正項數列及其算術、幾何與調和平均數列四者斂散性之比較

張國男

筆者曾就正項數列 $\{a_n\}$ 及其算術平均數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 與幾何平均數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 三者, 研究其斂散之蘊涵關係, 而將探求所得之結果, 撰爲「正項數列及其算術平均數列與幾何平均數列斂散性之比較」一文 (以下簡稱前篇), 發表於「數學傳播季刊」22卷3期 (87年9月, 中央研究院數學研究所出版) 61 ～ 67頁。其實, 若將正項數列 $\{a_n\}$, 其算術平均數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$, 幾何平均數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$, 與調和平均數列 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 四者之斂散性相提並論之, 則難度增高、趣味益饒矣。是故, 特再成此稿, 提供同好參考。

前篇對於所舉數列之斂散性所作之驗證, 概以極限之定義爲據。下文多處之推導, 將逕用微積分學有關極限之適當基本知識[如和、差、積、商、$\cdots$ 之極限公式, 夾擠定理 (squeeze theorem), $\cdots$ 等], 而省略若干瑣碎之細節。

本篇正文係正項數列$\{a_n\}$, 其算術平均數列$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$,幾何平均數列$\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$, 與調和平均數列$\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$四者斂散比較之研討, 而附錄則爲正項級數$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$ 四者斂散情況之論述。

正文 (數列斂散之比較)

在本篇中, N 恆表所有正整數所構成之集合。爲方便進行斂散性之比較, 茲先作下列各項考察:

[I] 若數列 $\{x_n\}$ 收斂, 其極限爲 ξ (定數), 則據定義, 易知其所有子數列必俱收斂於 ξ。故若數列 $\{x_n\}$ 有某一發散之子數列, 或有極限不同之某二收斂子數列, 則 $\{x_n\}$ 必發散。下文多處將據此以驗證數列之發散性。

[II] 不難證明: 若 $x_n\ge 0\ \forall n\in N$, 且 $\{x_n\}$ 收斂, 則必 $\lim_{n\to\infty}x_n\ge 0$。

[III] 設 $x_n>0$ 且 $x_ny_n=1\ \forall n\in N$。據 (商之) 極限公式, 即知 $\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$ (定數)>0 之充要條件爲 $\lim_{n\to\infty}y_n=\eta$ (定數) >0 且 $\xi\eta=1$; 若 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$, 則據極限之定義, 甚易驗證 $\lim_{n\to\infty}y_n=\infty$; 若 $\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$, 則據極限之定義, 亦甚易驗證 $\lim_{n\to\infty}y_n=0$; 換言之, 即 (設 $x_n>0$ 且 $x_ny_n=1\ \forall n\in N$)

(i) 數列 $\{x_n\}$ 收斂於正數 ξ 之充要條件爲數列 $\{y_n\}$ 收斂於正數 η 且 $\xi\eta = 1$;

(ii) 若數列 $\{x_n\}$ 收斂於 0, 則數列 $\{y_n\}$ 發散於 ∞ (亦謂趨向 ∞);

(iii) 若數列 $\{x_n\}$ 發散於 (趨向) ∞, 則數列 $\{y_n\}$ 收斂於 0。

據上, 又知 (設 $x_n > 0$ 且 $x_n y_n = 1$ $\forall n \in N$)

(iv) 數列 $\{x_n\}$ 發散但非趨向 ∞ 之充要條件爲數列 $\{y_n\}$ 發散但非趨向 ∞。

[IV] 設 $a_n > 0$ $\forall n \in N$,

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad c_n = (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}},$$

$$d_n = (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}, \quad A_n = \frac{1}{a_n},$$

$$B_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k, \qquad C_n = (\prod_{k=1}^{n} A_k)^{\frac{1}{n}},$$

$$D_n = (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{A_k})^{-1},$$

則

$$a_n A_n = b_n D_n = c_n C_n = d_n B_n = 1 \ \forall n \in N,$$

故據 [III], 由數列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ 之斂散性 [如 [III]所示, 可細分爲下列四種情形: 收斂於某正數, 收斂於 0, 發散於 (趨向) ∞, 發散但非趨向 ∞], 立即可知對應數列 $\{A_n\}$, $\{D_n\}$, $\{C_n\}$, $\{B_n\}$ 之斂散性。本篇若干實例之建構, 即借助於此也。

[V]若 $n \in N$, 而 $a_k > 0$ $(1 \le k \le n)$, 則有 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \ge (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$ [算術平均與幾何平均不等式]。以 $\frac{1}{a_k}$ 替代其中之 a_k, 又有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \ge [(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}]^{-1},$$

即

$$(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} \ge (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$$

[幾何平均與調和平均不等式]。合之, 遂得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \ge (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} \ge (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$$

[算術平均及幾何平均與調和平均不等式]。

正項數列 $\{a_n\}$, 其算術平均數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$, 幾何平均數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$, 與調和平均數列 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 四者斂散之關係, 可分14種情況探討之, 茲依序論述於後:

問題 1: 若正項數列 $\{a_n\}$ 收斂, 則數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$, $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 必俱收斂, 且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}。$$

試證明之。

證明: 設 $\{a_n\}$ 收斂於 α (定數), 則 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \ge 0$。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$ 之推導, 同前篇問題1證明 (1), 茲錄於下:

設 $\varepsilon > 0$ 已予。因 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, 必有 $p \in N$, 使 $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \ge p$。因 $\sum_{k=1}^{p} |a_k - \alpha|$ 爲固定之 (非負) 實數, 必有 $q \in N$, 使

$$\frac{1}{p+m}\sum_{k=1}^{p} |a_k - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \ge q。$$

由是, 可知

$$
\begin{aligned}
&|\frac{1}{p+m}\sum_{k=1}^{p+m}a_k-\alpha|\\
=&\frac{1}{p+m}|\sum_{k=1}^{p+m}(a_k-\alpha)|\\
\le&\frac{1}{p+m}\sum_{k=1}^{p}|a_k-\alpha|+\frac{1}{p+m}\sum_{k=p+1}^{p+m}|a_k-\alpha|\\
<&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{m\varepsilon}{2(p+m)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad\forall m\ge q,
\end{aligned}
$$

故 $|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-\alpha|<\varepsilon\ \forall n\ge p+q$, 遂證得 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\alpha$ 矣。

(2) $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=\alpha$ 之推導, 可分 $\alpha=0$ 與 $\alpha>0$ 二種情形進行如次:

(i) $\alpha=0$ 時, 由 (1) 知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=0$。據此及

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\ge(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\ge(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}>0$$

與極限之定義, 即得

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=0$$

矣。[據

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\ge(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\ge(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}>0$$

及 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=0(=\lim_{n\to\infty}0)$ 與夾擠定理, 亦可得之。]

(ii) $\alpha>0$ 時, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\alpha}$。由此與 (1) [考慮 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 及其算術平均數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\}$], 知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{\alpha}$, 故 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=\alpha$。因 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\ge(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\ge(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$, 而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\alpha$ [見 (1)], 且 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=\alpha$ [已證], 據夾擠定理, 即得 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=\alpha$ 矣。

備註: (一) 前篇問題1之證明, 與上示問題1之證明, 部分有異, 部分無別。

(二) 茲分收斂於正數與收斂於0二種情形, 各舉一 (類實) 例於下, 以供參考:

(i) 若 α 爲固定之正數, 令 $a_n=\alpha$ $\forall n\in N$, 則 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=\alpha\ \forall n\in N$。顯然, $\{a_n\}$, $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$, $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱收斂於 α (其實四數列全同)。

(ii) 若 p 爲固定之正數, 令 $a_n=\frac{1}{n^p}$ $\forall n\in N$, 則極易驗證 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$。據本題, 即知 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$, $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 亦俱收斂於0。

(三) 若 $a_n>0\ \forall n\in N$, 且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, 則

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\\
&=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=\infty。
\end{aligned}
$$

茲證如次: 據 [III]之 (iii), 可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0。$$

由本題證明(1), 即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=0。$$

據是與[III]之 (ii), 知

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=\infty。$$

藉此與不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k \geq (\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}} \geq (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1},$$

極易驗證

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k = \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}} = \infty。$$

另證: 據[III]之 (iii), 可知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$; 由本題, 遂有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k)^{-1} = 0;$$

再據 [III]之 (ii), 即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k = \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = \infty$$

矣。

由是, 遂知: (i) 所有趨向∞之正項數列 $\{a_n\}$ 皆合乎問題14(見後) 所述之條件; (ii) 所有趨向 ∞ 之正項數列 $\{a_n\}$ 皆非問題 2∼3之解。

問題 2: 是否有發散正項數列 $\{a_n\}$ 能使 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$, $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱收斂, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k = \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}?$$

試論證之。

解答: 令

$$a_n = \begin{cases} 2 \ \ (若\ n=\ell^2,\ 而\ \ell\in N), \\ 1 \ \ (若\ n\in N\backslash\{\ell^2|\ell\in N\})。\end{cases}$$

