傅立葉變換

單維彰

這是我計畫要投稿給數學傳播的傅立葉三部曲之第二部。第一部傅立葉級數已經在 1998 年刊出 [1], 此後我就把這個計畫擱置了。直到 2000 年春, 承蒙劉晉良教授的厚愛與敦促, 終於將相關的講義集結於此。這篇報告的背景與目的, 和前一部 [1] 相同。但爲了完整性, 在此重述一遍。

一. 前言

由於數位化的聲音與影像日益成爲最主要的資料形態, 因此對於數位訊號處理 (DSP: Digital Signal Processing) 的知識與技術之需求, 也就日益增加。我認爲訊號處理這門課題應該會成爲應用數學的一支重要方向, 所以希望這一代的學生能夠及早接觸這個領域。於是, 我從八十四年起, 在中央大學開始了一門課程: 計算富氏分析。這門課設計給大學三、四年級選修, 預備知識就是微積分和線性代數。

爲了有足夠的時間處理應用課題, 我們必須精簡地介紹數學基礎理論。何況大部分學生並不具備完整的數學背景。我們雖鼓勵學生同時選修實變函數論或富氏分析, 以收相輔相成之效, 但是很少學生接受這樣的建議。所以, 我們必須在比較短的時間內, 爲這門課準備自己的數學基礎。而第一部曲 [1] 就是我所設計的三小時傅立葉級數課程, 現在這第二部曲是接著的三小時傅立葉變換課程。不同的是, 在前一部中所提的定理, 大多可以用基本的微積分來證明, 所以就附上了證明。但是此處所提的某些定理, 已經不再基本, 所以就只有「說明」而沒有「證明」。

此間的內容雖然簡單而且標準, 卻不爲一般的數學基礎課程所函蓋。所以, 想藉著數學傳播的園地, 將這一小段經過整理的教材與同仁分享, 尙祈各方先進不吝指教。

二. 定義

傅立葉級數只處理了 2π 週期函數: 2π 週期函數可以被整數頻率的正弦餘弦波所合成。那麼對於週期比 2π 大的週期函數呢? 對於非週期性的函數呢? 傅立葉級數就要被推廣爲傅立葉變換。傅立葉變換和傅立葉級數一樣, 可以被理解成一個從時間域 (time domain) 轉換到頻率域 (frequency domain) 的運算。

回顧傅立葉級數的定義 [1, (2)–(3)]: 若 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是 2π 週期函數、且

$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx$ 可積, 稱之爲平方可積的 2π 週期函數, 記做 $f(x) \in L_p^2(-\pi,\pi)$。則所謂 $f(x)$ 的傅立葉級數就是

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx} \tag{1}$$

其中

$$f_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

若將 $f(x)$ 視爲一個訊號, 則 $|f_k|$、$k \in \mathbb{Z}$, 可以視爲 $f(x)$ 在整數頻率波上的振幅。基於此, 傅立葉級數可以被視爲一個 2π 週期訊號在時間域和頻率域之間的轉換: 用 (2) 式使得 $f(x) \mapsto \{f_k\}$ 的步驟稱爲分解、用 (1) 式使得 $\{f_k\} \mapsto f(x)$ 的步驟稱爲合成或還原。

現在, 如果 $f(x)$ 是個平方可積的 4π 週期函數, 就不能套用前面的公式。但是 $f(2x)$ 是個 2π 週期函數, 所以可以套用 (1)–(2) 得到 $f(2x) = \frac{1}{2\pi}\sum c_k e^{ikx}$, 其中

$$\begin{aligned} c_k &= \int_{-\pi}^{\pi} f(2x) e^{-ikx}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x) e^{-i\frac{k}{2}x}\, dx \end{aligned}$$

經過變數變換, 也可以寫做 $f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum c_k e^{i\frac{k}{2}x}$。換句話說, 4π 週期函數可以被 2 分之整數頻率的正弦餘弦波所合成。

