撕郵票問題

陳美如

一. 前言

有一次筆者到郵局寄信, 因爲要寄的信很多, 服務小姐給了我一大張未撕開的郵票, 正當我很有耐心將郵票一張一張撕開的時候, 腦中突然浮現一個這樣的問題: 怎樣撕才最省時呢? 不過, 仔細一想便覺得這個問題"不成問題", 因爲要把一大張未撕開的郵票一張一張分開, 就是要把各郵票之間的"連結線"撕開, 而"連結線"的總和是固定的, 並不隨撕開的方式而有所改變, 因此並不存在特別省時的方法。這時心裡覺得有一點無奈,"但是說不定有某一種撕開的方式所需撕裂次數是最少的呢?" 一個新的想法又浮現腦海, 正是"山窮水盡疑無路, 柳暗花明又一村", 這一問竟爲我開啓了一趟"撕郵票之旅"。

二. 關於一頁 $m \times n$ 的郵票

通常撕開相連的郵票時, 會一次把整頁郵票沿某直線撕成兩小頁, 我們將稱這樣的撕裂動作爲"一次", 現在讓我們來試著將一頁4×6 郵票撕開成一張張單張郵票的幾種撕法。

第一種撕法:

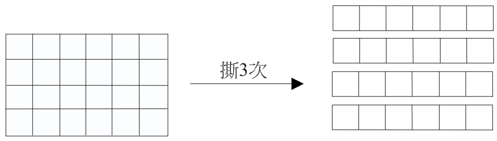


圖1

然後再把每一排撕 5 次成爲一張張單張的郵票, 因此共需要撕 $3 + 5 \times 4 = 23$ 次。

第二種撕法:

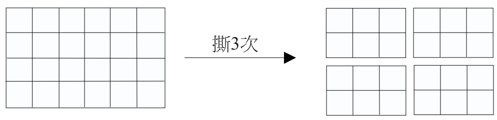


圖2

再把每一小頁 2×3 的郵票撕一次成兩張 1×3 的郵票, 最後再逐一撕兩次成單張郵票, 因此共需要撕 $3 + (2 \times 2 + 1) \times 4 = 23$ 次。

當然, 由這個例子的兩種撕法都需要23次來看, 聰明的讀者一定已經猜到以下意外的結果: 任何一頁$m \times n$ 的郵票被完全撕開

所需撕裂的次數與撕開的方式無關且其次數恰為 $mn-1$ 次。有興趣讀者不妨試著證明看看!

三. 關於一頁不規則形狀的郵票

如果給我們的是一頁如圖3的郵票, 不同的撕法是否仍有相同的撕裂次數呢? 以下是兩種撕開的方法, 其所需撕裂的次數都是9次

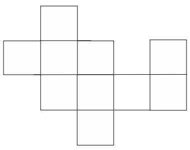
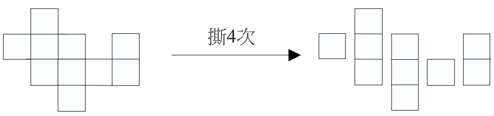


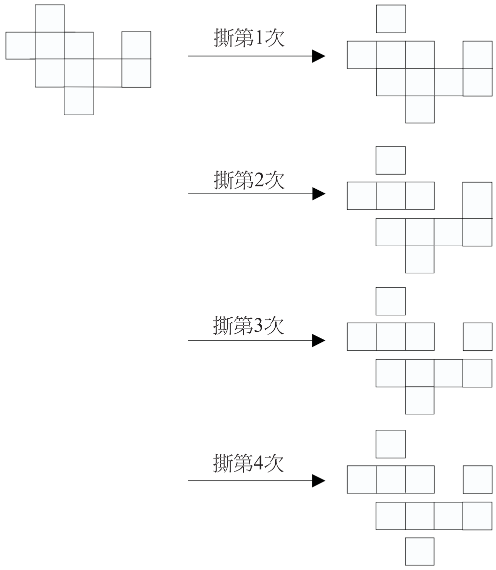
圖3

第一種撕法:



再分別撕開, 共需 $4+2+2+1=9$ 次。

第二種撕法:



請注意撕完第二次後的圖形 (按照我們所謂撕一次的定義: 將一整頁郵票沿某直線撕裂成兩小頁爲止), 最後再將每小頁一一撕成單張郵票共需 $4+2+3=9$ 次。相信各位讀者也已經猜到以下的結果: 一般而言, 一頁 n 張的郵票所需撕裂次數是 $n-1$ 次, 與撕開的方式無關。

