函數體上的算術——圓法

許志農

1. 前言與符號定義

古典的華林問題是在研究“每個充分大的正整數是否可表爲某些正整數的 d 次方和”; 而古典的哥德巴赫問題是在探討“每個大於 3 的偶數是否可表爲兩個質數的和; 每個大於 5 的奇數是否可表爲三個質數的和”。至於古典的華林-哥德巴赫問題是在探索“每個充分大的正整數是否可表爲某些質數的 d 次方和”。探討這些問題大致是在研究底下的四個問題:

(1) 充分大到底是多大才辦得到。

(2) 某些到底是多少個才可能。

(3) 表示的方法數是否有公式或者是漸近的公式存在。

(4) 漸近公式的主項與其常數 (奇異級數)。

有關古典華林問題的進展是很快速的, 最新的結果可以參考 Vaughan 的書 [10]的最後一章。至於古典哥德巴赫或華林-哥德巴赫問題的進展較爲遲緩。大概是因爲質數較難掌握及處理的關係。

有關 $d=1$ 的進展如下: 在 1937 年, 蘇聯數學家維諾格拉陀夫 (Vinogradov) 利用圓法證明 “每個充分大的奇數皆可表爲三個質數的和”(稱之爲三質數定理); 在 1974 年, 中國數學家陳景潤利用篩法 (大篩法、小篩法) 證明 “每個充分大的偶數皆可表爲一個奇質數與一個至多兩個奇質數乘積之數的和” (稱之爲 $1+2$ 定理)。無論是三質數定理或者是 $1+2$ 定理, 後續都有許多文章重證或改進原來的證明。

有關 $d\geq 2$ (也就是古典華林-哥德巴赫問題) 的進展, 我所知道的文獻僅有華羅庚著的“堆壘素數論”。事實上, 這本書的主要內容就是在探討華林-哥德巴赫問題, 而且絕大部分的內容都是華羅庚的創作。華羅庚證明了: 當正整數

$$s\geq\begin{cases}2^d+1 & 2\leq d\leq 10,\\ 2d^2(2\ln d+\ln\ln d+2.5) & 10<d,\end{cases}$$

時, 每個滿足

$$N\equiv s \pmod K$$

的充分大正整數 N 皆可表爲 s 個質數的 d 次方和, 這裡的 K 是指

$$K=\prod_{(p-1)|d} p^{r_p},$$

其中 p 是質數, $r_2=\theta_2+2, r_p=\theta_p+1 (p\geq 3)$, θ_p 是使得 $p^{\theta_p}|d$ 成立的最大正整數。

中國的數學家王元告訴過我"華羅庚在這個結果所用的不等式是很精湛的, 因此他的結果是很難再給予改進了"。這也是五十年來, 沒有任何有關華林-哥德巴赫問題進展的原因。就是因爲這些與質數相關的圓法之結果很精湛, 所以才引起本人想建立函數體上的這些相關之不等式及探索函數體上的華林-哥德巴赫問題。

爲了方便起見, 我們將所有有關函數體的符號及定義列在本節的最後, 在這裡不再給定符號的說明與定義。所謂多項式華林-哥德巴赫問題是在探討方程式

$$M=r_1P_1^d+r_2P_2^d+\cdots+r_sP_s^d$$

的解 $(P_1,P_2,\ldots,P_s)\in\mathbf{A}^s$ 的個數問題, 這裡要求 $P_1,P_2,\ldots,P_s$ 是首項係數爲 1 且滿足

$$\deg M/d\leq\deg P_i<\deg M/d+1,\qquad (1\leq i\leq s)$$

的質多項式。爲了讓方程式有解, 我們必須對多項式 M 及係數 $r_1,r_2,\ldots,r_s\in\mathbb{F}_q^{\times d}$ 做如下必要的限制

$$\begin{aligned}&r_1+r_2+\cdots+r_s\\ &=M \text{ 的 } d\cdot\lceil\deg M/d\rceil \text{ 次方項的係數。}\end{aligned}\tag{1.1}$$