同理, 如果現在 $f(x)$ 是一個平方可積的 $2n\pi$ 週期函數, 則它可以被 n 分之整數頻率的正弦餘弦波所合成:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{i\frac{k}{n}x}\right) \tag{3}$$

其中

$$f_k = \int_{-n\pi}^{n\pi} f(x) e^{-i\frac{k}{n}x}\, dx \tag{4}$$

觀察 (3) 式, 如果可以找到一個函數 $\hat{f}(\omega)$, 使得 $\hat{f}(\frac{k}{n}) = f_k$, 則 (3) 的括號內可以寫成

$$\frac{1}{n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\frac{k}{n}) e^{i\frac{k}{n}x}$$

我們認得這個形式, 它就是函數 $\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}$ 在 $\{\omega = \frac{k}{n} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 這些節點上所做的 (左或右) 黎曼和。我們也知道, 若 $n \to \infty$ 的極限存在, 則稱 $\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}$ 在 $\omega \in (-\infty,\infty)$ 的廣義積分 (improper integral) 存在, 記做

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\frac{k}{n}) e^{i\frac{k}{n}x} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \tag{5}$$

而當 $n \to \infty$ 的時候, 所謂 $2n\pi$ 週期函數就成了 ∞ 週期函數, 也就是根本沒有週期性的意思。所以, 只要 $f(x)$ 是個平方可積函數, 亦即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx$ 可積、記做 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, 而且可以找到 $\hat{f}(\omega)$ 使得 (5) 式成立, 那就有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega \tag{6}$$

將 (1) 和 (6) 對照著看, 發現它們如出一轍。(1) 是說, 一個 $L_p^2(-\pi,\pi)$ 中的訊號 $f(x)$ 可以由整數頻率的正餘弦波 e^{ikx} 還原回來。那麼 (6) 似乎是說, 一個 $L^2(\mathbb{R})$ 中的訊號 $f(x)$ 可以由實數頻率的正餘弦波 $e^{i\omega x}$ 還原回來。

讓我們將存在或不存在的問題留到稍後, 純粹就形式而言, 由 (4) 式可以定義

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx, \quad \omega \in \mathbb{R} \tag{7}$$

而 $|\hat{f}(\omega)|$、$\omega \in \mathbb{R}$, 可以視爲 $f(x)$ 在實數頻率波上的振幅。$\hat{f}(\omega)$ 就稱爲 $f(x)$ 的傳立葉變換 (Fourier transform)。傳立葉變換可以被視爲一個非週期性訊號在時間域和頻率域之間的轉換: 用 (7) 式使得 $f(x) \mapsto \hat{f}(\omega)$ 的步驟稱爲分解、用 (6) 式使得 $\hat{f}(\omega) \mapsto f(x)$ 的步驟稱爲還原。故 (6) 式又稱爲傳立葉逆變換 (Fourier inverse transform)。

有些讀者或許會注意到, 不管 n 多麼大, $\frac{k}{n}$ 仍是有理數。所以 (4) 式頂多只能擴充到 $\omega \in \mathbb{Q}$ 而已, 怎麼擴充到 $\omega \in \mathbb{R}$ 的呢? 我們並不願意在此關心這個問題, 但是如果您對此問題感到砰然心動, 您或許適合閱讀集合論或實數建構論的文章。據說, 當年 Cantor 就是因爲受到這個問題的困擾, 才發展出他的基數理論和集合論。

三. 規律

在這一節中, 我們假設所有涉及的函數都存在、運算都可行, 依此介紹一些傳立葉變換的基本規律。

3.1. 線性

當變換的函數比較複雜, 以至於 $\hat{f}$ 符號不適用的時候, 我們以 $\mathcal{F}[\,f(x)\,](\omega)$ 表示傳立葉變換。並以 $\mathcal{F}^{-1}[\,\hat{f}(\omega)\,](x)$ 表示傳立葉逆變換。讀者很容易可以檢查

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}[\,cf(x)+g(x)\,](\omega)\\&=c\,\mathcal{F}[\,f(x)\,](\omega)+\mathcal{F}[\,g(x)\,](\omega)\end{aligned}$$

