的時候, 永遠都不會出現未著色頂點沒有顏色可用的情形, 故 A 穩贏。

至於爲什麼每個未著色的頂點最多只有三個著色了的頂點呢? 證明留給讀者。

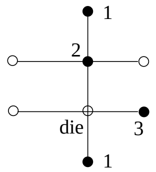
再更進一步, 我們想要探討樹的對局色數究竟是4, 3, 2還是1。我們可輕易的得知, 除開單個點的樹, 其對局色數均大於等於2。而且只有星狀的樹 (即形如 ), 其對局色數爲2。對其他的樹 T, $3 \leq x_g(T) \leq 4$。我們現在感興趣的是在何種情況下, 對局色數爲3; 何時爲4。我們先討論另外一種情形, 考慮一個殘局, 只給三種顏色時, B 有必勝策略。則 B 只要能在給定一圖時想辦法產生此種殘局, 就如同我們平常玩圍棋一樣, 總會有一些必勝的殘局一樣, 那此圖就需要4種顏色。我們先看看以下這個殘局:



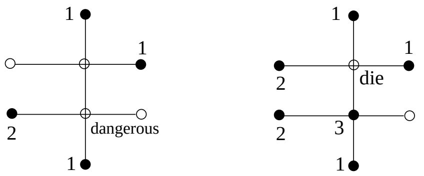
(殘局 A)

則該 A 下時, 有2種選擇, 而 B 的策略如下:

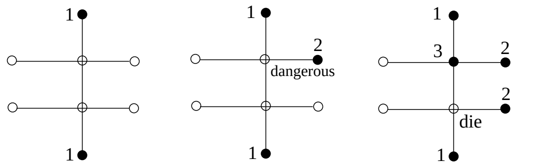
1.



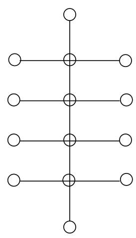
2.



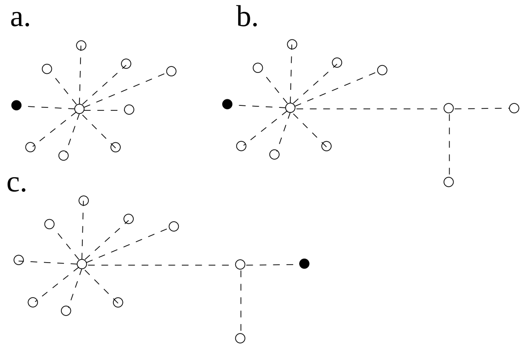
若 A 在此殘局可以不走, 則 B 也穩贏, 方法如下:



有了以上那個簡單的殘局, 我們可以建構一個圖形如下:



這個圖有個特性, 不管 A 一開始下何處, B 都有辦法產生以上的殘局, 所以 B 是穩贏的。請讀者觀察一下, 此圖有14個點。我們現在想要知道, 其點數在小於等於13點時是否需要4種顏色, 答案是否定的。也就是說, 對任何點數小於等於13的樹 T, $x_g(T)\le 3$。下面我們使用殘局分割法來證明, 當 T 爲點數 ≤ 13 的樹, 給3種顏色, A 有穩贏的策略。我們先看看以下這3個殘局 (此時爲 B 先下):

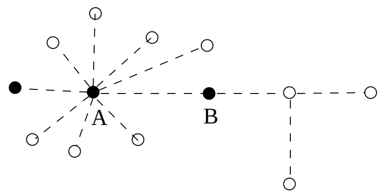


____代表一條長度 ≥ 1 的路。

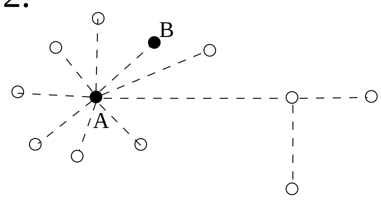
黑色的點代表已著色的點

在 a 殘局中, A 只要把那個度數大於2的點著上色就安全了, 而 A 必定能在這點上色, 因爲 A 要著這點時, 此圖上最多只用了2種顏色。在 b 殘局中, B 必不會著那二個度數大於等於3的點, 因爲若 B 著這兩點其中的一點, 那 A 就能把另外一點也著上色 (因爲此時最多只用了2種顏色), 這樣 A 就安全了。除此之外, B有3種選擇如下:

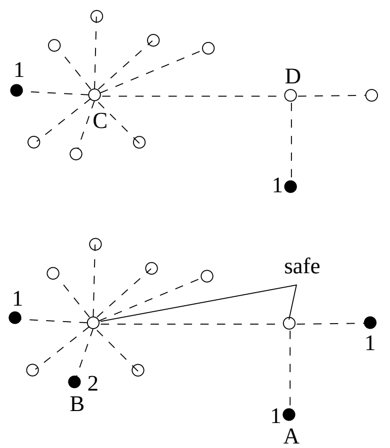
1.



2.



3.