如果 $M\in\mathbf{A}$ 滿足 (1.1) 的必要限制且令 $G_{z^d,s}(M)$ 爲上述方程式解的個數, 則我們得到: 當 $2\leq d<p$ 且

$$s\geq\begin{cases}2^d+1 & 2\leq d<11,\\ 2d^2(2\ln d+\ln\ln d+2)-4d+2 & \\ & d\geq 11.\end{cases}$$

時, 有一個常數 $\mathcal{S}(M)$ 使得

$$G_{z^d,s}(M)-\frac{q^{N(s-d)}}{N^s}\cdot\mathcal{S}(M)\ll\frac{q^{N(s-d)}}{N^{s+1}},$$

且在 $q>p$ 或 $q=p, d=p-1, M\equiv s \pmod{T^p-T}$ 時, 我們可以證明常數 (奇異級數) $\mathcal{S}(M)>0$。

華林-哥德巴赫問題是屬於圓法的處理模式, 也就是討論單位圓上或單位圓內相關的指數和問題。在 §5 中, 我們要探討一種非歐基里德線上的圓法, 也就是在整個非歐基里德線做積分或是指數和的意思。基本上, 非歐基里德線上的圓法都是在探討一些稠密與逼近的算術問題。

數學符號的定義與縮寫:

$\mathbb{F}_q=$ 具有 q 個元數的有限體, 這裡 q 是質數 p 的某次方。

$\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/(p)$。具有 p 個元數的有限體。

$\mathrm{Tr}=$ 由有限體$\mathbb{F}_q$映至有限體 F_p 的跡函數(trace map)。

$\psi(a)=\exp\left(\dfrac{2\pi i\cdot a'}{p}\right)$。這裡$a\in\mathbb{F}_q$,$a'$ 是指滿足$[a']=\mathrm{Tr}a\in\mathbb{F}_p$的任意整數。

$\mathbf{A}=$ 以 $\mathbb{F}_q$ 爲係數, T爲變數的多項式環 $\mathbb{F}_q[T]$。

$\mathbf{A}_+=$ 多項式環$\mathbf{A}$中, 首項係數爲1的

多項式所構成的子集合。

$\mathbf{K}=$ 以$\mathbb{F}_q$爲係數, T爲變數的有理函數體 $\mathbb{F}_q(T)$。

$\mathbf{K}_\infty=\{f=c_dT^d+c_{d-1}T^{d-1}+\cdots \mid c_i\in\mathbb{F}_q, c_d\neq 0, d\in\mathbb{Z}\}$。稱此體爲非歐幾里得線。

$\deg f=d$, 此 f 如上所表示。稱此爲 f 的次數。

$\mathrm{sgn}(f)=c_d$, 此 f 如上所表示。稱此爲 f 的首項係數。

$|f|=q^{\deg f}$, 此 f 如上所表示。稱此爲 f 的絕對值。在此絕對值之下, $\mathbf{K}_\infty$ 剛好是有理函數體 $\mathbb{F}_q(T)$ 的完備體。

$\mathrm{Res}f=c_{-1}$。

$E(f)=\psi(\mathrm{Res}f)$。稱函數$E:\mathbf{K}_\infty\to\mathbb{C}^\times$爲非歐幾里得線 $\mathbf{K}_\infty$ 上的指數函數。

$\mathcal{M}=\{f\in\mathbf{K}_\infty \mid \deg f\leq -1\}$。

$\mu(\mathcal{M})=1$, 這裡的 μ 是指哈爾測度 (Haar Measure)。

$\pi_N=\#\{f\in\mathbf{A}_+ \mid \deg f=N$ 且 f 是一個質多項式$\}$。

2. 多項式上的華羅庚不等式與維諾格拉陀夫不等式

我們都知道: 實數線上的指數和 (或者是三角和) 在解析數論上扮演著極爲重要的角色。因此, 在非歐幾里得線 $\mathbf{K}_\infty$ 上發展相對應的指數和理論可以說是探討函數體上的算術問題之第一步。在本文的前幾節裡, 我們先把焦點放在探索函數體的幾種指數和的問題上。事實上, 我們在這些指數和的問題上得到相當有價值的上界, 這使得我們在多項式華林-哥德巴赫問題上得到很好的結果。

