# 星空燦爛的數學(II)
# —— 托勒密定理

蔡聰明

托勒密 13 册的著作「Almagest」(西元 150年) 集古希臘天文學的大成, 並且展示了歐氏幾何學與三角學的美妙應用。他爲了編製弦表 (the table of chords) 創立下面三個幾何定理:

定理 1: 考慮圓 $O$, 假設 $\overline{AOB}$ 爲直徑, $\overline{OC}\perp\overline{AB}$, $D$ 爲 $\overline{BO}$ 的平分點, 作 $\overline{CD}=\overline{DE}$, 見圖 1, 則 $\overline{EO}$ 爲圓內接正十邊形的邊長, $\overline{CE}$ 爲圓內接正五邊形的邊長。

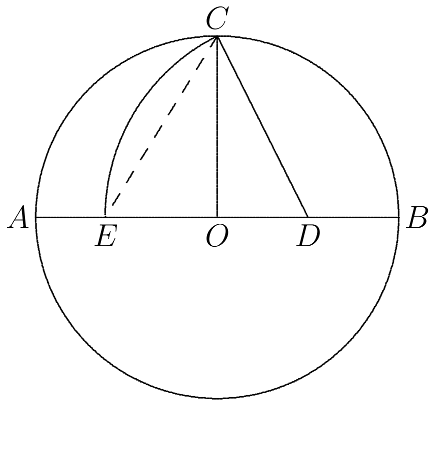



圖1

定理 2: (托勒密定理) 設 $ABCD$ 爲圓的內接四邊形, 則

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD} \quad (1)$$

亦即兩條對角線的乘積等於兩雙對邊乘積之和。

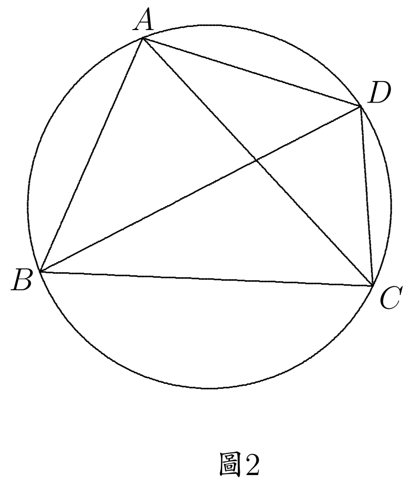



圖2

定理 3: 在一圓中, 若弦 $\overline{AB}$ 小於弦 $\overline{BC}$, 並且 $\overset{\frown}{AB}$ 與 $\overset{\frown}{BC}$ 是相應的劣弧, 則

$$\frac{\overline{AB}}{\overset{\frown}{AB}}>\frac{\overline{BC}}{\overset{\frown}{BC}} \quad (2)$$

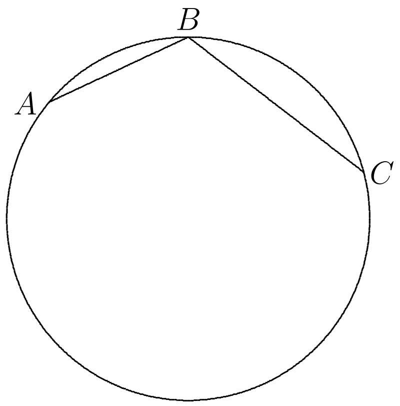



圖3

利用這三個定理, 再加上畢氏定理、插值法以及一些三角恆等式, 托勒密就可以編製出弦表, 眞正達到他所說的「以儘可能少的命題, 正確地求出各種圓心角所對應的弦長」。英國數學家 Augustus De Morgan (1806-1871) 稱讚弦表爲「希臘最美麗的作品之一」(one of the most beautiful in the Greek writers)。

有關定理1所涉及的數學與弦表的編製, 我們在參考資料 [1]裡已有詳盡的解說。本文我們要進一步來探討定理2以及在其周邊所發展出來的一些美妙結果 (定理3留待下文)。

## 一. 托勒密定理的發現

托勒密遵循古希臘的數學傳統, 只展示完成後的數學結果, 而抹掉探索的發現過程, 將數學按「定義、定理、證明」三部曲的演繹方式來呈現, 嚴謹、抽象且乾燥。

面對這種情況, 笛卡兒 (Descartes, 1596-1650) 辯解說, 並不是古希臘哲學家看輕發現過程, 而是因爲太重視了, 以致不願公諸於世,「鴛鴦繡取憑君看, 莫把金針度與人」。

Abel (1802-1829) 甚至批評 Gauss (1777-1855) 說, 他像一頭狡猾的狐狸在沙地上一面走, 一面用尾巴抹掉走過的足跡。

科學哲學家 E. Mach (1838-1916) 說得好:「你無法了解一個理論, 除非你知道它是如何發現的。」把這句話中的「理論」代換爲「定理」或「公式」也適用。