設 $\ell^2 \leq n < (\ell+1)^2$, 其中 $\ell, n\in N$。

(1) 因 $a_{\ell^2}\equiv 2\to 2$ (當 $\ell\to\infty$), 而 $a_{\ell^2+1}\equiv 1\to 1$ (當 $\ell\to\infty$), 故數列 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞)。

(2) 因

$$1 < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k = \frac{n+\ell}{n} \leq 1+\frac{1}{\sqrt{n}},$$

且 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) = 1(=\lim_{n\to\infty}1)$, 由夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k = 1$。

(3) 因

$$1 > \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = \frac{1}{n}(n-\frac{\ell}{2}) \geq 1-\frac{1}{2\sqrt{n}},$$

且 $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2\sqrt{n}}) = 1(=\lim_{n\to\infty}1)$, 由夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=1$, 故 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=1$。

(4) 因

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k \geq (\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}} \geq (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = 1,$$

由夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=1$。[另證: 因

$$1 < (\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{\ell}{n}} \leq 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}},$$

且 $\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1(=\lim_{n\to\infty}1)$, 由夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=1$。]

備註: 前篇問題2之解答所舉之實例即上示之 $\{a_n\}$。

習題: 下列三題所示之 $\{a_n\}$, 亦俱合乎問題2所述之條件, 姑標出以爲補充實例。又, 爲便微積分初學者核對答案, 特以驗證題之形式書出。(其後諸習題之編製, 意旨同此。)

(1) 設

$$a_n=\begin{cases}1 & (\text{若 } n=\ell^2,\text{ 而 } \ell\in N),\\ n^{-1} & (\text{若 } n\in N\backslash\{\ell^2|\ell\in N\}),\end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞), 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k=\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k})^{-1}=0。$$

(2) 設

$$a_n=\begin{cases}\ell^{-2} & (\text{若 } n=2^\ell-1,\text{ 而 } \ell\in N),\\ 1 & (\text{若 } n\in N\backslash\{2^\ell-1|\ell\in N\}),\end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞), 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k=\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k})^{-1}=1。$$

(3) 設

$$a_n=\begin{cases}2^{-\ell} & (\text{若 } n=3^\ell-2,\text{ 而 } \ell\in N),\\ 1 & (\text{若 } n\in N\backslash\{3^\ell-2|\ell\in N\}),\end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞), 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k=\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k})^{-1}=1。$$

問題3: 是否有發散正項數列 $\{a_n\}$ 能使 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$, $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱收斂, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k=\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\neq\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k})^{-1}?$$

試論證之。

解答: 令

$$a_n=\begin{cases}2^{-\ell} & (\text{若 } n=\ell^3,\text{ 而 } \ell\in N),\\ 1 & (\text{若 } n\in N\backslash\{\ell^3|\ell\in N\})。\end{cases}$$

設 $\ell^3\le n<(\ell+1)^3$, 其中 ℓ, $n\in N$。

(1) 因 $a_{\ell^3}=2^{-\ell}\to 0$ (當 $\ell\to\infty$), 而 $a_{\ell^3+1}\equiv 1\to 1$ (當 $\ell\to\infty$), 故數列 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞)。

(2) 因

$$1>\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k>\frac{n-\ell}{n}\ge 1-\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}},$$

且 $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}})=1(=\lim_{n\to\infty}1)$, 由夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k=1$。

(3) 顯然,

$$(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}=(\prod_{k=1}^\ell 2^{-k})^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{\ell(\ell+1)}{2n}}。$$

因 $0<\frac{\ell(\ell+1)}{n}\le\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, 且 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}})=0(=\lim_{n\to\infty}0)$, 由夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ell(\ell+1)}{n}=0$, 故 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}=1$。

(4) 當然, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k}=\frac{1}{n}(n-\ell+\sum_{k=1}^\ell 2^k)\ge\frac{2^\ell}{n}$。注意 $\ell=1,2,3,4$ 時 $(\ell-4)^5\le 0$, 利用二項展開公式, 易得 $2^\ell=(1+1)^\ell>\frac{(\ell-4)^5}{5!}$。合之, 遂有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k}>\frac{(\ell-4)^5}{120n}>\frac{(\sqrt[3]{n}-5)^5}{120n}。$$

據此與

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{n}-5)^5}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}(1-\frac{5}{\sqrt[3]{n}})^5=\infty,$$

即知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\infty$, 故 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=0$。

備註: (一) 注意

$$(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\geq(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1},$$

易知本問題中之條件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\neq\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$$

亦可改爲

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}>\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}。$$

(二) 據問題 1, 知使 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$, $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱收斂, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\neq\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$$

之正項數列 $\{a_n\}$ 必發散。因此, 理論上, 對上示解答所舉數列 $\{a_n\}$, 實無須驗證其發散性。但爲維持本問題解答之獨立性及完整性, 仍將之納入驗證範圍。同理, 以下各問題之解答, 對所舉數列 $\{a_n\}$ 之發散性, 亦皆有驗證。

習題: (1) 設

$$a_n=\begin{cases}\ell^{-1}\ (\text{若 } n=\ell^2,\ \text{而 } \ell\in N),\\ 1\quad (\text{若 } n\in N\backslash\{\ell^2|\ell\in N\}),\end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=1,$$

且 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=\frac{2}{3}$。

(2) 設

$$a_n=\begin{cases}n^{-1}\ (\text{若 } n=\ell^2,\ \text{而 } \ell\in N),\\ 1\quad (\text{若 } n\in N\backslash\{\ell^2|\ell\in N\}),\end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=1,$$

且 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=0$。

問題 4: 是否有發散正項數列 $\{a_n\}$ 能使 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$, $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱收斂, 且

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\neq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\,?$$

試論證之。

解答: 令

$$a_n=\begin{cases}\ell^{2}\ (\text{若 } n=\ell^3,\ \text{而 } \ell\in N),\\ 1\ \ (\text{若 } n\in N\backslash\{\ell^3|\ell\in N\})。\end{cases}$$

設 $\ell^3\leq n<(\ell+1)^3$, 其中 $\ell, n\in N$。

(1) 因 $a_{\ell^3}=\ell^2\to\infty$ (當 $\ell\to\infty$), 而 $a_{\ell^3+1}\equiv 1\to 1$ (當 $\ell\to\infty$), 故數列 $\{a_n\}$ 發散但非趨向 ∞。

(2) 顯然,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}(n-\ell+\sum_{k=1}^{\ell} k^2) = 1-\frac{\ell}{n}+\frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{6n}。$$

據 $\ell \le \sqrt[3]{n} < \ell+1$, 可得

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\frac{1}{n}<\frac{\ell}{n}\le\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}},$$

$$(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}})(2-\frac{1}{\sqrt[3]{n}})<\frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{n} \le(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}})(2+\frac{1}{\sqrt[3]{n}})。$$

因

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}})(2-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}})(2+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}) = 2,$$

由夾擠定理, 遂知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ell}{n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ell(\ell+1)(2\ell+1)}{n}=2,$$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$。

(3) 據 $\{a_n\}$ 之定義及 $\ell^3 \le n < (\ell+1)^3$, 知

$$1\le(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = (\ell!)^{\frac{2}{n}} \le (\ell!)^{\frac{2}{\ell^3}} \le (\ell^\ell)^{\frac{2}{\ell^3}} = \ell^{\frac{2}{\ell^2}} \le \ell^{\frac{1}{\ell}}。$$

設 $\varepsilon > 0$ 已予。因 $\lim_{\ell\to\infty}\ell^{\frac{1}{\ell}} = 1$ [參看前篇問題4解答 (3) 之推導], 必有正整數 p, 使 $\ell^{\frac{1}{\ell}} < 1+\varepsilon\ \forall \ell \ge p$, 故 $1-\varepsilon < (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} \le \ell^{\frac{1}{\ell}} < 1+\varepsilon\ \forall n \ge (p+1)^3$, 遂得 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = 1$。

(4) 因

$$1\ge\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} > \frac{n-\ell}{n} = 1-\frac{\ell}{n},$$

且 $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\ell}{n}) = 1(=\lim_{n\to\infty}1)$ [(2) 已證 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ell}{n}=0$], 由夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = 1$, 故 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = 1$。

備註: (一) 注意

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \ge (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}},$$

易知本問題中之條件

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} \ne \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

亦可改爲

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k > \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}。$$

(二) 據正文開端所作考察 [IV], 由問題3備註後之習題 (1), 立即可得合乎本問題所述條件之另一實例: 令

$$a_n = \begin{cases} \ell\ (\text{若 } n=\ell^2, \text{而 } \ell\in N), \\ 1\ (\text{若 } n\in N\backslash\{\ell^2|\ell\in N\}), \end{cases}$$

則 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{3}{2},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = 1。$$

習題: 設

$$a_n = \begin{cases} 1 \quad (若\ n\ 爲正奇數), \\ n^{-1}\ (若\ n\ 爲正偶數), \end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = 0。$$

問題 5: 是否有發散正項數列 $\{a_n\}$ 能使 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$, $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱收斂, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k,\ \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} \quad 與$$
$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$$

