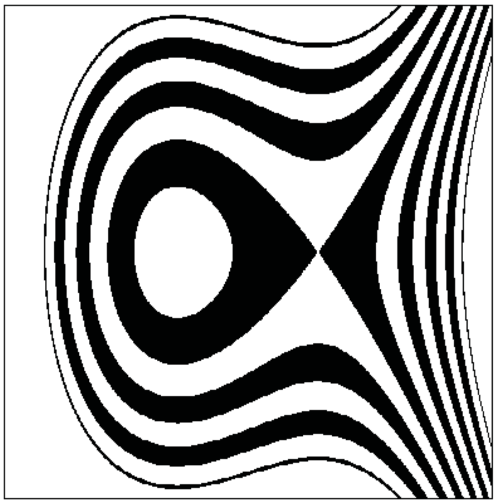
三次曲線

平斯

完成費瑪最後定理的證明, 肯定是個在我們眼前發生的歷史事件, 坊間自然有書討論這件事, 在我的案頭書架就有兩本, 其中左邊的是本翻譯書, 另外在右邊的一本也是翻譯書, 頭一本 [1]由曹亮吉寫過書評 [2], 他自己曾於1978在高等學院受志村五郎親炙, 掌故寫來人地歷歷在目, 絕非捕風捉影。經他這麼一寫, 旁人就不必再評了, 於是當另一本 [3]上市的時候, 洪萬生寫的是導讀, 由數學史切入, 果然書內生動的描寫數學家如何爭名奪譽, 暴露人性深沉最黑暗的一面。本書附錄並由余文卿補充, 這篇同時也登於本刊 [4]。本文是前述補充的一個注解, 說明爲甚麼橢圓曲線是個環面; 當然原文已經說的很淸楚, 這是個複平面除以整數方格的商群, 本文要另外從拓樸的角度來解釋環面的形成, 首先橢圓曲線亦名三次曲線, 有個普遍式

$$y^2 = 4x^3 - g_1x - g_2$$

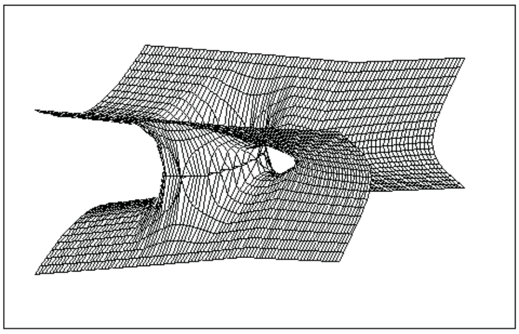
這裡等式兩邊的自變數x與應變數y本來都是複數, 因此這是一個四維空間裡的二維曲面, 姑且先視xy都爲實數, 於是可得平面上一組曲線,



圖一

目下的挑戰是要知道這個圖要表現甚麼, 在談數學之前, 先用繪事來釐淸我們的觀念, 不久之前, 外雙溪的故宮博物院展出畢卡索與張大千兩個東西方藝術家的作品, 其中畢卡索很特出的一個時期是立體畫派, 說穿了是用巧妙的方法來銜接不同視角的描繪, 因此在同一個畫面可以看到人像的正面和側面, 這個畫風顯然顚覆了觀賞人反客爲主的地位。在東方的山水畫大千居士要含蓄多了, 但是保守嗎? 山水畫宗師郭熙, 在距今八百年前宋神宗時就提出從平面畫紙的描寫, 還

原山水的時空經驗, 諸如“三遠四時”的繪畫理論 [5], 一個畫家高明與否, 以數學的語言來說, 就是能不能把四向度的資料, 壓縮成兩向度而不失眞, 因此逆向過程是把上圖看成是下圖曲面上各種角度的截線,



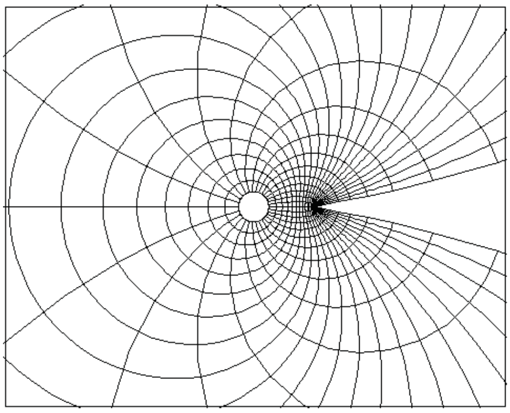
圖二

何以然呢? 唯心論哲學家康德認爲空間的體認是天生的良知良能 [6], 所以憑直觀, 可以說是必然如此, 只須意會不必言傳, 但是實證邏輯下, 不是說得權威, 或圖看得順眼就算, 凡是命題論述, 都需要驗證; 爲方便討論, 首先我們固定一橢圓曲線 $y^2 = 4(x^3 - x)$ 兩邊開方得