下面我們就採取三個角度來重建托勒密定理的發現過程, 但願拋磚引玉。

### 甲. 畢氏定理的兩元化

直角三角形最重要且漂亮的結果就是畢氏定理: 如圖4, 若 $\angle C = 90°$, 則

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{3}$$

亦即直角三角形的斜邊平方等於兩股的平方和。

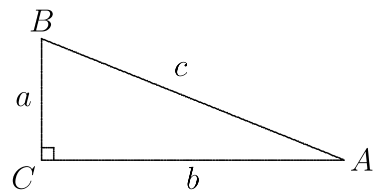



圖4

現在取兩個如圖4的直角三角形, 合成一個長方形, 見圖5, 並且將 (3) 式改寫成

$$c \cdot c = a \cdot a + b \cdot b \tag{4}$$

進一步將 (4) 式解釋爲長方形的兩條對角線乘積等於兩雙對邊乘積之和。這個過程我們稱之爲畢氏定理的兩元化。

另一方面, 我們也可以將兩個直角三角形安置如圖6之鳶形。由鳶形的面積公式可知

$$\frac{1}{2}\overline{CD}\cdot c = ab$$

從而

$$\overline{CD}\cdot c = ab + ab \tag{5}$$

因此, 對於圖6之鳶形亦有: 兩條對角線之乘積等於兩雙對邊乘積之和。

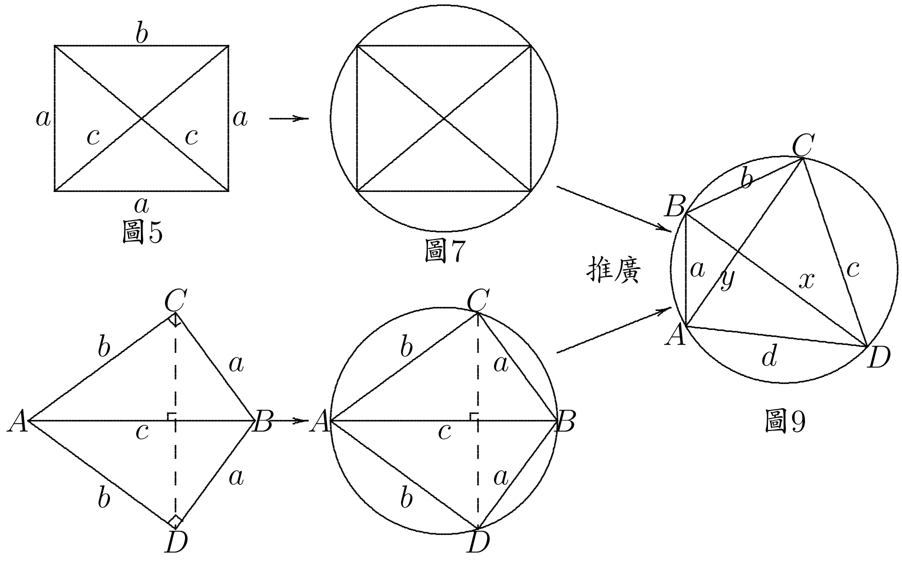



圖5　圖7　圖9　圖6　圖8

其次, 長方形與上述之鳶形皆可內接於一個圓之內, 參見圖7與圖8。根據這兩個內接四邊形之特例, 其邊與對角線的關係, 我們大膽地飛躍, 猜測任意的圓內接四邊形也都具有: 兩條對角線的乘積等於兩對邊乘積之和, 亦即 (參見圖9)

$$xy = ac + bd \tag{6}$$

對於一個猜測, 若可以找到一個反例, 那麼猜測就被否定掉, 應丟棄; 如果可以提出證明, 那麼猜測就上昇爲定理; 如果找不到反例, 也提不出證明 (如數論的 Goldbach 猜測與雙生質數猜測), 那麼猜測就暫時停留在猜測的地位, 有待後人繼續努力尋求解決。

對於 (6) 式之猜測, 我們可以提出證明, 從而建立了定理2之托勒密定理。特別地, 畢氏定理是托勒密定理的特例, 但卻是生出托勒密定理的種子。一般數學書都只將畢氏定理看成是托勒密定理的脚註, 甚爲可惜!

## 乙. 三角恆等式

爲了天文學的測星與幾何學的測圓, 我們必須知道各種圓心角 $\theta$ 所對應的弦 $\overline{AB}$ 之長, 參見圖10。我們不妨假設圓的半徑 $R = 1$, 因爲一切都是比例問題。

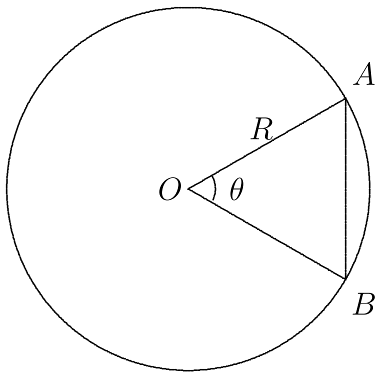



圖 10

對於圓內接正三、四、五、六、十邊形之邊長, 只需用一點兒歐氏平面幾何的知識, 就可以求得。但是, 對於其它較一般的弦長, 我們就必須使用一些三角恆等式, 最主要是和角公式、差角公式與半角公式, 我們分述如下:

(i) 和角公式

問題1: 在圓內, 已知兩弦 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 之長, 試求弦 $\overline{AC}$ 之長, 參見圖11。