所以傳立葉轉換是線性映射, 逆變換亦同。

3.2. 疊積

若 $f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$, 定義它們的疊積 (convolution) 爲

$$[\,f*g\,](x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy \qquad (8)$$

由席瓦茲不等式, 知道上式的積分存在。注意疊積的結果仍然是一個函數, 可以簡記爲 $[f*g](x)$ 或更簡爲 $f*g$。利用積分變數變換, 可以證明疊積運算符合交換律 $f*g=g*f$、結合律 $f*(g*h)=(f*g)*h$ 與分配律 $f*(\alpha g+\beta h)=\alpha(f*g)+\beta(f*h)$。但是疊積的結果 $f*g$ 未必 $\in L^2(\mathbb{R})$。

疊積是訊號處理中經常使用的運算。主要的原因之一就是

$$\mathcal{F}[\,(f*g)(x)\,](\omega)=\hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega) \qquad (9)$$

用白話說, 就是 $f*g$ 在 ω 頻率的振幅, 等於它們分別在 ω 頻率的振幅之乘積。這個關係可以由交換重積分的順序推導出來。

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}[\,(f*g)(x)\,](\omega)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy\right)e^{-i\omega x}\,dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,e^{-i\omega x}\,dx\right)g(y)\,dy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\omega(x+y)}\,dx\right)g(y)\,dy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\,g(y)e^{-i\omega y}\,dy\\&=\hat{f}(\omega)\,\hat{g}(\omega)\end{aligned}$$

3.3. 脹縮平移

若 $\hat{f}(\omega)$ 是 $f(x)$ 的傳立葉變換, 而 $f(x-t)$ 是 $f(x)$ 的平移訊號 (它比 $f(x)$ 延遲了 t 單位), 則

$$\mathcal{F}[f(x-t)](\omega)=e^{-it\omega}\,\hat{f}(\omega) \qquad (10)$$

$|e^{-itx}| = 1$, 它只是使得 $\mathcal{F}[f(x-t)](\omega)$ 和 $\mathcal{F}[f(x)](\omega)$ 相差了一個角度 $t\omega$, 稱爲*相位差*; 而 $|\mathcal{F}[f(x-t)](\omega)| = |\hat{f}(\omega)|$。這個結果很合理: 若 $f(x)$ 是一首歌曲, $f(x-t)$ 只是在不同時間播放的同一首歌曲, 它們在各頻率的振幅當然應該一樣。

令 $a > 0$, 則 $f(ax)$ 是 $f(x)$ 的脹縮訊號: 將 $f(x)$ 以 a 倍速撥放、或是將 $y = f(x)$ 的函數圖形放寬 $1/a$ 倍 (高度不變)。則

$$\mathcal{F}[f(ax)](\omega) = \frac{1}{a}\,\hat{f}(\frac{\omega}{a}) \tag{11}$$

此時 $\mathcal{F}[f(ax)](\omega)$ 和 $\hat{f}(\omega)$ 不只是相差一個角度而已。若 $a > 1$, 則 $\mathcal{F}[f(ax)](\omega)$ 的頻率範圍提高, 但是振幅衰弱了。這個效果就像將唱片快轉。例如 $f(x)$ 是一首歌曲, 需要 3'20" 撥完, 則 $f(2x)$ 就是將它以兩倍的速度撥放, 只要 1'40" 就撥完了。但是聽起來 $f(2x)$ 的音調變高, 而且音響變弱。

(10) 和 (11) 都是由積分變數變換得到, 留做習題。

3.4. 導函數

若 $\hat{f}(\omega)$ 是 $f(x)$ 的傅立葉變換, 則由分部積分得到

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}[\,f'(x)\,](\omega)\\ =&e^{-i\omega x}f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\omega)e^{-i\omega x}dx\end{aligned}$$