全異? 試論證之。

解答: 令

$$a_n = \begin{cases} 2\ (若\ n\ 爲正奇數), \\ \frac{1}{2}\ (若\ n\ 爲正偶數)。 \end{cases}$$

(1) 因 $a_{2n-1}\equiv 2 \to 2$ (當 $n\to\infty$), 而 $a_{2n}\equiv \frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$ (當 $n\to\infty$), 故數列 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞)。

(2) 因 $\frac{1}{2n-1}\sum_{k=1}^{2n-1} a_k = \frac{1}{2n-1}[\frac{5}{2}(n-1)+2] \to \frac{5}{4}$ (當 $n\to\infty$), 且 $\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} a_k \equiv \frac{5}{4}\to\frac{5}{4}$ (當 $n\to\infty$), 故 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{5}{4}$。

(3) 因 $(\prod_{k=1}^{2n-1} a_k)^{\frac{1}{2n-1}} = 2^{\frac{1}{2n-1}} \to 1$ (當 $n\to\infty$), 且 $(\prod_{k=1}^{2n} a_k)^{\frac{1}{2n}}\equiv 1\to 1$ (當 $n\to\infty$), 故 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = 1$。

(4) 因 $\frac{1}{2n-1}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{a_k} = \frac{1}{2n-1}[\frac{5}{2}(n-1)+\frac{1}{2}] \to \frac{5}{4}$ (當 $n\to\infty$), 且 $\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{a_k}\equiv\frac{5}{4}\to\frac{5}{4}$ (當 $n\to\infty$), 故 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = \frac{5}{4}$, 遂知 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = \frac{4}{5}$。

備註: (一) 注意

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \ge (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} \ge (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1},$$

易知本問題中

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k,\ \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} \quad 與$$
$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$$

全異之條件亦可改爲

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k > \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} > \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}。$$

(二) 前篇問題3之解答所舉之實例即上示之 $\{a_n\}$。

習題: (1) 設

$$a_n = \begin{cases} 4^{-\ell}\ (若\ n=\ell^2,\ 而\ \ell\in N), \\ 1 \quad (若\ n\in N\backslash\{\ell^2|\ell\in N\}), \end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=0。$$

(2) 設

$$a_n=\begin{cases}1\,(若\ n-1\ 爲3之倍數),\\ 2\,(若\ n-2\ 爲3之倍數),\\ 3\,(若\ n\ 爲3之倍數),\end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=2,$$
$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[3]{6},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=\frac{18}{11}。$$

問題6: 是否有發散正項數列 $\{a_n\}$ 能使 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$ 發散, $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱收斂, 且

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}?$$

試論證之。

解答: 令

$$a_n=\begin{cases}2^{\ell}\,(若\ n=2^{\ell}-1,\ 而\ \ell\in N),\\ 1\ \ (若\ n\in N\backslash\{2^{\ell}-1|\ell\in N\}),\end{cases}$$
$$b_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k。$$

設 $2^{\ell}-1\leq n<2^{\ell+1}-1$, 其中 $\ell,n\in N$。

(1) 因 $a_{2^{\ell}-1}=2^{\ell}\to\infty$ (當 $\ell\to\infty$), 而 $a_{2^{\ell}}\equiv 1\to 1$ (當 $\ell\to\infty$), 故數列 $\{a_n\}$ 發散但非趨向 ∞。

(2) 顯然,

$$b_n=\frac{1}{n}(n-\ell+\sum_{k=1}^{\ell}2^k)=1-\frac{\ell}{n}+\frac{2(2^{\ell}-1)}{n}。$$

據此, 易知 $b_{2^{\ell}-1}=3-\frac{\ell}{2^{\ell}-1}\to 3$ (當 $\ell\to\infty$), 而 $b_{2(2^{\ell}-1)}=2-\frac{\ell}{2(2^{\ell}-1)}\to 2$, 故數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$ 發散 (但非趨向 ∞)。

(3) 當然,

$$(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=(\prod_{k=1}^{\ell}2^k)^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{\ell(\ell+1)}{2n}}。$$

注意 $\ell=1,2$ 時 $(\ell-2)^3\leq 0$, 利用二項展開公式, 易得 $n\geq 2^{\ell}-1=(1+1)^{\ell}-1>\frac{(\ell-2)^3}{3!}$, 故 $\ell<\sqrt[3]{6n}+2$, 遂有 $0<\frac{\ell(\ell+1)}{n}<\frac{(\sqrt[3]{6n}+3)^2}{n}$。因 $\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{6n}+3)^2}{n}=0(=\lim_{n\to\infty}0)$, 由夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ell(\ell+1)}{n}=0$, 故 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=1$。

(4) 顯然, $1-\frac{\ell}{n}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<1$。但由 $n\geq 2^{\ell}-1=(1+1)^{\ell}-1\geq\ell+\frac{\ell(\ell-1)}{2}>\frac{\ell^2}{2}$ 可得 $\ell<\sqrt{2n}$, 故有 $1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<1$。因 $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}})=1(=\lim_{n\to\infty}1)$, 據夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\frac{1}{a_k}=1$, 遂得 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=1$ 矣。[當然, 據 $1-\frac{\ell}{n}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<1$ 與 $\ell<\sqrt[3]{6n}+2$ [見 (3)]及夾擠定理, 仿上討論之, 亦可推得 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=1$。]

備註: (一) 據正文開端所作考察 [IV], 由問題3之解答所示之結果, 立即可得合乎本問題所述條件之另一實例: 令

$$a_n=\begin{cases}2^{\ell}\,(若\ n=\ell^3,\ 而\ \ell\in N),\\ 1\ \ (若\ n\in N\backslash\{\ell^3|\ell\in N\}),\end{cases}$$

則 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞), $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 趨向 ∞, 且

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = 1。$$

(二) 據[IV], 由問題 3 備註後之習題 (2), 又可得合乎本問題所述條件之另一實例: 令

$$a_n = \begin{cases} n\ (若\ n = \ell^2,\ 而\ \ell \in N), \\ 1\ (若\ n \in N\backslash\{\ell^2 | \ell \in N\}), \end{cases}$$

則 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞), $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 趨向 ∞, 且

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = 1。$$

習題: 下列二題之 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 俱發散, 但前者趨向 ∞, 而後者則否, 請注意之!

(1) 設

$$a_n = \begin{cases} 4^{\ell}\ (若\ n = 3^{\ell}-2,\ 而\ \ell \in N), \\ 1\ \ (若\ n \in N\backslash\{3^{\ell}-2 | \ell \in N\}), \end{cases}$$

試證$\{a_n\}$發散 (但非趨向∞), $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 趨向 ∞, 且

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = 1。$$

[據[IV], 由此立即可得合乎問題 3 所述條件之另一實例: 令

$$a_n = \begin{cases} 4^{-\ell}\ (若\ n = 3^{\ell}-2,\ 而\ \ell \in N), \\ 1\quad (若\ n \in N\backslash\{3^{\ell}-2 | \ell \in N\}), \end{cases}$$

則 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

且 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = 0$。注意其與問題 2 備註後習題 (3) 之差異!]

(2) 設

$$a_n = \begin{cases} 3^{\ell}\ (若\ n = 3^{\ell}-2,\ 而\ \ell \in N), \\ 1\ \ (若\ n \in N\backslash\{3^{\ell}-2 | \ell \in N\}), \end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$ 與 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 俱發散 (但皆非趨向 ∞), 且

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = 1。$$

問題 7: 是否有發散正項數列 $\{a_n\}$ 能使 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 發散, $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱收斂, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}?$$

試論證之。

解答: 令

$$a_n = \begin{cases} 2^{-\ell}\ (若\ n = 2^{\ell}-1,\ 而\ \ell \in N), \\ 3\quad (若\ n \in N\backslash\{2^{\ell}-1 | \ell \in N\}), \end{cases}$$

$B_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$。設 $2^{\ell}-1 \le n < 2^{\ell+1}-1$, 其中 $\ell, n \in N$。

(1) 因 $a_{2^{\ell}-1} = 2^{-\ell} \to 0$ (當 $\ell \to \infty$), 而 $a_{2^{\ell}} \equiv 3 \to 3$ (當 $\ell \to \infty$), 故數列 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞)。

(2) 顯然, $\frac{3(n-\ell)}{n} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k < 3$。但由 $n \ge 2^{\ell}-1 = (1+1)^{\ell}-1 \ge \ell + \frac{\ell(\ell-1)}{2} > \frac{\ell^2}{2}$ 可得 $\ell < \sqrt{2n}$, 故有 $3(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}) < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k < 3$。因 $\lim_{n\to\infty} 3(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}) = 3 (= \lim_{n\to\infty} 3)$, 據夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 3$。

(3) 當然,

$$(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = (3^{n-\ell}\prod_{k=1}^{\ell} 2^{-k})^{\frac{1}{n}}$$
$$= 3^{1-\frac{\ell}{n}}(\frac{1}{2})^{\frac{\ell(\ell+1)}{2n}}。$$