四. 看似平常最奇絕—一頁內部有洞的郵票

在前面所觀察到的結果, 只能適用於一頁完整沒有洞的郵票, 對於如 (圖4)、(圖5)、(圖6) 的郵票就不適用了。

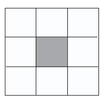


圖4

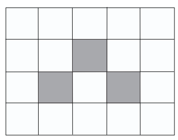


圖5

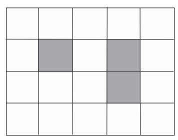


圖6

■: 表示該位置沒有郵票。

在討論如何撕開 (圖4)、(圖5)、(圖6) 的郵票之前, 我們必須先對所謂的洞給出明確的定義。

定義一: 將一頁未撕開郵票的邊緣描繪在白紙上, 如果所描出來的圖形形成 $m+1$ 個彼此不相連的封閉折線, 那麼我們說此頁郵票包含 m 個洞。

依此定義, 先前第二、三節討論的都是包含0個洞的郵票, 而 (圖4) 的郵票, 則可由圖 (4-1) 看出是包含1個洞, 至於 (圖5) 和 (圖6) 的郵票, 則分別可由 (圖5-1) 和 (圖6-1) 看出是分別包含1 個洞及2個洞的郵票。

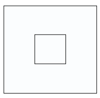


圖4-1

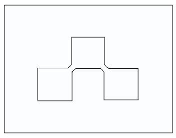


圖5-1

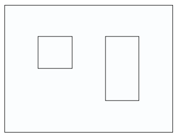
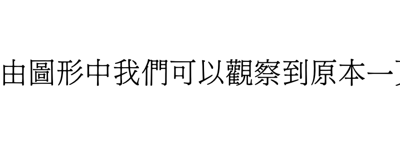


圖6-1

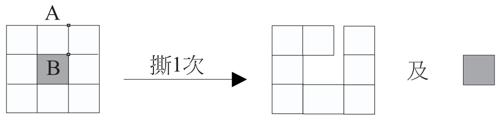
同樣的, 我們也要為所謂"撕一次"下一個明確的定義。

定義二: 設 A 和 B 為定義一中封閉折線上的兩點 (可能在同一折線上, 也可能分別在不同的折線上), 且 A 到 B 的直線段都是郵票之間的連結線而且不再經過任何折線, 則從 A 撕到 B 的動作稱為"撕一次"。

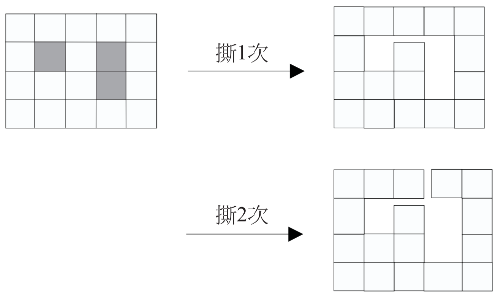
現在讓我們來撕開 (圖4) 的郵票, 當然這與定義二符合。



由圖形中我們可以觀察到原本一頁有洞的8張郵票, 經過隨意的撕一次之後, 變成了一頁沒有洞的8張郵票, 在此我們可以想像成撕一次是將郵票與洞撕開了, 如下圖所示:



接著就是撕開一頁沒有洞的8張郵票, 其撕開的次數為7次, 且與撕開的方法 (或過程) 無關; 因此, 將 (圖4) 郵票撕開的次數總共為8次。同樣的, 讀者可以試試撕開 (圖5) 郵票, 其撕開的次數為17次, 恰與郵票的張數相同。為了更充分說明定義二, 我們以 (圖6) 的郵票為例子來說明也可以從郵票內部撕郵票。



接著就是撕開一頁沒有洞的17張郵票, 因此撕開 (圖6) 的郵票需要 $2+(17-1)=18$ 次。

現在讓我們撕一頁較為複雜的郵票, 如 (圖7) 有42張郵票,4個洞。

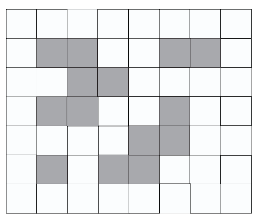
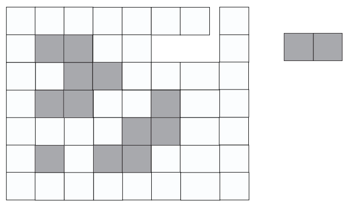
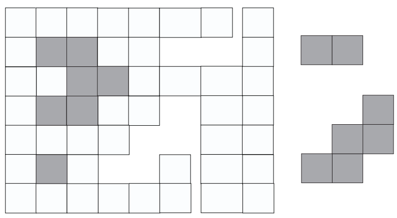