2.1 多項式上的華羅庚不等式與華羅庚引理

給定多項式 $Q\in\mathbf{A}_+$ 及以 $\mathbf{A}$ 爲係數的多項式

$$f(x)=a_dx^d+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbf{A}[x].$$

規定指數和 $S(f,Q)$ 及 $W(f,Q)$ 如下:

$$S(f,Q)=\sum_{a\in\mathbf{A},\deg a<\deg Q}E\left(\frac{f(a)}{Q}\right),$$
$$W(f,Q)=\sum_{\substack{a\in\mathbf{A},\deg a<\deg Q\\(a,Q)=1}}E\left(\frac{f(a)}{Q}\right).$$

在 [4] 的第二節中, 我們得到如下精湛的估計:

定理 2.1. (多項式上的華羅庚不等式)[1]: 對任意的多項式 $Q\in\mathbf{A}_+$ 及多項式 f 如上。若 f 滿足 $1\leq\deg f=d<p$ 及 $(a_d,\ldots,a_1,Q)=1$, 則我們有

$$S(f,Q)\ll|Q|^{1-\frac{1}{d}},$$
$$W(f,Q)\ll|Q|^{1-\frac{1}{d}},$$

這裡的維諾格拉陀夫常數 $\ll$ 僅與多項式 f 的次數 d 及有限體的個數 q 有關。

1. 有關詳細證明請參考 [4]定理 2.1 及引理 2.5。

有關這個定理的證明, 我們從 Q 是一個質多項式的次方開始著手。這時的情形, 需要用到佈於有限體的代數曲線之黎曼假設 (也就是威伊 (A. Weil) 的結果)。事實上, 當 $Q=P^N$ 時 ($P\in\mathbf{A}_+$ 是一個質多項式), 我們得到如下更精確的不等式: 如果 $|P|\geq 2^d$ 或者 $a_d\in\mathbb{F}_q^\times$ 且 $a_1=a_2=\cdots=a_{d-1}=0$ 時, 我們有

$$\begin{aligned}&|S(f,P^N)|\\&\leq\max\{1,d|P|^{1/d-1/2}\}|P|^{N(1-1/d)},\\&|W(f,P^N)|\\&\leq\max\{1,d|P|^{1/d-1/2}\}|P|^{N(1-1/d)}.\end{aligned}$$

接下來, 我們來考慮非歐幾里得線 $\mathbf{K}_\infty$ 上的一個積分不等式。如果給定以 $\mathbf{K}_\infty$ 爲係數的多項式 $g(z)\in\mathbf{K}_\infty[z]$, 我們定義此多項式的外爾和 (polynomial Weyl sum) $S(g,N)$ 爲

$$S(g,N)=\sum_{b\in\mathbf{A}_+,\deg b=N}E(g(b)).$$

有關多項式外爾和的初步的結果爲

定理2.2 (多項式上的華羅庚引理)[2]: 若多項式 f (如上) 滿足 $1\leq\deg f=d<p$ 及 $(a_d,\ldots,a_1,a_0)=1$, 則當 $1\leq v\leq d$ 時, 我們有

$$\int_{\mathcal{M}}|S(\alpha\cdot f,N)|^{2^v}d\alpha\ll q^{N(2^v-v)}N^{C_2},\tag{2.1}$$

這裡的維諾格拉陀夫常數 $\ll$ 僅與 $D,v,d,$ 及 q 有關; 而常數 C_2 與 $v,d,$ 及 q 有關, 其中 $D=\max\{\deg a_d,\ldots,\deg a_0\}$。換句話說, 方程式

$$\begin{aligned}&f(x_1)+\cdots+f(x_{2^{v-1}})\\&=f(y_1)+\cdots+f(y_{2^{v-1}})\end{aligned}$$