注意 $\ell=1,2$ 時 $(\ell-2)^3\le 0$, 利用二項展開公式, 易得 $n\ge 2^\ell-1=(1+1)^\ell-1>\frac{(\ell-2)^3}{3!}$, 故 $\ell<\sqrt[3]{6n}+2$, 遂有 $0<\frac{\ell}{n}\le\frac{\ell(\ell+1)}{2n}<\frac{(\sqrt[3]{6n}+3)^2}{2n}$。因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{6n}+3)^2}{2n}=0(=\lim_{n\to\infty}0),$$

由夾擠定理, 即知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ell}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ell(\ell+1)}{2n}=0,$$

故 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}=3$。

(4) 顯然, $B_n=\frac{1}{n}(\frac{n-\ell}{3}+\sum_{k=1}^{\ell}2^k)=\frac{1}{3}(1-\frac{\ell}{n})+\frac{2(2^\ell-1)}{n}$。據此, 易知 $B_{2^\ell-1}=\frac{7}{3}-\frac{\ell}{3(2^\ell-1)}\to\frac{7}{3}$ (當 $\ell\to\infty$), 而 $B_{2(2^\ell-1)}=\frac{4}{3}-\frac{\ell}{6(2^\ell-1)}\to\frac{4}{3}$ (當 $\ell\to\infty$), 故 $\{B_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞)。於是, 數列 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 亦發散(但非趨向 ∞)。

備註: (一) 據正文開端所作考察 [IV], 由問題6之解答所示之結果, 立即可得合乎本問題所述條件之一類似實例: 令

$$a_n=\begin{cases}2^{-\ell}\ (\text{若 } n=2^\ell-1, \text{ 而 } \ell\in N),\\ 1\quad (\text{若 } n\in N\backslash\{2^\ell-1|\ell\in N\}),\end{cases}$$

則 $\{a_n\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱發散(但皆非趨向 ∞), 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=1$。

將此實例與本解答所示之實例相提並論而合同考量之, 對問題10(見後) 之索解, 實有甚大之助益。[參看問題10之解答及其備註(二)]

(二) 據 [IV], 由問題6備註後之習題(2), 又可得合乎本問題所述條件之另一類似實例: 令

$$a_n=\begin{cases}3^{-\ell}\ (\text{若 } n=3^\ell-2, \text{ 而 } \ell\in N),\\ 1\quad (\text{若 } n\in N\backslash\{3^\ell-2|\ell\in N\}),\end{cases}$$

則 $\{a_n\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱發散(但皆非趨向 ∞), 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=1$。[注意其與問題2備註後習題 (3) 之差異!]

習題: (1) 設

$$a_n=\begin{cases}[(\ell-1)!(\ell-1)]^{-1}\ \ (\text{若 } n=\ell!,\\ \quad\text{而 } 2\le\ell\in N),\\ 1\ \ (\text{若 } n\in N\backslash\{\ell!|2\le\ell\in N\}),\end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱發散(但皆非趨向 ∞), 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=1$。[據 [IV], 由此立即可得合乎問題6所述條件之另一實例: 令

$$a_n=\begin{cases}(\ell-1)!(\ell-1)\ \ (\text{若 } n=\ell!,\\ \quad\text{而 } 2\le\ell\in N),\\ 1\ \ (\text{若 } n\in N\backslash\{\ell!|2\le\ell\in N\}),\end{cases}$$

則 $\{a_n\}$ 與 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$ 俱發散 (但皆非趨向 ∞), 且

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=1。]$$

(2) 設

$$a_n=\begin{cases}n^{-1}\ (\text{若 } n=\ell!, \text{ 而 } \ell\in N),\\ 1\quad (\text{若 } n\in N\backslash\{\ell!|\ell\in N\}),\end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱發散(但皆非趨向 ∞), 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k=\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}=1。$$

[據[IV], 由此又可得合乎問題6所述條件之另一實例, 其內容請仿上自敍之。]

問題8: 是否有發散正項數列 $\{a_n\}$ 能使 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$ 發散, $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱收斂, 且

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\neq\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k})^{-1}?$$

試論證之。

解答: 令

$$a_n=\begin{cases} n & (若\ n\ 爲正奇數),\\ (n-1)^{-1} & (若\ n\ 爲正偶數)。\end{cases}$$

(1) 因 $a_{2n-1}=2n-1\to\infty$ (當 $n\to\infty$), 而 $a_{2n}=\frac{1}{2n-1}\to 0$ (當 $n\to\infty$), 故數列 $\{a_n\}$ 發散但非趨向 ∞。

(2) 由

$$\frac{1}{2n-1}\sum_{k=1}^{2n-1}a_k\geq\frac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^n a_{2j-1}=\frac{n^2}{2n-1}$$

與

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}a_k>\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^n a_{2j-1}=\frac{n^2}{2n}=\frac{n}{2},$$

易知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k=\infty,$$

即 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$ 趨向 ∞。

(3) 因

$$(\prod_{k=1}^{2n-1}a_k)^{\frac{1}{2n-1}}=(2n-1)^{\frac{1}{2n-1}}\to 1\ (當 n\to\infty),$$

且

$$(\prod_{k=1}^{2n}a_k)^{\frac{1}{2n}}\equiv 1\to 1\quad (當\ n\to\infty),$$

故 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}=1$。

(4) 由

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{a_k}>\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^n\frac{1}{a_{2j}}=\frac{n^2}{2n}=\frac{n}{2}$$

與

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}a_k>\frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^n\frac{1}{a_{2j}}=\frac{n^2}{2n+1},$$

易知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k}=\infty,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k})^{-1}=0。$$

備註: (一) 注意

$$(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\geq(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k})^{-1},$$

易知本問題中之條件

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\neq\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k})^{-1}$$

亦可改爲

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}>\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k})^{-1}。$$

(二) 前篇問題4之解答所舉之實例即上示之 $\{a_n\}$。另請參看其備註 (一) 與 (二)。

(三) 據正文開端所作考察 [IV], 由問題5備註後之習題 (1), 立即可得合乎本問題所述條件之另一實例: 令

$$a_n=\begin{cases}4^\ell\ (若\ n=\ell^2,\ 而\ \ell\in N),\\ 1\ \ (若\ n\in N\backslash\{\ell^2|\ell\in N\}),\end{cases}$$

則 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞), $\{\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}a_k\}$ 趨向 ∞, $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=2$, 且 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=1$。

習題: 設

$$a_n=\begin{cases} n+1\,(\text{若 } n-1 \text{ 爲3之倍數}),\\ n^{-2}\quad(\text{若 } n-2 \text{ 爲3之倍數}),\\ n-1\,(\text{若 } n \text{ 爲3之倍數}),\end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞),

$$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$$

趨向 ∞,

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=1,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=0。$$

問題9: 是否有發散正項數列 $\{a_n\}$ 能使 $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 發散, $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱收斂, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\neq\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}?$$

試論證之。

解答: 令

$$a_n=\begin{cases} 2^{-n}\,(\text{若 } n=2^\ell-1, \text{而 } \ell\in N),\\ 2\quad(\text{若 } n\in N\backslash\{2^\ell-1|\ell\in N\}),\end{cases}$$

$c_n=(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}$。設 $2^\ell-1\le n<2^{\ell+1}-1$, 其中 $\ell, n\in N$。

(1) 因

$$a_{2^\ell-1}=2^{-(2^\ell-1)}\to 0\quad(\text{當 } \ell\to\infty),$$

而

$$a_{2^\ell}\equiv 2\to 2\quad(\text{當 } \ell\to\infty),$$

故數列 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞)。

(2) 顯然, $\frac{2(n-\ell)}{n}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k<2$。但由 $n\ge 2^\ell-1=(1+1)^\ell-1\ge\ell+\frac{\ell(\ell-1)}{2}>\frac{\ell^2}{2}$ 可得 $\ell<\sqrt{2n}$, 故有

$$2(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}})<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k<2。$$

因 $\lim_{n\to\infty}2(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}})=2(=\lim_{n\to\infty}2)$, 據夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=2$。

(3) 當然,

$$c_n=\Big[2^{n-\ell}\prod_{k=1}^{\ell}2^{-(2^k-1)}\Big]^{\frac{1}{n}}=\Big[2^{n-2(2^\ell-1)}\Big]^{\frac{1}{n}}。$$

據此, 易知

$$c_{2^\ell-1}\equiv\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}\quad(\text{當 } \ell\to\infty),$$

而

$$c_{2(2^\ell-1)}\equiv 1\to 1\quad(\text{當 } \ell\to\infty),$$

故 $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 發散 (但非趨向 ∞)。

(4) 令 $m=2^\ell-1$, 則 $n<2^{\ell+1}-1=2m+1$, 故 $n\le 2m$, 即 $m\ge\frac{n}{2}$。據此, 可知

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\ge\frac{2^m}{n}=\frac{(1+1)^m}{n}>\frac{m(m-1)}{2n}$$
$$\ge\frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)}{2n}=\frac{n-2}{8},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\infty,$$