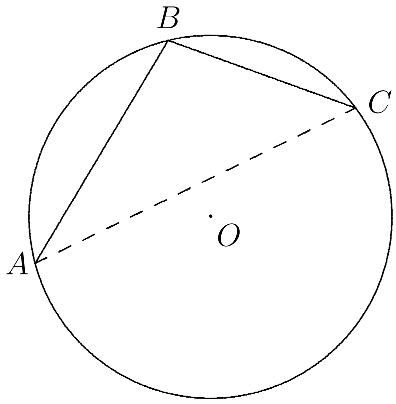



圖11

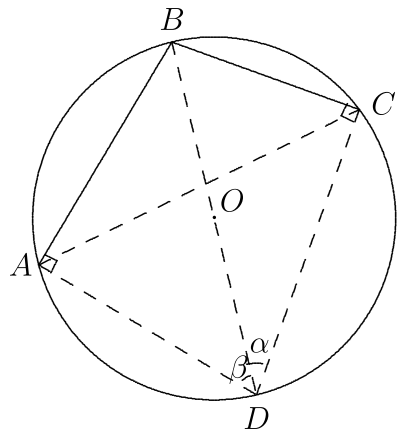



圖12

在圖12, 過 $B$ 點作圓的直徑 $\overline{BD}$, 連結 $\overline{AC}$、$\overline{AD}$ 與 $\overline{CD}$, 於是上述問題就相當於已知圓周角 $\alpha$ 與 $\beta$ 所對應的弦 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AB}$, 欲求和角 $\alpha+\beta$ 所對應的弦 $\overline{AC}$。

由正弦函數的和角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad (7)$$

以及正弦定律可知

$$\frac{\overline{AC}}{2R}=\frac{\overline{BC}}{2R}\cdot\frac{\overline{AD}}{2R}+\frac{\overline{CD}}{2R}\cdot\frac{\overline{AB}}{2R} \quad (8)$$

再利用畢氏定理求出 $\overline{AD}$ 與 $\overline{CD}$, 代入上式就得到

$$\overline{AC}=\frac{\overline{BC}}{2R}\sqrt{4R^2-\overline{AB}^2}+\frac{\overline{AB}}{2R}\sqrt{4R^2-\overline{BC}^2} \quad (9)$$

這樣就解決了問題1。

同時, 我們另有收獲: 將 (8) 式兩邊同乘以 $\overline{BD}(=2R)$ 的平方, 則得

$$\overline{BD}\cdot\overline{AC}=\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{AB}\cdot\overline{CD} \quad (10)$$

換言之, 對於圓內接四邊形 ABCD 有一條對角線爲直徑的情形, 我們已證得 (7) 式的

和角公式等價於 (10) 式, 而 (10) 式是說兩條對角線之乘積等於兩雙對邊乘積之和。

問題2: 在圓內, 已知兩弦 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BD}$ 之長, 試求弦 $\overline{AB}$ 之長, 參見圖13。

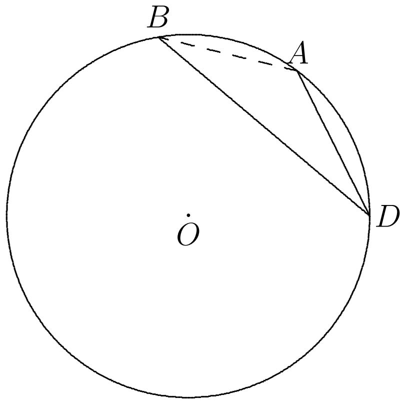



圖 13

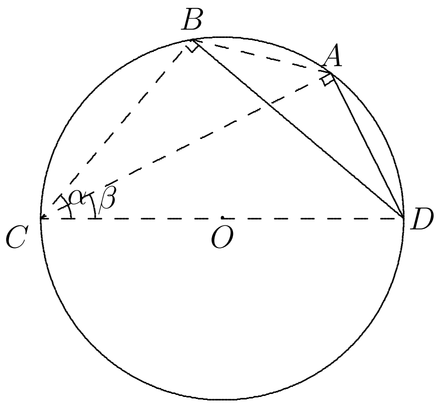



圖 14

如圖14, 過 $D$ 點作直徑 $\overline{CD}$, 連結 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$、$\overline{BC}$, 那麼問題2就相當於已知兩圓周角 $\alpha$ 與 $\beta$ 所對應的弦 $\overline{BD}$ 與 $\overline{AD}$, 欲求差角 $\alpha-\beta$ 所對應的弦 $\overline{AB}$。

由正弦函數的差角公式

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{11}$$

以及正弦定律可知

$$\frac{\overline{AB}}{2R}=\frac{\overline{BD}}{2R}\cdot\frac{\overline{AC}}{2R}-\frac{\overline{BC}}{2R}\cdot\frac{\overline{AD}}{2R} \tag{12}$$

再利用畢氏定理求出 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$, 代入 (12) 式就得到

$$\begin{aligned}\overline{AB}=&\frac{\overline{BD}}{2R}\sqrt{4R^2-\overline{AD}^2}\\&-\frac{\overline{AD}}{2R}\sqrt{4R^2-\overline{BD}^2}\end{aligned} \tag{13}$$