我們必須額外假設 $f(x)$ 是個會*消散* (decay) 的函數, 亦即 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$。那麼上式就導出

$$\mathcal{F}[\,f'(x)\,](\omega) = i\omega\,\hat{f}(\omega) \tag{12}$$

雖然我們已經假設了 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, 亦即 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx < \infty$。但這並不能保證 $f(x)$ 會消散。覺得這個問題有趣的讀者, 可以去想想反例。

最簡單的消散函數, 就是*有限函蓋* (compactly supported) 函數。若找得到一個最窄的閉區間 $[a, b]$, 使得當 $x \notin [a, b]$ 時 $f(x) = 0$, 我們就說 $[a, b]$ 是 $f(x)$ 的函蓋, 記做 $\mathrm{supp} f = [a, b]$。例如鐘形函數

$$B(x) = \begin{cases} \cos x + 1, & \text{if } x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

就是個 $L^2(\mathbb{R})$ 內的 (一次) 可微有限函蓋函數。

四. 理論

這裡, 我們面臨的數學問題是, 什麼樣的條件可以保證 $\hat{f}(\omega)$ 存在, 也就是 (7) 中的廣義積分可積? 再者, 什麼情況下還原公式 (6) 成立?

依照我們的需要, 只介紹兩種理論:L^1 理論和 L^2 理論。若 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 的廣義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ 可積, 稱之爲*絕對可積函數*, 記做 $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$。因爲 $|e^{-i\omega x}| = 1$ (順便一提, $e^{-i\omega x} \notin L^1(\mathbb{R})$), 所以

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\omega)| &\le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-i\omega x}|dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx\end{aligned}$$

可見只要 $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, 則 $\hat{f}(\omega)$ 存在。

但是 $\hat{f}(\omega)$ 卻未必 $\in L^1(\mathbb{R})$。例如取

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{if } x \ge 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases} \tag{13}$$

很明顯地 $\int_{-\infty}^{\infty}|f|\,dx=1<\infty$ 故 $f(x)\in L^1(\mathbb{R})$。則

$$\hat{f}(\omega)=\int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x\,dx \\ -i\int_0^\infty e^{-x}\sin\omega x\,dx$$

請讀者自行計算

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1-i\omega}{1+\omega^2}=\frac{1}{1+i\omega} \tag{14}$$

但是

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)|\,d\omega\\ =&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\,d\omega\\ =&\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\,d\omega+2\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\,d\omega\\ \geq&\frac{2}{\sqrt{2}}+2\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{2\omega^2}}\,d\omega\\ =&\sqrt{2}+\sqrt{2}\int_1^\infty\frac{1}{\omega}\,d\omega\\ =&\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\ln\omega\Big|_1^\infty=\infty\end{aligned}$$

可見 $\hat{f}(\omega)\notin L^1(\mathbb{R})$。

如果 $\hat{f}(\omega)\in L^1(\mathbb{R})$, 則 (6) 式中的積分可積, 問題是它的積分值未必等於 $f(x)$。L^1 的傳立葉變換理論是這樣說的:

> 若 $f(x)\in L^1(\mathbb{R})$ 則 $\hat{f}(\omega)$ 存在。
> 若 $\hat{f}(\omega)$ 也 $\in L^1(\mathbb{R})$, 且 $f(x)$ 在 x 連續, 則 (6) 式成立。

但是, 在第二節中, 我們討論的對象是平方可積函數, 亦即 $L^2(\mathbb{R})$ 而非 $L^1(\mathbb{R})$。有些在 $L^2(\mathbb{R})$ 內的函數並不在 $L^1(\mathbb{R})$ 內。一個簡單的例子是

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{if } x\geq 1\\ 0 & \text{if } x<1\end{cases}$$

則 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2\,dx$ 可積, 但是 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,dx$ 不可積。我們留給讀者去尋找一個在 $L^1(\mathbb{R})$ 卻不在 $L^2(\mathbb{R})$ 的例子。可見 $L^1(\mathbb{R})$ 和 $L^2(\mathbb{R})$ 是互不包含的兩個集合。它們亦不互相排斥; 例如 (13) 中定義的 $f(x)$, 就在 $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ 裡面。而根據 (14), 檢查