$$y = \pm 2\sqrt{x(x-1)(x+1)}$$

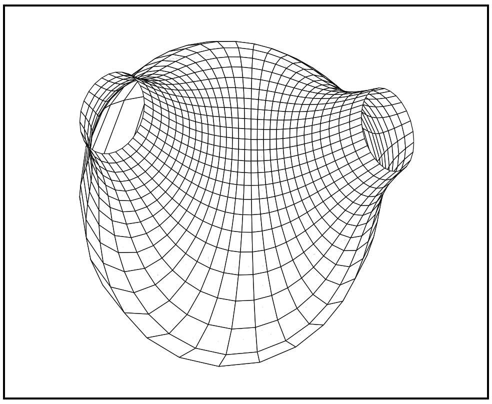
不妨先把 x 安在複平面上, 因爲開方零有重根, 於是 $y = 0$ 時 $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ 這些點配上無限點 $x = \infty$, 得到兩對岐點, 岐點之間割後撐開叫岐割, 圖三就是操作後的複平面。

又 $y \neq 0$ 時, 開方有正負兩個異根, 於是拿兩張複平面代表兩個值, 每次 x 繞過岐點一次 y 就要變號一次, 好像跳上跳下, 而起跳與落著點都在岐割上, 因此連接相對應的岐割之後, 圖二就很清楚了, 連接和岐割都是常用的拓樸手段。



圖三

這個曲面的邊緣可無限延伸, 全收斂到無限點, 用另一個拓樸手段叫緊化, 也就是把所有的邊緣連接在無限點, 就可得到虧格爲一的環面, 本來四維的實空間以球面來緊化可得複二維射影面; 上述的環面與球面正好相交於無限點, 我們亦可將兩個步驟顚倒過來, 先緊化再連接: 先透過立像射影, 把複平面連同無限點對應到球面上。



圖四

兩個這樣的球面適當的連接也可以得到環面。橢圓曲線可用外爾司錯的雙週期橢圓函數解得參數式

$$x = \mathcal{P}(t),\ y = \mathcal{P}'(t),$$

這些週期形成整數的格點, 這樣又回到一開始余文卿的解釋: 橢圓曲線的萬有覆蓋是個複平面, 如此前瞻的看法, 可以引伸, 是很重要的關鍵。事實上三次曲線視爲環面是緊黎曼曲面的特例, 我們可以同理討論二次曲線或又叫圓錐曲線, 只須高中的解析幾何就看出這是個球面, 細節從略。更高次如五, 七$\cdots$ 等次曲線可得到虧格爲二, 三$\cdots$ 等比較複雜的緊黎曼曲面, 代數曲線與黎曼曲面是一體兩面。單值化定理 [7] 分類了所有緊黎曼曲面的萬有覆蓋, 他們的共同刻畫是單連通及常曲率, 除了

(a) $K = 0$ 複平面, 還有

(b) $K > 0$ 球面, 與

(c) $K < 0$ 半平面。

這些是最基本的複一維凱勒流形, 高維的類比是: 複歐氏空間, 複射影空間和早年華羅庚 [8]研究的典型域等。這時的K 是雙截曲率, 廣義的單值化定理要分類普遍高維凱勒流形的萬有覆蓋, 在 $K \geq 0$ 的情況已經被莫毅明分類完畢 [12], 剩下$K < 0$ 有許多可能的複雜情況, 未能完成, 他的得意門生蔡宜洵在這個問題也很有貢獻。

後記: 本文的作圖都有出處, 圖一在 [9]; 圖二在 [10], 是我最喜歡用的代數課本, 圖四在 [11], 所有繪圖的原始碼可由網路侍服站下載: anonymous@ftp.scu.edu.tw/scu/math/pub/cubic.zip

參考文獻

1. 薛密, 費瑪最後定理 (譯), 周青松審訂, 台灣商務印書館。
2. 曹亮吉, 中國時報八十七年四月十六日開卷版。
3. 林瑞雲, 費瑪最後定理 (譯) 余文卿審訂, 時報文化。
4. 余文卿, 關於懷爾斯解決費瑪最後定理的一些補充說明,「數學傳播季刊」第二十三卷第一期, 49頁。
5. 中國大百科全書, 藝術卷 I。
6. Durant, Story of philosophy.
7. 伍鴻熙, 緊黎曼曲面引論, 聯經出版, 第59頁。
8. 華羅庚, 多複變函數論中典型域的調和分析, 科學出版社 1958。
9. Kendig, Elementary Algebraic Geometry, Springer, GTM 1977, p.15.
10. Artin, Algebra, Prentice-Hall, 1991, p.525.
11. Springer, Introduction to Riemann surfaces, Addison-Welsey, 1959, p.7.
12. 莫毅明, J. Diff Geom, 1988, p.179.