這樣就解決了問題2。

額外的收獲是: 由 (12) 式與 $\overline{CD}=2R$ 得到

$$\overline{BD}\cdot\overline{AC}=\overline{CD}\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{AD} \tag{14}$$

換言之, 對於圓內接四邊形 ABCD 有一邊為直徑的情形, 我們已證得 (12) 式的差角公式等價於 (14) 式, 而 (14) 式是說兩條對角線之乘積等於兩雙對邊乘積之和。

## 丙. 餘弦定律

設 $\Delta ABC$ 的三邊為 $a,b,c$, 則餘弦定律就是

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \tag{15}$$

參見圖15。

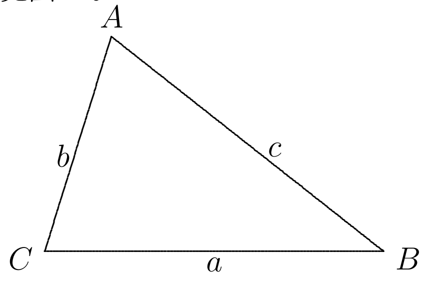



圖15

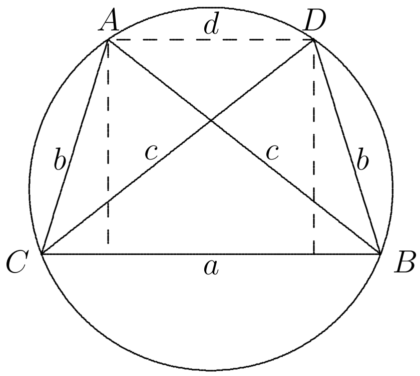



圖16

將 $\Delta ABC$ 翻轉 $180°$, 但讓底邊重疊在一起, 就得到如圖16之等腰梯形, 它可內接於一個圓之內, 這也可看作是三角形的兩元化。

因為 $d=\overline{AD}=a-2b\cos C$, 所以 (15) 式就變成

$$c\cdot c=b\cdot b+a\cdot d \tag{16}$$

換言之, 餘弦定律等價於圓內接等腰梯形的兩條對角線之乘積等於兩雙對邊乘積之和。

總結上述, 我們由熟知的畢氏定理、三角學的和角公式、差角公式以及餘弦定律出發, 看出幾類特殊的圓內接四邊形, 它們的邊與對角線的關係都具有相同的模式 (pattern), 於是我們就大膽將此模式推展到所有的圓內接四邊形, 得到猜測: 對於圓的任意內接四邊形, 恆有兩條對角線之乘積等於兩雙對邊乘積之和。

這個探索過程好比是從海上冰山的一角, 發現整座冰山; 由特殊飛躍到普遍, 以有涯逐無涯; 從顯在的線索追尋出潛在的眞相; 從而形成了數學的發現之旅。這個過程通常是苦樂參半, 失敗與成功並存。

## 二. 猜測的檢驗與證明

當我們得到一個數學猜測後, 接著會進一步用一些特例加以檢驗 (test) 或乾脆就去證明它。

### 甲. 檢驗

在坐標方格紙上作出兩個圓與圓內接四邊形。在圖17中, $\overline{AB}=5\sqrt{2}$, $\overline{BC}=\sqrt{26}$, $\overline{CD}=\sqrt{26}$, $\overline{AD}=\sqrt{2}$, $\overline{AC}=6$, $\overline{BD}=\sqrt{52}$; 在圖18中, $\overline{AB}=2\sqrt{17}$, $\overline{BC}=2$, $\overline{CD}=3\sqrt{2}$, $\overline{AD}=\sqrt{34}$, $\overline{AC}=8$, $\overline{BD}=\sqrt{34}$; 我們驗知上述猜測是成立的。

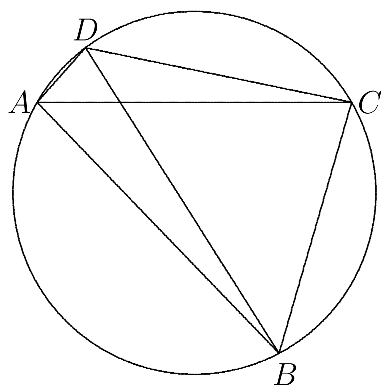



圖17

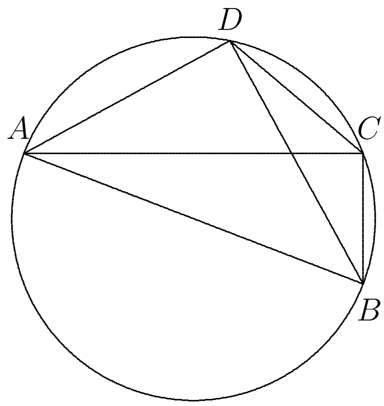



圖18

要找到反例似乎是不容易, 那麼我們就嘗試證明吧。

## 乙. 證明

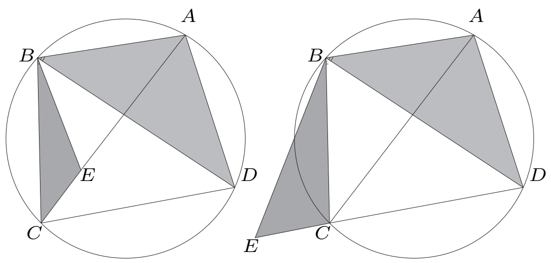



圖19

在圖19的左圖, 作 $\overline{BE}$ 線段, 交 $\overline{AC}$ 於 $E$ 點, 並且使得 $\angle CBE=\angle DBA$, 則 $\Delta BCE\sim\Delta BDA$。於是