遂得 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=0$ 矣。

備註: (一) 若 $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 發散, 且 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱收斂, 則據不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k \geq (\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}} \geq (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k})^{-1}$$

與夾擠定理, 知必

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k > \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k})^{-1},$$

故本問題中之條件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k \neq \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k})^{-1}$$

實係多餘者, 理應刪去。本題所以將其保留而贅述之, 蓋爲使問題8～10呈現類似之形式, 俾便參照也。

(二) 前篇問題5之解答所舉之實例即上示之 $\{a_n\}$。另請參看其備註 (一)。

習題: 設

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} \ (\text{若 } n = 2^\ell - 1, \text{ 而 } \ell \in N), \\ 1 \quad (\text{若 } n \in N\backslash\{2^\ell - 1 | \ell \in N\}), \end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱發散 (但皆非趨向 ∞), $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = 1$, 且 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k})^{-1} = 0$。

問題10: 是否有發散正項數列 $\{a_n\}$ 能使 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 發散, $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱收斂, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k \neq \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}?$$

試論證之。

解答: 令

$$a_n = \begin{cases} 2^{-\ell} \ (\text{若 } n = 2^\ell - 1, \text{ 而 } \ell \in N), \\ 1 \quad (\text{若 } n \in N\backslash\{2^\ell - 1 | \ell \in N\} \\ \qquad \text{且爲奇數}), \\ 3 \quad (\text{若 } n \text{ 爲正偶數}), \end{cases}$$

$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$, $c_n = (\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$, $B_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$。

(1) 因 $a_{2^\ell - 1} = 2^{-\ell} \to 0$ (當 $\ell \to \infty$), 而 $a_{2\ell} \equiv 3 \to 3$ (當 $\ell \to \infty$), 故數列 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞)。

(2) 若 $m \geq 2^\ell - 1$, 其中 ℓ, $m \in N$, 則 $m \geq (1+1)^\ell - 1 \geq \ell + \frac{\ell(\ell-1)}{2} > \frac{\ell^2}{2}$, 故 $\ell < \sqrt{2m}$。茲對 $\{b_{2n}\}$ 與 $\{b_{2n-1}\}$ 二數列分別討論如次:

(i) 若 $2^\ell - 1 < 2n < 2^{\ell+1} - 1$, 其中 ℓ, $n \in N$, 則

$$\begin{aligned} b_{2n} &= \frac{1}{2n}\Big[3n + (n-\ell) + \sum_{k=1}^{\ell} 2^{-k}\Big] \\ &= 2 + \frac{1}{2n}\Big[-\ell + 1 - (\frac{1}{2})^\ell\Big] \end{aligned}$$

且 $\ell < 2\sqrt{n}$, 故 $2 > b_{2n} > 2 - \frac{\ell}{2n} > 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}$。因 $\lim_{n\to\infty}(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 2 (= \lim_{n\to\infty} 2)$, 由夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty} b_{2n} = 2$。

(ii) 若 $2^\ell - 1 \leq 2n - 1 < 2^{\ell+1} - 1$, 其中 ℓ, $n \in N$, 則

$$\begin{aligned} b_{2n-1} &= \frac{1}{2n-1}\Big[3(n-1) + (n-\ell) + \sum_{k=1}^{\ell} 2^{-k}\Big] \\ &= 2 - \frac{1}{2n-1}\Big[\ell + (\frac{1}{2})^\ell\Big] \end{aligned}$$

且 $\ell < \sqrt{2(2n-1)}$, 故 $2 > b_{2n-1} > 2-\frac{\ell+1}{2n-1} > 2-(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n-1}}+\frac{1}{2n-1})$。因

$$\lim_{n\to\infty}[2-(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n-1}}+\frac{1}{2n-1})]=2(=\lim_{n\to\infty}2),$$

由夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty}b_{2n-1}=2$。

合 (i) 與 (ii), 遂得$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k = 2$。

(3) 若 $m \geq 2^{\ell}-1$, 其中 ℓ, $m \in N$, 注意 $\ell=1,2$ 時$(\ell-2)^3 \leq 0$, 利用二項展開公式, 易得 $m \geq (1+1)^{\ell}-1 > \frac{(\ell-2)^3}{3!}$, 故 $\ell < \sqrt[3]{6m}+2$。茲對 $\{c_{2n}\}$ 與 $\{c_{2n-1}\}$ 二數列分別討論如次:

(i) 若 $2^{\ell}-1 < 2n < 2^{\ell+1}-1$, 其中 ℓ, $n \in N$, 則

$$c_{2n}=\Big[3^n(\frac{1}{2})^{\sum_{k=1}^{\ell}k}\Big]^{\frac{1}{2n}}=\sqrt{3}(\frac{1}{2})^{\frac{\ell(\ell+1)}{4n}}。$$

據 $0<\ell<\sqrt[3]{12n}+2$, 可得 $0<\frac{\ell(\ell+1)}{4n}<\frac{(\sqrt[3]{12n}+3)^2}{4n}$。因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{12n}+3)^2}{4n}=0(=\lim_{n\to\infty}0),$$

由夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ell(\ell+1)}{4n}=0$, 故 $\lim_{n\to\infty}c_{2n}=\sqrt{3}$。

(ii) 若 $2^{\ell}-1 \leq 2n-1 < 2^{\ell+1}-1$, 其中 ℓ, $n \in N$, 則

$$\begin{aligned}c_{2n-1}&=\Big[3^{n-1}(\frac{1}{2})^{\sum_{k=1}^{\ell}k}\Big]^{\frac{1}{2n-1}}\\&=3^{\frac{n-1}{2n-1}}(\frac{1}{2})^{\frac{\ell(\ell+1)}{2(2n-1)}}。\end{aligned}$$

據 $0<\ell<\sqrt[3]{6(2n-1)}+2$, 可得

$$0<\frac{\ell(\ell+1)}{2(2n-1)}<\frac{(\sqrt[3]{6(2n-1)}+3)^2}{2(2n-1)}。$$

因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{6(2n-1)}+3)^2}{2(2n-1)}=0(=\lim_{n\to\infty}0),$$

由夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ell(\ell+1)}{2(2n-1)}=0$, 又 $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n-1}=\frac{1}{2}$, 故 $\lim_{n\to\infty}c_{2n-1}=\sqrt{3}$。

合(i) 與 (ii), 遂得

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=\sqrt{3}。$$

(4) 因

$$\begin{aligned}B_{2^{\ell}-1}&=\frac{1}{2^{\ell}-1}\Big[\frac{1}{3}(2^{\ell-1}-1)+(2^{\ell-1}-\ell)\\&\qquad+\sum_{k=1}^{\ell}2^k\Big]\\&=\frac{1}{2^{\ell}-1}\Big[\frac{1}{3}(2^{\ell-1}-1)+(2^{\ell-1}-\ell)\\&\qquad+2(2^{\ell}-1)\Big]\\&\to\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+2=\frac{8}{3}\quad(\text{當 }\ell\to\infty),\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}B_{2(2^{\ell}-1)}&=\frac{1}{2(2^{\ell}-1)}\Big[\frac{1}{3}(2^{\ell}-1)\\&\qquad+(2^{\ell}-1-\ell)+\sum_{k=1}^{\ell}2^k\Big]\\&=\frac{1}{2(2^{\ell}-1)}\Big[\frac{1}{3}(2^{\ell}-1)\\&\qquad+(2^{\ell}-1-\ell)+2(2^{\ell}-1)\Big]\\&\to\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{3}\quad(\text{當 }\ell\to\infty),\end{aligned}$$

故 $\{B_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞)。於是, 數列 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 亦發散(但非趨向 ∞)。

備註: (一) 注意

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k \geq (\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}},$$

易知本問題中之條件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k \neq \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}$$

亦可改爲

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k > \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}。$$

(二) 上示實例 $\{a_n\}$ 之建構, 其靈感來自問題7之解答及其備註 (一)。

(三) 據正文開端所作考察 [IV], 由本問題之解答所示之結果, 立即可得合乎問題8所述條件之另一實例: 令

$$a_n=\begin{cases}2^{\ell}\ (\text{若 } n=2^{\ell}-1,\ \text{而 } \ell\in N),\\ 1\ \ (\text{若 } n\in N\backslash\{2^{\ell}-1|\ell\in N\}\\ \qquad \text{且爲奇數}),\\ \frac{1}{3}\ \ (\text{若 } n \text{ 爲正偶數}),\end{cases}$$

則 $\{a_n\}$ 與 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$ 俱發散 (但皆非趨向 ∞), $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 且 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=\frac{1}{2}$。