在

$$x_i,y_i\in\mathbf{A}_+,\deg x_i=\deg y_i=N$$

的條件之下的解個數是 $\ll q^{N(2^v-v)}N^{C_2}$。

2.2. 多項式的維諾格拉陀夫不等式

在定理 2.2 中, 我們僅得到 2^v 次方的多項式外爾和之估計。顯然的, 這在應用上有很大的限制及不方便, 所以發展較好用的外爾和估計是有其必要的。這就是本小節所要敍述的定理。

定理2.3 (多項式上的維諾格拉陀夫不等式)[3]: 給定多項式 $f(x)\in\mathbf{A}[x]$ 及正整數 l。若 f 滿足 $1\leq\deg f=d<p$, 則我們有

$$\int_{\mathcal{M}}|S(\alpha\cdot f,N)|^{2s}d\alpha\ll q^{N(2s-d+\delta)},$$

這裡 $s=dl, 2\delta=d^2(1-1/d)^l$; 而且維諾格拉陀夫常數 $\ll$ 僅與 d,l 及 q 有關。

顯然, 維諾格拉陀夫不等式比華羅庚引理好用, 但是當 $\deg f=d$ 值較小的時候, 華羅庚引理的估計卻比維諾格拉陀夫不等式來得好。因此, 華羅庚引理與維諾格拉陀夫不等式是不能互相取代的。

2.3. 以質多項式為變數的外爾和

2. 有關詳細證明請參考 [4]定理 4.2。
3. 有關詳細證明請參考 [4]定理 5.4。

與質多項式相關的算術問題常常需要用到以質多項式爲變數的外爾和估計。因此在這子節裡我們探討以質多項式爲變數的指數和估計問題。設 $f(z) \in \mathbf{K}_\infty[z]$ 是一個首項係數爲 $\alpha \in \mathbf{K}_\infty$, 次數爲 $\deg d \geq 1$ 的多項式。我們定義以質多項式爲變數的外爾和 $S'(f,N)$ 爲

$$S'(f,N) = \sum_{\deg P = N}{}' E(f(P)),$$

這裡的求和 $\sum'$ 是針對所有首項係數爲 1 的質多項式而言。

定理 2.4[4]: 設 $d = 1$ 且 $\alpha = a/Q$, 其中 $Q \in \mathbf{A}_+, a \in \mathbf{A}$ 滿足 $(a,Q) = 1$。我們有

$$|S'(f,N)| << \frac{\max\{1, \ln \deg Q\}}{N \cdot q^{\frac{\deg Q}{2}}} \cdot \left(q^N + q^{\frac{N}{2} + \deg Q} \cdot \deg Q\right),$$

這裡的維諾格拉陀夫常數 $\ll$ 僅與 q 有關。

在定理 2.4 中, α 要求爲 a/Q 的形式。事實上, 我們很容易由此推得 $\alpha \in \mathbf{K}_\infty$ 的一般結果。這些結果可以參考 [2]推論 3.4 及 3.5。又在定理 2.4 中, 當 $\deg Q \geq (2N)/3$ 時, $S'(f,N)$ 的估計是不好的。這時, 我們需要底下的估計作爲補助。