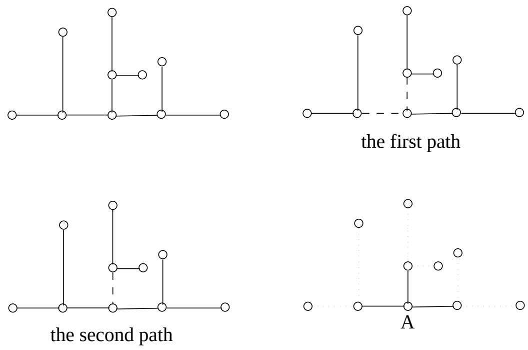
所以 b 殘局 A 是必勝的。而 c 殘局也和 b 殘局相同, B 也有3種情形, 而 A 的破解方法也相同。有了以上的3種 A 的必勝殘局, 我們就可直接證明了。

首先, 我們先證明其點數目小於等於13的圖形其度數大於等於3的點數目最多有5點。我們利用反證法: 若在一圖形上有6個度數大於等於3的點, 這6個點的度數和即爲18, 但因爲這6個點是連通的, 所以有5條邊重複計算, $18-5=13$ 條邊需要14個頂點, 所以頂點數目小於等於13的樹其度數大於等於3的點數目必定小於等於5。

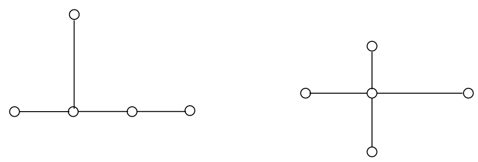
A 只要能把圖形中所有度數大於等於3的頂點著上色, 那麼 A 就安全了。我們現在可以知道, 小於等於13點的圖形, 其度數大於等於3的頂點數目爲0到5個。若一圖形中度數大於等於3的頂點數目分別爲0和1, 則很顯然的, A 都能在下第一步時, 就使所有度數大於等於3的點都被上色了; 若爲2, 則 A 一開始先選其中一個度數大於等於3的頂點上色, 則 B 下完後, 最多用了2種顏色, 則 A 再用第三種顏色在另一個度數大於等於3的頂點上色, 這樣 A 就安全了。

再來是度數大於等於3的頂點數目爲3的情形, 這3個頂點必在一 path 上, 證明如下: 假設這3點爲 P、Q、R, 考慮從 P 到 Q 的 path, 另一點 R 必定會和此 path 相連 (因爲樹是連通的), 若 R 不在此 path 上, 則在 P、Q 之間必定存在一點 W 和 R 相連, 則 W 的度數就爲3, 那這個圖形上就有4個度數大於等於3的點, 和原假設不合。注意這3點的 path, 把中間那點著上色就會形成兩個 a 殘局 (還有一些線段, 線段一定是安全的)。

再來是度數大於等於3的點數目爲4的情形, 我們要先證明小於等於13點的圖形其度數大於等於4的點數目最大爲3, 若一圖形中有4個度數爲4的頂點, 則其度數和爲16, 但有3條邊重複計算, $16-3=13$ 條邊至少需要14個頂點。若這4個度數大於等於3的頂點在一條 path 上, 那我們就在這條 path 上的第二或第三個頂點選一個“安全”的頂點上色, 安全是指不要產生介紹過的殘局 A, 度數小於等於13的圖形其度數大於等於4的頂點最多3點, 殘局 A 中必須有二個度數大於等於4的點相鄰, 把這3點度數大於等於4的中間那點著上色就安全了, 而這一點不是第二就是第三個點。所以在第二或第三個點選一安全的點著色就會產生 a、b、c 殘局。若這4個點不在同一個 path 上, 則利用證明3個度數大於等於3的頂點必在同一個 path 上的方法可以證明這4個點必在二個 path 上, 而這二個 path 必形成一棵樹, 在這棵樹上必有一點度數爲3, 把這點上色即會產生一些 a 殘局。以下介紹其過程:



最後就是度數大於等於3的點數目爲5的情形。若這5點皆在同一個 path 上, 則只要在中間那點上色就會產生 a、b 殘局且不會產生 $P-1$ 介紹過的那個殘局, 因爲當有5個度數大於等於3的頂點時, 這5個頂點只會有1個頂點度數會大於等於4, 若有2個度數大於等於4的頂點, 則這5點的總度數就爲 $2\times 4+3\times 3=17$, 有4條邊重複計算, $17-4=13$ 條邊至少需14個點。而在一圖形中若只有一個度數大於等於4的頂點是不會產生 $P-1$ 介紹過的殘局的。而若這5個度數大於等於3的頂點不在同一個 path 上, 則這5個點所形成的樹有以下二種:

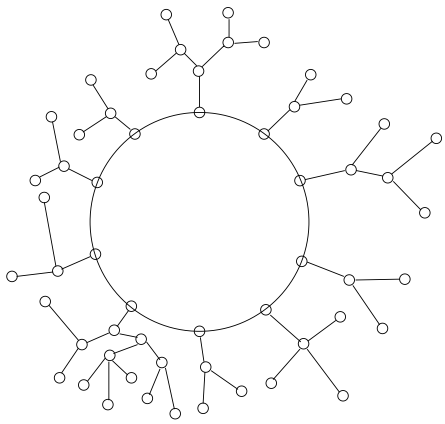


我們利用證明3個度數大於等於3的點必在同一個 path 上的方法就可證明以上的情形。在以上的樹, A 只要把那個度數最大的點著上色就安全了。由以上的證明, 我們可以了解: 小於等於13點的樹, 3色即已足夠。