習題: 設

$$a_n=\begin{cases}3^{-\ell}\ (\text{若 } n=3^{\ell}-2,\ \text{而 } \ell\in N),\\ 1\quad (\text{若 } n\in N\backslash\{3^{\ell}-2|\ell\in N\}\\ \qquad \text{且爲奇數}),\\ 2\quad (\text{若 } n \text{ 爲正偶數}),\end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱發散(但皆非趨向 ∞), $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{2}$, 且 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=\sqrt{2}$。[據 [IV], 由此立即可得合乎問題8所述條件之另一實例: 令

$$a_n=\begin{cases}3^{\ell}\ (\text{若 } n=3^{\ell}-2,\ \text{而 } \ell\in N),\\ 1\ \ (\text{若 } n\in N\backslash\{3^{\ell}-2|\ell\in N\}\\ \qquad \text{且爲奇數}),\\ \frac{1}{2}\ \ (\text{若 } n \text{ 爲正偶數}),\end{cases}$$

則 $\{a_n\}$ 與 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$ 俱發散 (但皆非趨向 ∞), $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 且 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=\frac{2}{3}$。]

問題11: 是否有發散正項數列 $\{a_n\}$ 能使 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱發散, 且 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 收斂? 試論證之。

解答: 令

$$a_n=\begin{cases}2^{n}\ (\text{若 } n \text{ 爲正奇數}),\\ 1\ \ (\text{若 } n \text{ 爲正偶數}),\end{cases}$$

$b_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$, $c_n=(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}$, $B_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$。

(1) 因 $a_{2n-1}=2^{2n-1}\to\infty$ (當 $n\to\infty$), 而 $a_{2n}\equiv 1\to 1$ (當 $n\to\infty$), 故數列 $\{a_n\}$ 發散但非趨向 ∞。

(2) 由

$$c_{2n-1}>c_{2n}=\Big[2^{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}\Big]^{\frac{1}{2n}}=2^{\frac{n}{2}},$$

易知 $\lim_{n\to\infty}c_n=\infty$, 即數列 $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 趨向 ∞。

(3) 據 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\geq(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}$ 與 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=\infty$ [已證於 (2)], 即知 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$ 亦趨向 ∞。

(4) 由 $\{a_n\}$ 之定義, 注意 $0<B_n<1$ $\forall n\in N$, 易得

$$\frac{n-1}{2n-1}<B_{2n-1}<B_{2n} =\frac{1}{2n}\Big[n+\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2})^{2k-1}\Big]<\frac{n+1}{2n}。$$

因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2},$$

由夾擠定理, 即知

$$\lim_{n\to\infty} B_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} B_{2n} = \frac{1}{2},$$

故

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \frac{1}{2}。$$

據是, 遂有 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = 2$ 矣。

備註: (一) 據正文開端所作考察 [IV], 由問題4備註後之習題, 立即可得合乎本問題所述條件之另一實例: 令

$$a_n = \begin{cases} 1\ (\text{若 } n \text{ 爲正奇數}), \\ n\ (\text{若 } n \text{ 爲正偶數}), \end{cases}$$

則 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞), $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱趨向 ∞, 且

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = 2。$$

(二) 據[IV], 由問題9之解答所示之結果及其備註後之習題, 又可得合乎本問題所述條件之另二實例: 令

$$a_n = \begin{cases} 2^n\ (\text{若 } n = 2^\ell - 1, \text{ 而 } \ell \in N), \\ \frac{1}{2}\ \ (\text{若 } n \in N\backslash\{2^\ell - 1 | \ell \in N\}), \end{cases}$$

則 $\{a_n\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱發散 (但皆非趨向 ∞), $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 趨向 ∞, 且 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = \frac{1}{2}$。令

$$a_n = \begin{cases} 2^n\ (\text{若 } n = 2^\ell - 1, \text{ 而 } \ell \in N), \\ 1\ \ (\text{若 } n \in N\backslash\{2^\ell - 1 | \ell \in N\}), \end{cases}$$

則 $\{a_n\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱發散 (但皆非趨向 ∞), $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 趨向 ∞, 且 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = 1$。

習題: 設

$$a_n = \begin{cases} 2^n\ (\text{若 } n-1 \text{ 爲3之倍數}), \\ 1\ \ (\text{若 } n-2 \text{ 爲3之倍數}), \\ 3\ \ (\text{若 } n \text{ 爲3之倍數}), \end{cases}$$

試證$\{a_n\}$發散 (但非趨向∞), $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱趨向 ∞, 且

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} = \frac{9}{4}。$$

問題12: 是否有發散正項數列 $\{a_n\}$ 能使 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱發散, 且 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 收斂? 試論證之。

解答: 令

$$a_n = \begin{cases} 2^\ell\ \ (\text{若 } n = 2^\ell - 1, \text{ 而 } \ell \in N), \\ 2^{-\ell}\ (\text{若 } n = 2^\ell, \text{ 而 } \ell \in N), \\ 1\ \ \ (\text{若 } n \neq 2^\ell - 1,\ 2^\ell, \text{ 而 } \ell \in N), \end{cases}$$

$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, $c_n = (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$, $B_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$。

(1) 因 $a_{2^\ell-1} = 2^\ell \to \infty$ (當 $\ell\to\infty$), 而 $a_{2^\ell} = 2^{-\ell} \to 0$ (當 $\ell\to\infty$), 故數列 $\{a_n\}$ 發散 [但非趨向 ∞]。

(2) 因

$$\begin{aligned} & b_{2^\ell-1}\ (\text{設 } \ell > 1) \\ =& \frac{1}{2^\ell - 1}\Big\{\sum_{k=1}^{\ell} 2^k + \sum_{k=1}^{\ell-1}(\frac{1}{2})^k + (2^\ell - 2\ell)\Big\} \\ =& \frac{1}{2^\ell - 1}\{2(2^\ell-1) + [1-(\frac{1}{2})^{\ell-1}] + (2^\ell - 2\ell)\} \\ & \to 2 + 1 = 3 \quad (\text{當 } \ell\to\infty), \end{aligned}$$

而

$b_{2(2^\ell-1)}$

$$= \frac{1}{2(2^\ell - 1)}\Big\{\sum_{k=1}^{\ell} 2^k + \sum_{k=1}^{\ell}(\frac{1}{2})^k$$
$$+[2(2^\ell - 1) - 2\ell]\Big\}$$
$$= \frac{1}{2(2^\ell - 1)}\{2(2^\ell - 1) + [1 - (\frac{1}{2})^\ell]$$
$$+[2(2^\ell - 1) - 2\ell]\}$$
$$\to 1 + 1 = 2 \quad (當\ \ell \to \infty),$$

故 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 發散 (但非趨向 ∞)。

(3) 注意 $2^\ell - 1 < n < 2^{\ell+1} - 1$ $(\ell, n \in N)$ 時 $c_n \equiv 1$, 且 $c_{2^\ell - 1} = 2^{\frac{\ell}{2^\ell - 1}}$, 易知 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = 1$。

(4) 因

$$B_{2^\ell - 1}\ (設\ \ell > 1)$$
$$=\frac{1}{2^\ell - 1}\Big\{\sum_{k=1}^{\ell}(\frac{1}{2})^k + \sum_{k=1}^{\ell-1} 2^k + (2^\ell - 2\ell)\Big\}$$
$$=\frac{1}{2^\ell - 1}\{[1-(\frac{1}{2})^\ell]+(2^\ell-2) + (2^\ell - 2\ell)\}$$
$$\to 1 + 1 = 2 \quad (當\ \ell \to \infty),$$

而

$$B_{2^\ell}=\frac{1}{2^\ell}\Big\{\sum_{k=1}^{\ell}(\frac{1}{2})^k + \sum_{k=1}^{\ell} 2^k + (2^\ell - 2\ell)\Big\}$$
$$=\frac{1}{2^\ell}\{[(1-(\frac{1}{2})^\ell]+2(2^\ell-1)+(2^\ell-2\ell)\}$$
$$\to 2 + 1 = 3 \quad (當\ \ell \to \infty),$$

故 $\{B_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞)。於是, 數列 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 亦發散(但非趨向 ∞)。

備註: 上示實例 $\{a_n\}$ 及下示習題 $\{a_n\}$ 二者之建構, 其靈感俱來自問題6與10二者之解答。

習題: 設

$$a_n = \begin{cases} 2^{-\ell}\ (若\ n=2^\ell - 1,\ 而\ell為正奇數), \\ 2^\ell \quad (若\ n=2^\ell-1,\ 而\ell為正偶數), \\ 1 \quad (若\ n \in N\backslash\{2^\ell - 1|\ell \in N\}), \end{cases}$$

試證$\{a_n\}$,$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$與$\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱發散 (但皆非趨向 ∞), 且

$$\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = 1。$$

問題13: 是否有發散正項數列 $\{a_n\}$ 能使 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱發散, 且 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 收斂? 試論證之。

解答: 令 $m_1 = 1$, $m_{\ell+1} = 2^{m_\ell}$ $\forall\ell \in N$,

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n}\ (若\ n = m_\ell,\ 而\ \ell \in N), \\ 1 \quad (若\ n \in N\backslash\{m_\ell|\ell \in N\}), \end{cases}$$

$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, $c_n = (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$, $B_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$。設 $m_\ell \le n < m_{\ell+1}$, 其中 $\ell, n \in N$。[顯然, $m_\ell \ge \ell\ \forall\ell \in N$。]