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega\\ &=\arctan\omega\Big|_{-\infty}^{\infty}=\pi\end{aligned}$$

發現 $\hat{f}(\omega)\in L^2(\mathbb{R})$。

其實這是個普遍的現象: 只要 $f(x)\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$, 則 $\hat{f}(\omega)$ 存在而且 $\in L^2(\mathbb{R})$。我們所要介紹的 L^2 傳立葉變換理論, 是 *Plancherel* 定理的一部分:

> 若 $f(x),g(x)\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$,
> 則 $\hat{f}(\omega),\hat{g}(\omega)\in L^2(\mathbb{R})$ 且

$$\langle f(x),\,g(x)\rangle=\frac{1}{2\pi}\langle\hat{f}(\omega),\,\hat{g}(\omega)\rangle \tag{15}$$

其中 $\langle f(x),\,g(x)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}\,dx$ 稱做 f 和 g 的 L^2 內積。(15) 式亦稱做 *Parseval* 等式。我們不便在此證明它, 請讀者對照傳立葉級數的 Parseval 等式 [1, (10)], 當做一個類比。若我們定義 $f(x)\in L^2(\mathbb{R})$ 的長度、或稱模 (norm), 是 $\|f(x)\|^2=\langle f,f\rangle$, 則由 (15) 得到

$$\|f(x)\|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{f}(\omega)\| \tag{16}$$

這個關係也可以與傳立葉級數的函數與係數關係做類比 [1, (9)]。

如果 f 和 g 是兩個訊號, 可以將內積 $\langle f,\,g\rangle$ 視爲以 g 去「探測」f 的結果。Parseval 等式告訴我們, 用 g 去探測 f 的結果,

同時也就 (幾乎) 等於用 $\hat{g}$ 去探測 $\hat{f}$ 的結果 (只差 2π 倍)。這個重要性質, 就是傅立葉變換應用在訊號處理的利器之一。

五. 玻頌和

在第二節中, 我們從 2π 週期函數的傅立葉級數出發, 經過黎曼和的概念得到平方可積但非週期性函數的傅立葉變換。現在反過來, 假如先有非週期性函數 $f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 和它的傅立葉變換 $\hat{f}(\omega)$。考慮以下函數級數:

$$f_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x-2k\pi) \tag{17}$$

若 $f_p(x)$ 存在, 亦即上列級數對任意 $x \in \mathbb{R}$ 都收斂。則 $f_p(x+2\pi) = f_p(x)$, 可見 $f_p(x)$ 是個 2π 週期函數。又因爲

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} |f_p(x)|^2\,dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-2k\pi)|^2\,dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-(2k+1)\pi}^{-(2k-1)\pi} |f(x)|^2\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx < \infty \end{aligned}$$

故 $f_p(x) \in L_p^2(-\pi,\pi)$。所以 $f_p(x)$ 有傅立葉級數 (1)。按照 (2) 式求 $f_p(x)$ 的傅立葉係數, 得到

$$\begin{aligned} f_k &= \int_{-\pi}^{\pi} f_p(x)e^{-ikx}\,dx \\ &= \sum_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x-2n\pi)\,e^{-ikx}\,dx \\ &= \sum_n \int_{-(2n-1)\pi}^{-(2n+1)\pi} f(x)\,e^{-ik(x+2n\pi)}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx = \hat{f}(k) \end{aligned}$$

前面我們利用了 e^{-inx} 是 2π 週期函數的特性。於是我們得到

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x-2k\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} \tag{18}$$

這就是所謂的 *Poisson* 求和公式 (Poisson Summation Formula)。Poisson 是法國人, 所以請不要將他的名字唸成英文的 poison。法語的 pois 發音類似英語的 bwa, 我們譯做玻頌。