定理 2.5: Vino22[5] 設 $d = 1$ 且 $\deg \alpha = -N + m$ (此時 $\alpha \in \mathbf{K}_\infty$ 就可以), 其中$0 \leq m \leq N/2$。我們有

$$|S'(f,N)| = O(q^{m+N/2}),$$

這裡的維諾格拉陀夫常數 $\ll$ 僅與 q 有關。

定理 2.6[6]: 設 $\sigma_0 \geq 0$ 是一個實數, $2 \leq d < p$ 且 $\alpha = a/Q$, 其中 $Q \in \mathbf{A}_+, a \in \mathbf{A}$ 滿足 $(a,Q) = 1$ 及 $\sigma \ln N \leq \deg Q \leq dN - \sigma \ln N$。那麼當 $\sigma \geq d2^{6d}(\sigma_0 + 1)$時, 我們有

$$| S'(f,N) | \ll \frac{q^N}{N^{\sigma_0}},$$

這裡的維諾格拉陀夫常數 $\ll$ 僅與 d, σ_0 及 q 有關。

定理 2.4 及 2.6 分別就一次及高次的外爾和做估計。在 [2]的第三節裡, 我們針對一次 (線性) 的情形做了很完整且詳細的探索。

3. 外爾不等式與更精密的華羅庚引理

在 §2.3 中, 我們探討了以質多項式爲變數的外爾和問題, 這些不等式是爲了解決與質多項式相關的算術問題 (例如多項式華林-哥德巴赫問題及§5.1與§5.2 所研究的問題)。但是, 大部分的算術問題都是與一般多項式相關的, 所以發展以多項式爲變數的外爾和是基本且必要的。定理 3.1 就是在探索這方面的問題。

定理 3.1[7]: 設 $g(z) = \alpha_d z^d + \cdots + \alpha_1 z \in \mathcal{M}[z]$。若 $2 \leq d = \deg g < p$ 且存在 $Q \in \mathbf{A}_+, h \in \mathbf{A}$ 滿足 $(h,Q) = 1, N < \deg Q \leq (d-1)N$ 及

$$\deg(\alpha_d - h/Q) < -(\deg Q + (d-1)N),$$

4. 有關詳細證明請參考 [2]定理 3.2。
5. 有關詳細證明請參考 [2]定理 3.3。
6. 有關詳細證明請參考 [4]定理 11.8。

則我們有

$$S(g,N)=\sum_{z\in\mathbf{A}_+,\deg z=N}E(g(z)) \ll q^{N(1-1/\sigma_d)},$$

這裡

$$\sigma_d=\begin{cases}2^{d-1}+1 & \text{if } 2\le d<13,\\ 2d^2(2\ln d+\ln\ln d+3) & \text{if } 13\le d,\end{cases}$$

且維諾格拉陀夫常數 $\ll$ 僅與 d 及 q 有關。

在第2節裡, 我們發展了多種的指數和不等式。綜合這些結果, 我們可以得到更精密的華羅庚引理如下:

定理3.2[8]: 給定多項式 $f(x)=a_dx^d+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbf{A}[x]$。若 $d=\deg f\ge 2,(a_d,\ldots,a_1)=1$ 且

$$s\ge\begin{cases}d^2(d-2)+6 \quad \text{if } 2\le d<9,\\ d^2(2\ln d+\ln\ln d+2)-2d\\ \text{if } 9\le d,\end{cases}$$

則我們有

$$\int_{\mathcal{M}}|S(\alpha f,N)|^{2s}d\alpha\ll q^{N(2s-d)},$$

這裡的維諾格拉陀夫常數 $\ll$ 僅與 d,s,D 及 q 有關。

4. 多項式華林-哥德巴赫問題

在這一節中, 我們將探討多項式華林-哥德巴赫問題的解之漸近公式, 及其漸近公式的常數 (稱爲多項式華林-哥德巴赫奇異級數)。漸近公式的獲得是將多項式的單位圓 $\mathcal{M}$ 分割成優弧及劣弧所產生的; 而如何去證明所產生的奇異級數爲正實數則是另一個棘手的問題。