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$$

$$\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{CE}\cdot\overline{BD} \tag{17}$$

又 $\Delta ABE\sim\Delta DBC$, 所以

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EA}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{BD}\cdot\overline{EA} \tag{18}$$

(17)+(18) 得到

$$\begin{aligned}&\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}\\=&\overline{BD}\cdot(\overline{AE}+\overline{CE})=\overline{BD}\cdot\overline{AC}\end{aligned}$$

這就證明了猜測, 從而建立定理2之托勒密定理。

註: $\overline{BE}$ 之補助線, 堪稱爲「定乾坤」一線, 精巧美妙。另外, 我們也可以如圖19的右圖向外作 $\overline{BE}$, 交 $\overline{DC}$ 的延長線於 $E$ 點, 並且使得 $\angle EBC=\angle DBA$。然後, 透過 $\Delta BEC\sim\Delta BDA$ 與 $\Delta BED\sim\Delta BCA$, 證得托勒密定理。

托勒密定理除了上述綜合幾何的證法之外, 還有其它證法, 例如複數法、反演變換法 (method of inversion)、Simpson定理加上交叉比 (Cross-ratio) 定理等等, 都各有千秋。例如綜合幾何法簡潔如手工藝, 反演變換法威力強大似機器文明。

# 三. 極端化與推廣

我們都知道, 直線與圓屬於同一家族, 即圓的家族。今想像圓的半徑 $r\to\infty$, 那麼圓就變成直線並且圓的內接四邊形 ABCD 就變成直線上按序的四點 $A$、$B$、$C$、$D$、見圖20。此時, 托勒密定理的結果仍然成立, 其證明只是分配律的應用:

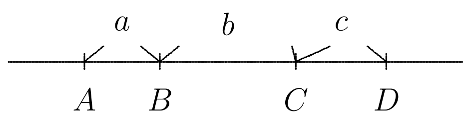



圖20

$$\begin{aligned}&\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}\\=\ &a\cdot c+(a+b+c)\cdot b\\=\ &a\cdot c+b\cdot c+(a\cdot b+b^2)\\=\ &c(a+b)+b(a+b)\\=\ &(a+b)(b+c)=\overline{AC}\cdot\overline{BD}\end{aligned}$$

定理4: (Euler定理) 設 $A$、$B$、$C$、$D$ 爲直線上按序的四點, 則

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD} \tag{19}$$

看過極端化, 接著是推廣。

三角形具有穩固性並且皆內接於一個圓之內, 但四邊形則不然。四邊形欲內接於一個圓之內, 其充要條件是一雙對角互補。

如果 ABCD 爲平面上任意的凸四邊形, 不必內接於一個圓之內, 那麼托勒密定理如何修正呢?

先觀察特例, 如圖21, 考慮由兩個單位正三角形併成的四邊形, 此時顯然有

$$\sqrt{3}\times 1<1\times 1+1\times 1$$

因此, 對於不共圓的四邊形, 我們猜測: 兩條對角線的乘積小於兩雙對邊乘積之和。

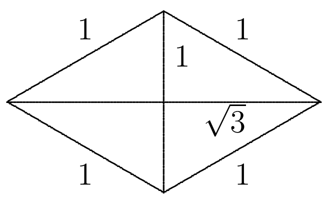



圖21

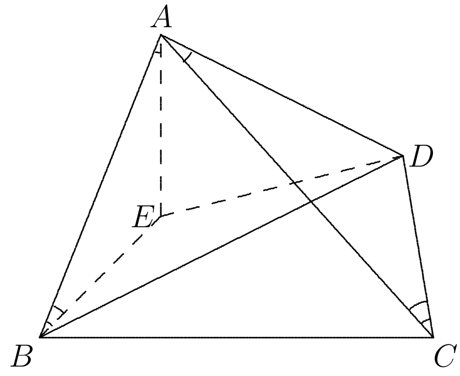



圖22

我們嘗試來證明這個猜測。如圖22, 設 ABCD 爲一般的凸四邊形。作出 $E$ 點, 使得

$$\angle BAE=\angle CAD \text{ 且 } \angle ABE=\angle ACD$$

於是 $\Delta ABE\sim\Delta ACD$, 故

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$$

亦即

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\overline{BE} \tag{20}$$

另外又有

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

並且

$$\angle BAC=\angle EAD$$

所以 $\Delta ABC\sim\Delta ADE$, 於是

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

亦即

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{ED} \tag{21}$$

(20)+(21) 得到

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot(\overline{BE}+\overline{ED})$$

因爲 $\overline{BE}+\overline{ED}\geq\overline{BD}$, 所以

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}\geq\overline{AC}\cdot\overline{BD}$$