如果 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ 但是 $\mathrm{supp} f(x) = [-\pi,\pi]$, 那麼 $f_p(x)$ 必定存在。而且當 $x \in [-\pi,\pi]$ 時 $f_p(x) = f(x)$。在這種情況下, $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f_p(x)e^{-ikx}\,dx$。所以, 此時 (18) 式就回到了傅立葉級數的定義。我們用以下簡表來綜述兩者之間的關係。

$$\text{傅立葉級數} \quad \overset{\text{黎曼和}}{\underset{\text{玻頌和}}{\rightleftharpoons}} \quad \text{傅立葉變換} \tag{19}$$

玻頌求和公式有幾個常見的變形。例如

$$\sum_k f(x-kT) = \frac{1}{T}\sum_k \hat{f}\Big(\frac{2k\pi}{T}\Big)e^{i\frac{2k\pi}{T}x} \tag{20}$$

代入 $x=0$、$T=1$ 得到

$$\sum_k f(k) = \sum_k \hat{f}(2k\pi) \tag{21}$$

將 (18) 應用到 $|\hat{f}(\omega)|^2$, 得到

$$\begin{aligned} &\sum_k |\hat{f}(\omega-2k\pi)|^2 = \sum_k f_k\,e^{-ik\omega} \\ &\text{其中} \quad f_k = \langle f(x),\, f(x-k)\rangle \end{aligned} \tag{22}$$

(20)–(22) 的推導都留做習題。其中 (20) 可能要參考 (3)–(4) 來推導。

(18) 式中的兩個無窮函數級數, 各自有其存在性的問題。我們雖不打算在這門課裡深入這個課題, 卻也可以略窺一二。數學家找到, 確保 (18) 成立的一組充分條件是 $f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 和 $\hat{f}(\omega)$ 消散得夠快。我們已經在 (12) 式的前面談過消散, 那是個定性描述。要談消散的快慢, 則需要定量描述。對於某個 $\sigma > 0$, 如果

$$0 < \lim_{x\to\infty} |x|^\sigma |f(x)| = c < \infty$$

我們說 $f(x)$ 消散得和 $\frac{1}{|x|^\sigma}$ 一樣快。我們可以想像, 當 $|x|$ 很大的時候, $|f(x)| \approx \frac{c}{|x|^\sigma}$。以上情形記做

$$|f(x)| = O(\frac{1}{(1+|x|)^\sigma})$$

放一個 $1+$ 在分母是爲了避免零分母。

現在我們可以說, 若存在 $\sigma \geq 2$ 使得 $|\hat{f}(\omega)| = O(\frac{1}{(1+|\omega|)^\sigma})$, 則玻頌求和公式 (18) 成立。也就是說, 我們要求 $\hat{f}(\omega)$ 消散得至少像 $\frac{1}{|\omega|^2}$ 一樣快。順便可以看到一個有趣的現象: 如果 $\hat{f}(\omega)$ 有上述的消散速度, 則 $\int_{-\infty}^{\infty} |\omega \hat{f}(\omega)|^2\, d\omega < \infty$, 也就可以知道 $\|i\omega\, \hat{f}(\omega)\| < \infty$。根據 (12) 和 (16), 我們發現 $\|f'(x)\| < \infty$, 亦即 $f'(x) \in L^2(\mathbb{R})$。一般而言: $\hat{f}(\omega)$ 消散得越快, $f(x)$ 就在 $L^2(\mathbb{R})$ 裡面有越高次的導函數。

六. 有限函蓋與有限頻寬

假如存在一個常數 $A > 0$ 使得 $\mathrm{supp} f \subset [-A, A]$, 前面已經說過 $f(x)$ 是個有限函蓋函數。若 $\hat{f}(\omega)$ 是有限函蓋, 我們稱 $f(x)$ 是有限頻寬 (band limited) 函數。首先要說明的是, 如果 $f(x) \neq 0$ 是有限函蓋, 它就不可能是有限頻寬。這裡只看個特例: 若 $f(x) \neq 0$, $\mathrm{supp} f \subset [-\pi, \pi]$。如果 $\mathrm{supp} \hat{f} \subset [-\Omega, \Omega]$, 則對所有的 $k \in \mathbb{Z}$, 只要 $|k| \geq \Omega$ 就 $\hat{f}(k) = 0$。套用玻頌和 (18), 知道