在這節中, 設多項式 $f(z)=a_dz^d+\cdots+a_1z\in\mathbf{A}[z]$ 滿足:f 的係數是互質的且

$$2\le d=\deg f<p, f(0)=0.$$

4.1. 多項式華林-哥德巴赫奇異級數

設 s 是一個正整數且係數$r_1,r_2,\ldots,r_s\in\mathbb{F}_q^{\times d}$。對任意的多項式 $M\in\mathbf{A}$, 多項式華林-哥德巴赫奇異級數 $\mathcal{S}(M)$ 定爲

$$\mathcal{S}(M)=\sum_{Q\in\mathbf{A}_+}\sum_{\substack{h\in\mathbf{A},(h,Q)=1\\ \deg h<\deg Q}}\frac{\prod_{i=1}^{s}W(hr_if,Q)}{\Phi^s(Q)}\cdot E\left(-\frac{hM}{Q}\right)=\prod_{P}\mathcal{S}_P(M),$$

乘積中的 P 是針對所有首項係數爲 1 的質多項式而言, 而且

$$\mathcal{S}_P(M)=1+\sum_{N=1}^{\infty}\sum_{\substack{h\in\mathbf{A},P\nmid h\\ \deg h<N\deg P}}\frac{\prod_{i=1}^{s}W(hr_if,P^N)}{\Phi^s(P^N)}\cdot E\left(-\frac{hM}{P^N}\right).$$

7. 有關詳細證明請參考 [4]推論 6.2。
8. 有關詳細證明請參考 [4]定理 7.5。

爲了證得 $\mathcal{S}_P(M)>0$, 我們定義 $X_s(M,P)$ 爲方程式

$$r_1z_1^d+\cdots+r_sz_s^d\equiv M \pmod P$$

在 $z_1,z_2,\ldots,z_s\in\mathbf{A}, z_i\neq 0, \deg z_i<\deg P$ 的條件下解的個數。

引理 4.1[9]: 設 $\mathbb{F}_p^{\times d}\neq\{1\}$, 也就是說 $2\leq d<p-1$。如果 $s\geq 3d$, 則對所有的質多項式 P 及多項式 M, 我們有 $X_s(M,P)>0$。

引理 4.2[10]: 設 $\mathbb{F}_p^{\times d}=\{1\}$, 也就是說 $2\leq d=p-1$。對所有的質多項式 P 及多項式 M, 我們有

(a) 若 $q\geq p^4$ 且 $s\geq d+1$, 則 $X_s(M,P)>0$。

(b) 若 $q=p^2$ 且 $s\geq 2d+1$, 則 $X_s(M,P)>0$。

(c) 若 $q=p^3, p\geq 5$ 且 $s\geq(d+1)(d+2)/2$, 則 $X_s(M,P)>0$。

(d) 若 $q=p^3, p=3$ 且 $s\geq 3$, 則 $X_s(M,P)>0$。

(e) 若 $q=p$,

$$s\geq\begin{cases}(d+1)(d+2)/2 & p\geq 5,\\ 3 & p=3,\end{cases}$$

且

$$M\equiv s \pmod{T^p-T},$$

則 $X_s(M,P)>0$。

我們有

定理 4.1: 設 $f(z)=z^d$ 且當 $q=p$ 時, 規定 M 必須滿足 $M\equiv s \pmod{T^p-T}$。若

$$s\geq\begin{cases}3d & 2\leq d<p-1,\\ \frac{(d+1)(d+2)}{2} & d=p-1, p\geq 5,\\ 3 & d=p-1, p=3,\end{cases}$$

則 $\mathcal{S}(M)>0$。

4.2. 多項式華林-哥德巴赫問題

設多項式 $M\in\mathbf{A}$ 滿足

$$\begin{aligned}&\operatorname{sgn} a_d\cdot(r_1+r_2+\cdots+r_s)\\ &=M \text{ 的 } d\cdot\lceil\deg M/d\rceil \text{ 次方項的係數;}\end{aligned}$$

令 $G_{f,s}(M)$ 爲方程式

$$M=r_1f(P_1)+\cdots+r_sf(P_s)$$

在下列條件之下的解 $(P_1,\ldots,P_s)$ 之個數: $P_1,\ldots,P_s$ 爲首項係數爲 1 且滿足

$$\begin{aligned}&(\deg M-\deg a_d)/d\\ &\leq\deg P_i\\ &<(\deg M-\deg a_d)/d+1\end{aligned}$$