並且等號成立的充要條件是 $E$ 落在對角線 $\overline{BD}$ 上, 亦即 $A$, $B$, $C$, $D$ 四點共圓。

定理 5: (推廣的托勒密定理)
設 $ABCD$ 爲平面上任意凸四邊形, 則

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}\le\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC} \quad (22)$$

並且等號成立的充要條件爲 $A$、$B$、$C$、$D$ 四點共圓。

註: 事實上, 上述定理對於平面上任意四邊形都成立, 不必侷限於凸四邊形。另外, 當 $A$、$B$、$C$、$D$ 四點不在同一平面上, 而是在空間的情形, (22) 式仍然成立。

進一步, 對於 (22) 式, 我們可以再精進。我們要探尋不等號兩邊到底相差多少, 最好能夠求出差額的明白表式。

在圖22中, 因爲

$$\angle AEB=\angle D, \quad \angle AED=\angle B$$

所以

$$\angle BED=2\pi-(\angle B+\angle D)$$

對於 $\Delta BDE$ 使用餘弦定律得到

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2&=\overline{BE}^2+\overline{ED}^2\\&\quad-2\overline{BE}\cdot\overline{ED}\cos(\angle BED)\\&=\overline{BE}^2+\overline{ED}^2\\&\quad-2\overline{BE}\cdot\overline{ED}\cos(\angle B+\angle D)\end{aligned}$$

兩邊同乘以 $\overline{AC}^2$, 則有

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2\cdot\overline{BD}^2&=(\overline{AC}\cdot\overline{BE})^2+(\overline{AC}\cdot\overline{ED})^2\\&\quad-2(\overline{AC}\cdot\overline{BE})\\&\quad\cdot(\overline{AC}\cdot\overline{ED})\cos(\angle B+\angle D)\end{aligned} \quad (23)$$

定理6: (強型的推廣之托勒密定理)
設 ABCD 爲平面上之四邊形, 四邊長爲 $a, b, c, d$, 兩條對角線長爲 $x$, $y$, 見圖23, 則

$$x^2y^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(\angle B+\angle D) \quad (24)$$

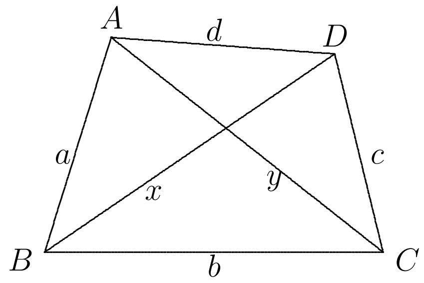



圖23

註: 在 (24) 式中, $\angle B+\angle D$ 表示四邊形一雙對角之和。因爲 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$, 所以 $\cos(\angle B+\angle D)=\cos(\angle A+\angle C)$, 從而 (24) 式中的 $\cos(\angle B+\angle D)$ 可以改成 $\cos(\angle A+\angle C)$。另一方面, 四邊形的面積 $S$ 爲

$$\begin{aligned}S^2&=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\\&\quad-abcd\cos^2(\frac{\angle B+\angle D}{2})\end{aligned}$$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$。

(24) 式多麼像三角形的餘弦定律! 美中不足的是, 當 $D$ 點趨近於 $C$ 點, 四邊形 $ABCD$ 退化爲三角形 $ABC$ 時, (24) 式無法化約爲餘弦定律。

上述定理6含納先前所有的結果, 包括推廣的托勒密定理, 托勒密定理, 餘弦定律, 三角學的和角公式與差角公式, Euler 定理, 畢氏定理等等, 內容眞豐富。因此, 定理6堪稱爲平面幾何學的一個絕妙結果。

## 四. 托勒密定理的應用

托勒密定理除了內涵豐富之外, 還可以用來建構弦表。最奇特的是, 在1964年幾何學家 Pedoe [2]給出托勒密定理在光學上的一個美妙的應用, 證明 Snell 的折射定律等價於費瑪的最短時間原理。

在此, 值得作個歷史註記, 托勒密最早透過實驗, 研究光的折射現象, 但是他並沒有發現折射定律, 這段有趣的歷史我們留待另文介紹。

大家都知道, 光線在不同密度的兩種介質之間行進 (如空氣與水), 會產生折射現象。Snell (1580-1626) 在1621年發現所走的路徑遵循折射定律 (參見圖24):

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2} \tag{25}$$

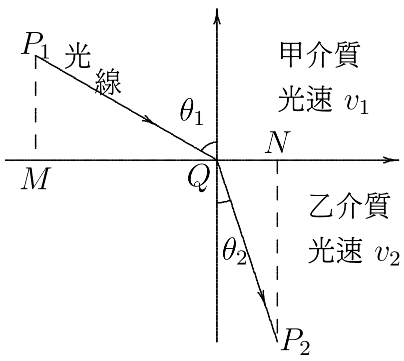



圖24

爲什麼光子會遵循這樣的一條經驗定律呢? 這就需要提出一個「理論」(theory) 來解釋。Fermat (1601-1665) 在1662年提出最短時間原理 (principle of least time): 即光子走的是費時最少的路徑。他利用這個原理與微分法 (雛形), 推導出 Snell 的折射定律。因此, 折射定律就有了「更上一層樓」的理論基礎。