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\lfloor\Omega\rfloor}^{\lfloor\Omega\rfloor} \hat{f}(k) e^{ik\omega}$$

但是有限多項正弦餘弦波的和, 不可能是有限函蓋; 除非每一個 $\hat{f}(k) = 0$, 於是 $f(x) = 0$。這就與假設矛盾, 可見 $f(x)$ 不能是有限頻寬。反之亦然: 若 $f(x)$ 是有限頻寬, 它就不可能是有限函蓋。簡言之:

$$\overbrace{\text{有限函蓋}\quad\text{有限頻寬}}^{\text{不共戴天}} \tag{23}$$

其次, 我們介紹有限函蓋函數在頻率域的一個上界性質。原本 $\hat{f}(\omega)$ 是 $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 的函數。若用以下定義

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\zeta x}\, dx, \quad \zeta \in \mathbb{C}$$

則可以將 $\hat{f}(\omega)$ 拓展到複變函數 $\hat{f}(\zeta) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$。$\hat{f}(\zeta)$ 將會是 $\mathbb{C}$ 上的一個全函數 (entire function), 不說細節了。如果 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\mathrm{supp} f \subset [-A, A]$, 令 $\zeta = u + iv$、其中 $u, v \in \mathbb{R}$, 則

$$\begin{aligned} |e^{-i\zeta x}| &= |e^{vx-iux}| = |e^{vx}|\,|e^{-iux}| = |e^{vx}| \\ &\leq e^{|v|\,|x|} \leq e^{|\zeta|\,|x|} \end{aligned}$$

所以

$$|\hat{f}(\zeta)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, e^{|\zeta|\,|x|}\, dx$$
$$\le \int_{-A}^{A} |f(x)|\, dx \cdot e^{A\,|\zeta|}$$

令 $\int_{-A}^{A} |f(x)|\, dx = C$ (因爲 $f \in L^2$, 所以前述積分必存在)。我們可以忽略一些細節, 下個簡單的結論:

$$\mathrm{supp} f \subset [-A, A] \Longrightarrow |\hat{f}(\zeta)| \le Ce^{A\,|\zeta|}$$

以上的推論是很基本的。但是其反向命題就沒那麼基本了。有一個 *Paley-Wiener* 定理, 恰好就是說, 其反向命題也是對的。簡言之:

$$\exists A > 0,\ \mathrm{supp} f \subset [-A, A]$$
$$\Longleftrightarrow \exists C > 0, \forall \zeta \in \mathbb{C},\ |\hat{f}(\zeta)| \le Ce^{A\,|\zeta|} \quad (24)$$

七. 單農定理

前面我們看了有限函蓋函數在頻率域的性質, 現在看看有限頻寬函數在時間域的性質。假如存在某個固定的 $N \in \mathbb{N}$, 使得當 $|\omega| \ge N\pi$ 時 $\hat{f}(\omega) = 0$。這表示 $f(x)$ 不含有無窮多高頻的分量, 就好像一個多項式沒有無窮多個高次項一樣。可以想像有限頻寬函數和多項式一樣「不太複雜」。例如, 如果已知 $p(x)$ 是 3 階多項式, 我們只需取得任意 4 個函數值 $p(x_i)$, $i = 1 \ldots 4$, 稱爲樣本 (samples), 就能獲得整個多項式:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{4} p(x_i)\Pi_i(x), \quad \text{where}$$
$$\Pi_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{4} \frac{x_k - x}{x_k - x_i}$$

有限頻寬函數也有類似特性: 從樣本獲得整個函數 (訊號)。這就是 *Shannon* 取樣定理 (Shannon Sampling Theorem)。因爲我自己的姓氏 (單) 翻譯做 Shann, 所以跟他攀點關係, 翻譯做單農。不同於多項式的是, 理論上我們仍然需要無窮多個樣本, 但是這些樣本可以是離散的 (可數的)。再者, 單農使用 $\mathrm{sinc}\, x$ 來合成整個函數:

$$\mathrm{sinc}\, x = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{if } x \ne 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