(1) 若 $\ell \ge 3 (n \ge 4)$, 則利用二項展開公式, 可得

$$n \ge m_\ell = 2^{m_{\ell-1}} \ge 2^{\ell-1} = (1+1)^{\ell-1}$$
$$> \frac{(\ell-1)(\ell-2)}{2} > \frac{(\ell-2)^2}{2},$$

故 $\ell < \sqrt{2n} + 2\ \forall\ell \ge 3 (n \ge 4)$。

(2) 若 $\ell \ge 3$, 則 $\sum_{k=1}^{\ell} m_k < \frac{1}{2}m_{\ell+1}$。茲以數學歸納法證明如次:

(i) $\ell = 3$ 時, 上示不等式顯然成立。

(ii) 設 $\sum_{k=1}^{\ell} m_k < \frac{1}{2}m_{\ell+1}$ $(\ell \ge 3)$, 則 $\sum_{k=1}^{\ell+1} m_k < \frac{3}{2}m_{\ell+1}$。利用二項展開公式,

易得

$$\begin{aligned} m_{\ell+2} &= 2^{m_{\ell+1}} = (1+1)^{m_{\ell+1}} \\ &> m_{\ell+1} + \frac{1}{2} m_{\ell+1}(m_{\ell+1}-1) \\ &= \frac{1}{2} m_{\ell+1}(m_{\ell+1}+1) \\ &\geq \frac{1}{2} m_{\ell+1}(m_4+1) > 3m_{\ell+1}, \end{aligned}$$

故 $\sum_{k=1}^{\ell+1} m_k < \frac{1}{2} m_{\ell+2}$。

(3) 注意 $m_1 = 1$, $m_2 = 2 = 1+1$, $m_k > 1\ \forall k \geq 3$, 易知 $\sum_{k=1}^{\ell} m_k - (\ell+1) > 0\ \forall \ell \geq 3$。

(4) 因 $a_{m_\ell} = 2^{-m_\ell} \to 0$ (當 $\ell \to \infty$), 而 $a_{m_\ell+1} \equiv 1$ (若 $\ell > 1$) $\to 1$ (當 $\ell \to \infty$), 故數列 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞)。

(5) 顯然, $\frac{n-\ell}{n} < b_n < 1$。合 (1), 可得 $1 - \frac{\sqrt{2n}+2}{n} < b_n < 1\ \forall n \geq 4$。因 $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{\sqrt{2n}+2}{n}) = 1 (= \lim_{n\to\infty} 1)$, 由夾擠定理, 即知 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$。

(6) 當然, $c_n = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\ell} m_k}$。茲對 $\{c_{m_\ell}\}$ 與 $\{c_{m_{\ell+1}-1}\}$ 二數列分別討論如次:

(i) 因 $\frac{1}{m_\ell}\sum_{k=1}^{\ell} m_k \geq 1$, 故 $c_{m_\ell} \leq \frac{1}{2}\ \forall \ell \in N$。

(ii) 若 $\ell \geq 3$, 則由 (2) 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_{\ell+1}-1}\sum_{k=1}^{\ell} m_k &< \frac{m_{\ell+1}}{2(m_{\ell+1}-1)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2(m_{\ell+1}-1)} \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

故 $c_{m_{\ell+1}-1} > (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\ \forall \ell \geq 3$。

合 (i) 與 (ii), 即知 $\{c_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞)。

(7) 顯然,

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{n-\ell}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\ell} 2^{m_k} \\ &= 1 + \frac{1}{n}\Big[\sum_{k=1}^{\ell} m_{k+1} - \ell\Big] \\ &= 1 + \frac{1}{n}\Big[m_{\ell+1} + \sum_{k=1}^{\ell} m_k - (\ell+1)\Big]。 \end{aligned}$$

茲對 $\{B_{m_\ell}\}$ 與 $\{B_{m_{\ell+1}-1}\}$ 二數列分別討論如次:

(i) 由 (2) 與 (3), 可得

$$\begin{aligned} B_{m_\ell} &= 1 + \frac{1}{m_\ell}\Big[m_{\ell+1} + \sum_{k=1}^{\ell} m_k - (\ell+1)\Big] \\ &> 1 + \frac{m_{\ell+1}}{m_\ell} \\ &> 1 + 2 = 3 \quad \forall \ell \geq 3。 \end{aligned}$$

(ii) 由 (2), 可得

$$\begin{aligned} &B_{m_{\ell+1}-1} \\ &= 1 + \frac{1}{m_{\ell+1}-1}\Big[m_{\ell+1} + \sum_{k=1}^{\ell} m_k - (\ell+1)\Big] \\ &< 1 + \frac{1}{m_{\ell+1}-1}\Big[\frac{3}{2} m_{\ell+1} - (\ell+1)\Big] \\ &= \frac{5}{2} + \frac{\frac{1}{2} - \ell}{m_{\ell+1}-1} \\ &< \frac{5}{2} \quad \forall \ell \geq 3。 \end{aligned}$$

合 (i) 與 (ii), 即知 $\{B_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞)。於是, 數列 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 亦發散(但非趨向 ∞)。

備註: (一) 問題1～14中, 本題難度最高; 其實例之建構, 本題費時最多。

(二) 事實上, $\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{m_{\ell+1}}\sum_{k=1}^{\ell} m_k = 0$。茲證如次: 設 $\ell > 1$。利用二項展開公式,

易知

$$m_{\ell+1}=2^{m_\ell}=(1+1)^{m_\ell}>m_\ell+\frac{m_\ell(m_\ell-1)}{2}$$
$$>\frac{m_\ell^2}{2}。$$

仿此, 可得 $m_\ell = 2^{m_{\ell-1}} \geq 2^{\ell-1} > \frac{(\ell-1)^2}{2}$, 故 $\ell < \sqrt{2m_\ell}+1$。合之, 遂有

$$0<\frac{1}{m_{\ell+1}}\sum_{k=1}^{\ell} m_k<\frac{\ell m_\ell}{m_{\ell+1}}$$
$$<\frac{2(\sqrt{2m_\ell}+1)m_\ell}{m_\ell^2}=\frac{2(\sqrt{2m_\ell}+1)}{m_\ell}。$$

因 $\lim_{\ell\to\infty}\frac{2(\sqrt{2m_\ell}+1)}{m_\ell} = 0(= \lim_{\ell\to\infty} 0)$, 由夾擠定理, 即知 $\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{m_{\ell+1}}\sum_{k=1}^{\ell} m_k = 0$。

據此, 易證: 當 $\ell \to \infty$ 時, $c_{m_\ell} \to \frac{1}{2}$, $c_{m_{\ell+1}-1} \to 1$, $B_{m_\ell} \to \infty$, $B_{m_{\ell+1}-1} \to 2$。由是, 即知 $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱發散(但皆非趨向 ∞) 矣。[請與 (6), (7) 之推導比較之]

(三) 據正文開端所作考察 [IV], 由本問題之解答所示之結果, 立即可得合乎問題11所述條件之另一實例: 令 $m_1 = 1$, $m_{\ell+1} = 2^{m_\ell}$ $\forall \ell \in N$,

$$a_n=\begin{cases}2^n\ (\text{若 } n=m_\ell,\ \text{而 } \ell\in N),\\ 1\ \ (\text{若 } n\in N\backslash\{m_\ell|\ell\in N\}),\end{cases}$$

則 $\{a_n\}$, $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱發散 (但皆非趨向 ∞), 且

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k})^{-1}=1。$$

習題: 下列二題所予之 $\{a_n\}$, 分別滿足問題7與問題13所述之條件。[注意 (1) 所予之 $\{a_n\}$與上示解答所舉實例之差異!]由是, 據 [IV], 立即可得合乎問題6與問題11所述條件之實例, 其內容請讀者仿上備註 (三) 自敍之。

(1) 設 $m_1 = 1$, $m_{\ell+1} = 2^{m_\ell}$ $\forall \ell \in N$,

$$a_n=\begin{cases}n^{-1}\ (\text{若 } n=m_\ell,\ \text{而 } \ell\in N),\\ 1\quad (\text{若 } n\in N\backslash\{m_\ell|\ell\in N\}),\end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱發散(但皆非趨向 ∞), 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}} = 1$。

(2) 設 $m_1 = 1$, $m_{\ell+1} = 3^{m_\ell}$ $\forall \ell \in N$,

$$a_n=\begin{cases}3^{-n}\ (\text{若 } n=m_\ell,\ \text{而 } \ell\in N),\\ 1\quad (\text{若 } n\in N\backslash\{m_\ell|\ell\in N\}),\end{cases}$$

試證$\{a_n\}$, $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$與$\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱發散 (但皆非趨向 ∞), 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k=1。$$

問題 14: 是否有發散正項數列 $\{a_n\}$ 能使 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$, $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱發散? 試論證之。