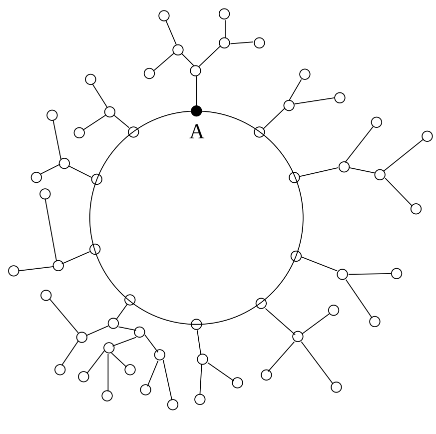
至於頂點數爲14的樹, 僅有一個這樣的樹其對局色數是4(見前面給出的例子)。不過, 要完全刻畫出哪一些樹的對局色數爲3, 似乎是一個很棘手的問題。目前尚無答案。

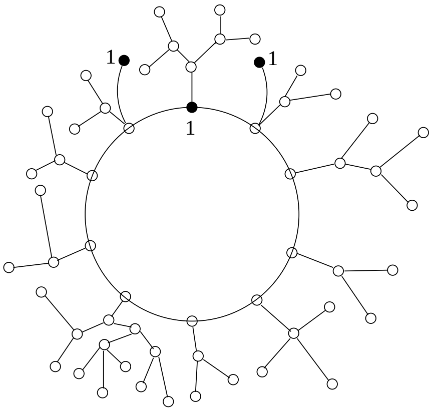
探討完了樹, 我們要更進一步探討有“圈”的連通圖。我們在此先假設以下討論的圖形皆爲 n 個點。我們知道, 一棵樹會有 $n-1$ 條邊, 則4色即足夠來替這棵樹上色。若我們再加上一條邊使此圖成爲 n 條邊, 則4色是否足夠呢? 答案是足夠的, 證明如下:

我們首先需要知道 n 條邊會形成一個圈, 所以圖形可以畫成以下的形狀:



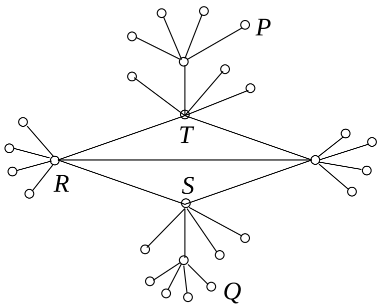
那麼 A 一開始就在圈上選一點上色, 則就會產生以下的殘局:





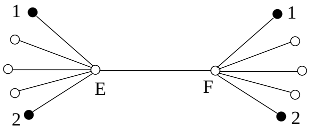
此時就會產生兩棵樹, 一棵只有一點被上色, 另外一棵就有二點被上色, 再來 A 只要利用樹的基本策略即可, 所以四色仍是足夠的。

再來對於 $n+1$ 條邊的圖形4色是否足夠, 我們可以找到一反例如下:

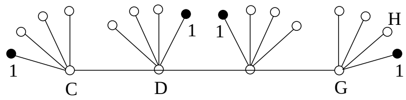


在我們證明此圖 4 色不夠之前, 我們先給定以下二個殘局, 這二個殘局都是一棵樹且4色是不夠的。

1.



2.



在殘局1中, B 必能迫使 A 在 E 或 F 著上第三種顏色, 假設在 E 上色, 那B 在 F 的外圍再著上第四種顏色, 那 F 就死了 (4色不夠)。在殘局2中, 不管 A 如何下, B 都有辦法使它變爲殘局1。B 的策略就是迫使 A 在 C 或 D 上色, 假設 A 在 C 上色, 那 B 就在 G 上 C 的顏色, 這樣就產生了殘局1; 若 A 在D 上色, 那 B 就在 H 上 D 的顏色, 如此也會產生殘局1, 當然4色是不夠的。有了以上這二個4色不夠的殘局, 我們就可以證明以上那個 $n+1$ 條邊的反例4色是不夠的。B 的策略是迫使 A 在 R 或 T 上色, 若 A 在 T 上色, 那 B 就在 S 著上另一種的顏色, 如此就會造成殘局1; 若 A 在 R 上色, 那 B 就在 P 或 Q 著上 R 的顏色, 那這樣就會造成殘局2, 當然以上兩種情形4色皆是不夠的。所以 n 個頂點 n 條邊的連通圖4色就足夠, 但是 n 個頂點 $n+1$ 條邊的連通圖則4色不一定夠。

—本文作者朱緒鼎任教於中山大學數學系, 蔡孟根、黃昱豪就讀於高雄中學, 何思賢、陳冠廷就讀於高師附中—