若 $f(x)$ 和 N 如前述, 則只要知道 $f(\frac{k}{N})$、$k \in \mathbb{Z}$ (這些就是 $f(x)$ 的離散樣本), 便得知

$$f(x) = \sum_k f(\frac{k}{N})\, \mathrm{sinc}\,(N\pi x - k\pi) \quad (25)$$

讓我們先導出 (25), 再闡述它的意義。

若 $f(x)$ 和 N 如前述, 則

$$\sum_k \hat{f}(\omega - 2N\pi k)$$

是一個 $2N\pi$ 週期函數, 而且當 $\omega \in [-N\pi, N\pi]$ 時, 它就是 $\hat{f}(\omega)$。套用 (20) 形式的玻頌和 ($T = 2N\pi$), 得知

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2N\pi} \sum_k \mathcal{F}[\hat{f}(\omega)](\frac{k}{N})\, e^{i\frac{k}{N}\omega}$$
$$\text{where } \omega \in [-N\pi, N\pi]$$

但是根據傅立葉逆變換 (6), 得知

$$\mathcal{F}[\hat{f}(\omega)](\frac{k}{N}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{-i\frac{k}{N}\omega}\, d\omega$$
$$= 2\pi\, f(-\frac{k}{N})$$

再利用 (6), 就有

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-N\pi}^{N\pi}\hat{f}(\omega)\,e^{ix\omega}\,d\omega\\ &=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2N\pi}2\pi\int_{-N\pi}^{N\pi}\Big(\sum_k f(-\frac{k}{N})e^{i\frac{k}{N}\omega}\Big)\\ &\quad\cdot e^{ix\omega}d\omega\\ &=\frac{1}{2N\pi}\sum_k f(\frac{k}{N})\int_{-N\pi}^{N\pi}e^{i(x-\frac{k}{N})\omega}\,d\omega \end{aligned}$$

以上我們用了足標變換 $k\mapsto -k$, 並請自行驗證積分結果: $2\sin(x-\frac{k}{N})N\pi\,/(x-\frac{k}{N})$, 因此得到 (25)。

單農定理中的樣本點是 $\frac{k}{N}$, 也就是每單位長中取 N 個樣本, 稱爲取樣頻率 (sampling rate)。波的頻率定義是: 單位長中的振盪次數, 所以 $e^{i\omega x}$ 的頻率是 $\frac{|\omega|}{2\pi}$。由於 $f(x)$ 的頻率限於 $|\omega|\le N\pi$, 故 $f(x)$ 的最高頻爲 $\frac{N\pi}{2\pi}=\frac{N}{2}$。我們稱 $f(x)$ 的頻寬 (band width) 爲 $\frac{N}{2}$。用這套術語, 單農取樣定理就是說

> 取樣頻率是頻寬的兩倍, 就能從樣本重建原來的訊號

假設 $f(x)$ 是一首歌曲的訊號 (空氣壓力對時間的函數), 那麼當然 $f(x)$ 是有限函蓋函數。理論上它就不能同時也是有限頻寬函數。但是實驗認爲, 人類無法聽到頻率超過 22000 Hz 的波。所以即使 $\mathrm{supp}\hat{f}(\omega)=\mathbb{R}$, 我們反正聽不到所有高頻的聲音。因此將 $\hat{f}(\omega)$ 截斷在一個有限長度的區間中, 在聽覺上並無妨礙。設計 CD 雷射唱片的工程師, 就利用這些知識, 設定數位音樂的取樣頻率是 44000 Hz, 也就是人類能夠聽到的頻寬之兩倍。

參考書目

1. 單維彰,傅立葉級數, 數學傳播, 85 (第二十二卷第一期), 81-92。

—本文作者任教於中央大學數學系—