### 甲. 微分法

如圖24, 設 $\overline{P_1M}=a$, $\overline{P_2N}=b$, $\overline{MN}=c$, $\overline{MQ}=x$, 則光沿 $P_1\to Q\to P_2$ 走所費的時間爲

$$T(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\sqrt{\frac{b^2+(c-x)^2}{v_2}}$$

於是

$$\begin{aligned}T'(x)&=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}\\&=\frac{\sin\theta_1}{v_1}-\frac{\sin\theta_2}{v_2}\end{aligned}$$

容易驗知 $T'(x)=0$, 即

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

就是 $T(x)$ 的最小值。

Beckenbach 與 Bellman 在參考文獻 [3]裡說, 欲求 $T(x)$ 的最小值, 利用微分法很容易解決, 但卻無法用初等的不等式得到。

### 乙. 幾何論證法

下面我們就利用托勒密定理來證明: Fermat 的最短時間原理等價於 Snell 射定律。

如圖25, 假設 $L$ 爲兩介質的界線, 通過 $P_1$, $Q^*$, $P_2$ 三點作一圓, 半徑爲 $R$。再過 $Q^*$ 點作一直線垂直於 $L$, 交圓周於 $A$ 點。令 $Q$ 爲在直線 $L$ 上變動的點。

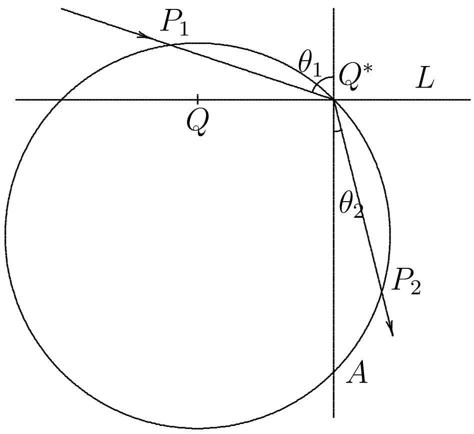



圖25

再假設 $P_1 \to Q^* \to P_2$ 爲光子實際所走的路徑, 即滿足折射定律

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2} = k \tag{26}$$

之路徑, 並且令

$$T_{Q^*} = \frac{\overline{P_1Q^*}}{v_1} + \frac{\overline{Q^*P_2}}{v_1}$$

爲所費的時間; 而走 $P_1 \to Q \to P_2$ 之路所費的時間爲

$$T_Q = \frac{\overline{P_1Q}}{v_1} + \frac{\overline{QP_2}}{v_2}$$

我們要證明: $T_Q \geq T_{Q^*}$, 並且等號成立的充要條件是 $Q = Q^*$。

在圓內接四邊形 $P_1Q^*P_2A$中, 由托勒密定理知

$$\overline{P_1P_2} \cdot \overline{AQ^*} = \overline{P_1Q^*} \cdot \overline{P_2A} + \overline{Q^*P_2} \cdot \overline{P_1A} \tag{27}$$

另一方面, 對於四邊形 $P_1A^*P_2Q$, 由推廣的托勒密定理知

$$\overline{P_1P_2} \cdot \overline{AQ} \leq \overline{P_1Q} \cdot \overline{P_2A} + \overline{QP_2} \cdot \overline{P_1A} \tag{28}$$

並且等號成立的充要條件爲 $Q = Q^*$。

根據正弦定律與 (26) 式知

$$\overline{P_1A} = 2R\sin(\pi - \theta_1) = 2R\sin\theta_1 = 2kRv_1$$

$$\overline{P_2A} = 2R\sin\theta_2 = 2kRv_2$$

代入 (27) 與 (28) 兩式, 得到

$$\overline{P_1P_2} \cdot \overline{AQ^*} = 2kRv_1v_2T_{Q^*}$$

$$\overline{P_1P_2} \cdot \overline{AQ} \leq 2kRv_1v_2T_Q$$

今因 $\overline{AQ} \geq \overline{AQ^*}$, 所以 $\overline{P_1P_2} \cdot \overline{AQ} \geq \overline{P_1P_2} \cdot \overline{AQ^*}$。從而 $\overline{T_Q} \geq T_{Q^*}$。換言之, 最短時間路徑與 Snell 折射定律之徑合而爲一。