圖7

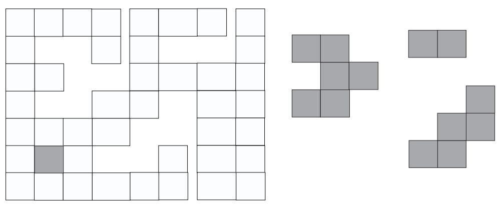
撕第1次後,



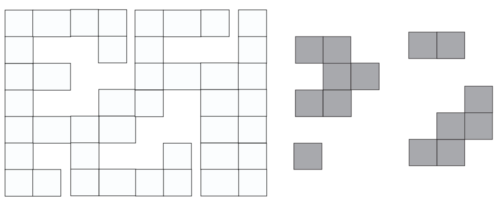
撕第2次後,



撕第3次後,



撕第4次後,



最後再把沒有洞的部分撕開成一張張單張的郵票, 則我們總共需要撕 $4+(42-1)=45$ 次。

由前面幾個例子, 我們不難猜到下面的結果:

定理: 假設有一頁具有 m 個洞的 n 張郵票, 則完全撕開所需的撕裂次數與撕開的方法 (或過程) 無關, 皆爲 $n+m-1$ 次。

證明: 現有一頁具有 m 個洞的 n 張郵票, 記爲 n_m; 若 $m=0$, 則只記爲 n。撕第一次時, 若起點和終點分別在兩個相異的折線上, 則撕一次以後, 這一頁郵票就變成了一頁具有 $m-1$ 個洞的 n 張郵票, 記爲 n_{m-1}, 連同撕的動作可記爲 $n_m=n_{m-1}\oplus 0$, 其中“$\oplus$”表示撕一次, 而“0”表示減少一個洞; 若撕的起點和終點在同一封閉折線上, 則撕一次以後, 這一頁郵票就分離成兩個小頁郵票, 但總洞數沒有改變, 假設分別爲具有 m^1 個洞的 n^1 張郵票與具有 $m-m^1$ 個洞的 $n-n^1$ 張郵票, 分別記爲 $n^1_{m^1}$ 與 $(n-n^1)_{m-m^1}$, 連同撕的動作記爲 $n_m=n^1_{m^1}\oplus(n-n^1)_{m-m^1}$。由於郵票的張數及洞數是有限的, 所以我們的撕開次數也是有限的。因爲郵票必須完全的被撕開成一張張單張的郵票, 所以依此方式來記錄撕開郵票的過程, 不難得到:

$$
\begin{aligned}
n_m &= n_{m-1}\oplus 0=\cdots=1\oplus\cdots\oplus 1\oplus 0\\
&\quad \oplus\cdots\oplus 0\oplus 1\oplus\cdots\oplus 0\oplus\cdots\oplus 0\\
\text{或} &= n^1_{m^1}\oplus(n-n^1)_{m=m^1}=\cdots=1\\
&\quad \oplus\cdots\oplus 1\oplus 0\oplus\cdots\oplus 0\oplus 1\oplus\cdots\\
&\quad \oplus 0\oplus\cdots\oplus 0\\
\text{或} &= n^1_{m^1}\oplus(n-n^1)_{m-m^1}=\cdots=1\\
&\quad \oplus\cdots\oplus 1\oplus 0\oplus\cdots\oplus 0\oplus 1\oplus\cdots\\
&\quad \oplus 0\oplus\cdots\oplus 0\oplus 1\oplus\cdots\oplus 1 \qquad (*)
\end{aligned}
$$

因爲不管怎麼撕 n 張郵票, 撕開後必須有 n 張單張郵票, 也就是在(∗)中“1”的個數必須爲 n ; 另外, 在撕開的過程中, 每少一個洞我們的紀錄中就多一個“0”, 所以在(∗)中必有 m 個“0”; 最後, 我們可以得到, 在(∗)中共有 n 個“1”與 m 個“0”, 而且“⊕”共有 $n+m-1$ 個, 也就是說, n_m 的撕開次數爲 $n+m-1$ 次。值得一提的是: n_m 被分拆成 n 個1與 m 個0相加的型式的過程並不影響最後 “⊕” 的個數, 因此, 我們得到的撕開次數與撕開的方法 (或過程) 無關。

五. 可以更自由的撕郵票嗎?

前面談的撕郵票方式都只限於“直線撕開”, 如果允許“折線撕開”又如何呢? 也就是先前的定義二放寬成“從 A 到 B 的撕開線可以是彎曲折線, 但都是郵票間的連結線而不經過封閉折線”, 那麼是否還有規則可循呢? 很幸運的, 答案仍然是“一頁 m 個洞的 n 張郵票完全被撕開所需的撕裂次數與撕開的方法 (或過程) 無關, 皆爲 $n+m-1$ 次。”有興趣的讀者或可證明看看哦!

後記: 這個問題是在蕭守仁老師的課堂上聽到的, 經過一番苦思並與蕭老師幾次的討論, 才慢慢形成這篇文章, 在這裡特別要感謝蕭老師耐心的指導。

—本文作者畢業於彰化師大數學系—