解答: 令 $a_n = 2^n$ $\forall n \in N$。

(1) 顯然, 數列 $\{a_n\}$ 趨向 ∞。

(2) 因

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(\frac{1}{2})^k=\frac{1}{n}[1-(\frac{1}{2})^n]<\frac{1}{n},$$

故

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\geq(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\geq(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k})^{-1}>n,$$

遂知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=\infty,$$

即數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$, $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 亦俱趨向 ∞。

備註: (一) 事實上, 問題1備註 (三) 已指出所有趨向 ∞ 之正項數列 $\{a_n\}$ 皆合乎本問題所述之條件。但該備註之推導, 須用及問題1 證明 (1) 所得之結果: 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (定數), 則 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\alpha$。

(二) 本題解答所舉之實例甚簡明, 所作之論證極淺顯。爲維持解答之獨立及完整, 未逕用問題1備註 (三) 所述之事實。

(三) 據正文開端所作考察 [IV], 由問題2備註後之習題 (1), 立即可得合乎本題所述條件之另一實例: 令

$$a_n=\begin{cases}1\ (\text{若 } n=\ell^2,\ \text{而 } \ell\in N),\\ n\ (\text{若 } n\in N\backslash\{\ell^2|\ell\in N\}),\end{cases}$$

則$\{a_n\}$發散 (但非趨向∞), 且$\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$, $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱趨向 ∞。

習題: 設

$$a_n=\begin{cases}1\ (\text{若 } n=1),\\ \frac{1}{2}\ (\text{若 } 2^\ell\le n\le 2^\ell+2^{\ell-1}-1,\\ \qquad \text{而 } \ell\in N),\\ 2\ (\text{若 } 2^\ell+2^{\ell-1}\le n\le 2^{\ell+1}-1,\\ \qquad \text{而 } \ell\in N\}),\end{cases}$$

試證 $\{a_n\}$, $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\}$, $\{(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 與 $\{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\}$ 俱發散(但皆非趨向 ∞)。

以上所示各問題之解答, 均維持其獨立性及完整性。因此, 不同問題之論證, 難免有部分重複 (相同或類似) 之處也。

附錄 (級數斂散之比較)

正項級數$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$及$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$ 四者斂散性之比較, 可論述如次:

問題甲: 若 $a_n>0\ \forall n\in N$, 則級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k)$ 必發散。試證明之。

證明: 因 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\ge\frac{a_1}{n}\ \forall n\in N$, 且正項級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{n}$ 發散, 由比較審斂法, 即知 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k)$ 必發散。

問題乙: 若正項級數$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收斂, 則級數$\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}$與$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$必俱收斂, 且

$$e\sum_{n=1}^{\infty}a_n>\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}>\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1},$$

其中 $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$。試證明之。

證明: (1)Carleman不等式定理: 若正項級數$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收斂, 則級數$\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}$必收斂, 且 $e\sum_{n=1}^{\infty}a_n>\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}$, 其中 $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$。關於本定理, G. Pólya 在其名著 Mathematics and Plausible Reasoning (1954) 中, 除於 XVI 章4節先予簡短之機械式證明 (見 II 册147頁) 外, 並於5及6節 (147~152頁) 再作詳細之啓發式推導及解說 (闡釋動機), 讀者不妨參閱之 (該書有中譯本)。

(2) 因

$$(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} \geq (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} \quad \forall n \in N,$$

而級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$ 收斂 [見 (1)], 由比較審斂法, 即知 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$ 必收斂。

(3) 若 $a_\ell = a_m$ $\forall \ell,\ m \in N$, 則級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 顯然發散。因此與題設相悖, 故必有$\ell,\ m \in N$能使$a_\ell \neq a_m$。設$p = \max(\ell, m)$, 則有$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{a_k} > (\prod_{k=1}^{p}\frac{1}{a_k})^{\frac{1}{p}}$, 即 $(\prod_{k=1}^{p} a_k)^{\frac{1}{p}} > (\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{a_k})^{-1}$。據是與

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{q}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} - \sum_{n=1}^{q}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\\ &\geq (\prod_{k=1}^{p} a_k)^{\frac{1}{p}} - (\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{a_k})^{-1} \quad \forall q \geq p\end{aligned}$$

及 (1) 並 (2), 遂得

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} - \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}\\ &\geq (\prod_{k=1}^{p} a_k)^{\frac{1}{p}} - (\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{a_k})^{-1} > 0,\end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} > \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}。$$

問題丙: 是否有發散正項級數$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$能使$\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}$與$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$俱收斂? 試論證之。

解答: 令

$$a_n = \begin{cases} 16^{-n} \text{ (若 } n \text{ 爲正奇數)}, \\ 1 \quad\ \text{ (若 } n \text{ 爲正偶數)}。\end{cases}$$

(1) 由 $a_{2n} \equiv 1$ 易知 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ [事實上, 數列 $\{a_n\}$ 發散 (但非趨向 ∞)], 故級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。[據 $\sum_{n=1}^{2\ell} a_n > \ell$ $\forall \ell \in N$, 亦易知級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。]

(2) 若 $n = 2\ell$, 而 $\ell \in N$, 則

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} a_k &= \prod_{j=1}^{\ell} a_{2j-1} = 16^{-\sum_{j=1}^{\ell}(2j-1)}\\ &= 16^{-\ell^2} = 2^{-n^2},\end{aligned}$$

故 $(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = 2^{-n}$; 若 $n = 2\ell - 1$, 而 $\ell \in N$, 則

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{j=1}^{\ell} a_{2j-1} = 16^{-\ell^2} = 2^{-(n+1)^2},$$

故 $(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} < 2^{-n}$。據是, 遂得

$$(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1} \leq (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} \leq 2^{-n} \ \forall n \in N。$$

因級數 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ 收斂, 由比較審斂法, 即知 $\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$ 俱收斂。

備註: 若 $a_n > 0$ $\forall n \in N$, 且級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$ 收斂, 則據 $(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} \geq (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$ 與比較審斂法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$ 必收斂, 故本問題中 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$ 收斂之條件實係多餘者, 理應刪去。本題所以將其保留而贅述之, 蓋爲比較 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$ 之斂散性, 而使問題丙、丁與戊呈現類似之形, 俾便參照也。

問題丁: 是否有發散正項級數$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$能使 $\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$ 發散, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$ 收斂? 試論證之。

解答: 令

$$a_n=\begin{cases}2^{-n} \ (\text{若 } n=2^\ell-1, \text{ 而 } \ell\in N),\\ 2 \quad (\text{若 } n\in N\backslash\{2^\ell-1|\ell\in N\})。\end{cases}$$

(1) 由 $a_{2^\ell}\equiv 2\ \forall\ell\in N$, 易知 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, 故級數 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 發散。

(2) 令 $c_n=(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$。若 $2^\ell-1\le n<2^{\ell+1}-1$, 其中 $\ell,n\in N$, 則顯然有

$$c_n=\Big[2^{n-\ell}\prod_{k=1}^{\ell}2^{-(2^k-1)}\Big]^{\frac{1}{n}}=\Big[2^{n-2(2^\ell-1)}\Big]^{\frac{1}{n}}。$$

據此, 即得 $c_{2(2^\ell-1)}\equiv 1\ \forall\ell\in N$, 故 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\neq 0$, 遂知級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$ 發散。

(3) 若 $2^\ell-1\le n<2^{\ell+1}-1$, 其中 ℓ, $n\in N$, 令 $m=2^\ell-1$, 則 $n<2^{\ell+1}-1=2m+1$, 故 $n\le 2m$, 即 $m\ge\frac{n}{2}$。當 $n\ge 5$ 時, $m\ge 3$, 利用二項展開公式, 可知

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}>\frac{2^m}{n}&=\frac{(1+1)^m}{n}\\ &>\frac{m(m-1)(m-2)}{6n}\\ &\ge(\frac{1}{6n})(\frac{n}{2})(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)\\ &=\frac{(n-2)(n-4)}{48},\end{aligned}$$

故

$$(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}<\frac{48}{(n-2)(n-4)}\ \forall n\ge 5。$$

因級數 $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{48}{(n-2)(n-4)}$ 收斂, 由比較審斂法, 即知 $\sum_{n=5}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$ 收斂, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$ 亦收斂。

備註: 據問題乙證明 (1) 所述之 Carleman 定理, 知若 $a_n>0\ \forall n\in N$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$ 發散, 則 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 必發散。因此, 理論上, 對上示解答所舉級數 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 實無須驗證其發散性。但爲維持本問題解答之獨立性及完整性, 仍將之納入驗證範圍。

問題戊: 是否有發散正項級數$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$能使 $\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$與$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$俱發散? 試論證之。

解答: 令 $a_n=1\ \forall n\in N$, 則

$$(\prod_{k=1}^{n}a_k)^{\frac{1}{n}}=(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}=1\quad\forall n\in N。$$

顯然, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$ 俱發散(其實三級數全同)。

備註: 本問題亦可改述如後: 是否有正項級數 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 能使 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})^{-1}$ 發散? 試論證之。[參看丙與丁二問題之備註]

—本文作者已於任教台灣大學數學系25年後退休—