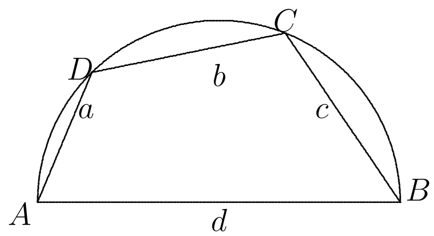



圖26

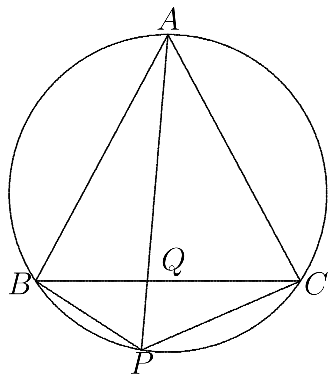



圖27

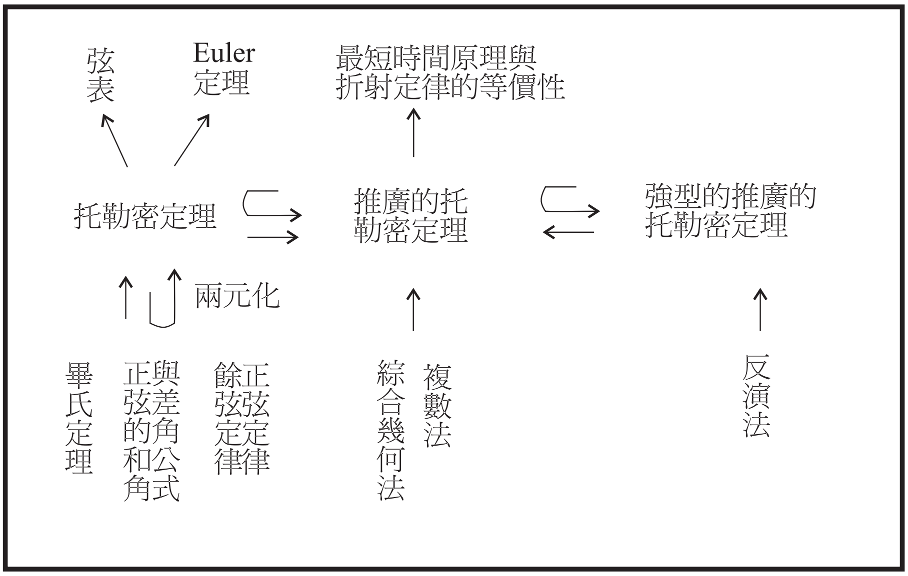
習題1: (1992年大學聯考自然組試題)

如圖 26, 四邊形 ABCD 內接於半圓內, $\overline{AB} = d$ 爲直徑, 試證 $d$ 爲方程式 $x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0$ 之一根。

習題2: 如圖27, 設 $\Delta ABC$ 爲圓的內接正三角形, 在圓弧 $\overparen{BC}$ 上任取一點 $P$, 連結 $\overline{PA}$ 交 $\overline{BC}$ 於 $Q$ 點, 試證: (i) $\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{PC}$, (ii) $\frac{1}{PQ}=\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}$。

## 五. 邏輯網路

我們將本文的結果整理成如下的邏輯理路:




這個網路讓我們對全局的概況與知識發展的理路有清晰的圖像 (picture), 它還可以繼續不斷延拓生長。

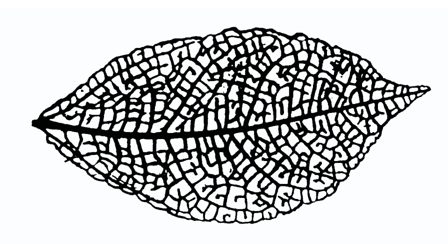


圖28

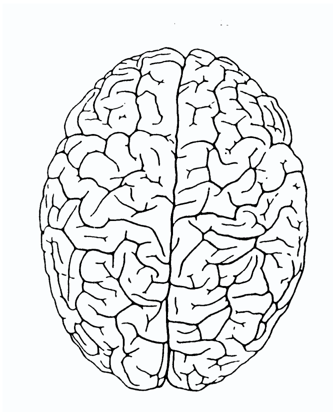


圖29

圖28是從大自然拾取的一個葉片, 而圖29是高斯 (Gauss, 1777-1855) 的大腦, 它

們所展現的紋理相像於上表之邏輯網路。葉片與大腦的結構精微美妙, 數學的結構亦然! 前兩者是大自然的產物, 後者是人類思想的創造。

生物世界的生長機理和數學的生長理路, 是同曲之下的分工, 合演宇宙的創生交響曲。

## 六. 結語

古希臘人由於天文測量、航海、測圓之需要, 導致弦表的編製, 從而發現美麗的托勒密定理, 再逐步開展出數學的一片小天地, 直接通往幾何學與三角學的核心。

這條路徑的風景秀麗, 處處曲徑通幽, 非常值得中學生到此一遊。

古典的數學在亞歷山卓 (Alexandria) 的星空下, 燦爛地閃耀輝映, 星空多麼希臘!

## 參考資料


1. 蔡聰明, 星空燦爛的數學 (I)—托勒密如何編製弦表? 數學傳, 第二十三卷第二期, 1999。
2. D. Pedoe, A geometric proof of the equivalence of Fermat's principle and Snell's law. American Mathmatical Monthly, Vol. 71, pp.543-544, 1964.
3. E. Beckenbach and R. Bellman, An Introduction to Inequalities, Yale Univ. Press, 1961.
4. H. Eves, An Introduction to the History of Mathematics. The Saunders College Publishing, 1990.
5. S. Sambursky, The Physical World of the Greeks. Princeton University Press, 1956.
6. A. Kantorovich, Scientific Discovery, Logic and Thinking. State University of New York Press; 1993.
7. A. S. Posamentier, Excursions in Advanced Euclidean Geometry. Revised Edition, Addison-Wesley Pubslishing Company, 1979.


—本文作者任教於台灣大學數學系—