的質多項式。

我們得到多項式華林-哥德巴赫問題的漸近公式爲

定理 4.2[11]: 如果

$$s\geq\begin{cases}2^d+1 & 2\leq d<11,\\ 2d^2(2\ln d+\ln\ln d+2)-4d+2 & d\geq 11,\end{cases}$$

9. 有關詳細證明請參考 [4]引理 9.3。
10. 有關詳細證明請參考 [4]引理 9.4。
11. 有關詳細證明請參考 [4]引理 10.1。

則當 $s_1 > s$ 時, 我們有

$$G_{f,s}(M) - \frac{q^{N(s-d)}}{|a_d| \cdot N^s} \cdot \mathcal{S}(M) \ll \frac{q^{N(s-d)}}{N^{s_1}},$$

這裡的維諾格拉陀夫常數 $\ll$ 僅與 d, D, s, s_1 及 q 有關。

當多項式 $f(z) = z^d$, 我們得到

定理4.3[12]: 設 $f(z) = z^d$ 且當 $q = p, d = p-1$ 時, 規定 M 必須滿足 $M \equiv s \pmod{T^p - T}$。若

$$s \geq \begin{cases} 2^d + 1 & 2 \leq d < 11, \\ 2d^2(2\ln d + \ln\ln d + 2) - 4d + 2 & \\ \qquad d \geq 11, & \end{cases}$$

則當 $s_1 > s$ 時, 我們有 $\mathcal{S}(M) > 0$ 及

$$G_{z^d,s}(M) - \frac{q^{N(s-d)}}{N^s} \cdot \mathcal{S}(M) \ll \frac{q^{N(s-d)}}{N^{s_1}},$$

這裡的維諾格拉陀夫常數 $\ll$ 僅與 d, s, s_1 及 q 有關。

5. 非歐基里德線上的圓法

無論是華林問題或是華林-哥德巴赫問題都是屬於圓法的處理模式, 也就是討論單位圓上或單位圓內相關的指數和問題。在本節中, 我們要探討一種非歐基里德線上的圓法, 也就是在整個非歐基里德線做積分或是指數和的意思。基本上, 非歐基里德線上的圓法都是在探討一些稠密與逼近的算術問題, 我們分成一次與高次逼近個別討論。

5.1. 一次的質多項式逼近法

一次逼近最有名的問題是貝克所證明的一個問題: 設 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是三個非 0 且不同時爲正或爲負的實數。若三實數

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$$

至少有一個是無理數, 則集合

$$\{\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 \mid p_1, p_2, p_3 \text{ 是質數}\}$$

會稠密於整條實數線 (dense in the real line)。

在非歐基里德線上, 利用定理 2.4 及定理 2.5, 我們證明了

定理5.1[13]: 設 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是非歐基里德線 $\mathbf{K}_\infty$ 上三個非 0 的元素。若 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 滿足

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn}(\lambda_1) + \operatorname{sgn}(\lambda_2) + \operatorname{sgn}(\lambda_3) \\ &= 0 \text{ 且 } \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbf{K}, \end{aligned}$$

則集合

$$\{\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 | p_1, p_2, p_3 \text{ 是質多項式}\}$$

會稠密於整個非歐基里德線上。

5.2. 高次的質多項式逼近法

高次逼近有名的問題是達文波特 (Davenport)、海爾布倫 (Heilbronn) 及後來的 Ramachandra 所證明的一個問題: 設 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_K$ 是 K 個非 0 且不同時爲正或爲負的實數。若 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ 是一個無理數, 則當

$$K \geq \begin{cases} 2^k + 1 & 1 \leq k \leq 11, \\ 2[2k^2 \ln k + k^2 \ln\ln k + 2.5k^2] - 1 & \\ \qquad 12 \leq k & \end{cases}$$

12. 有關詳細證明請參考 [4]引理 10.1。
13. 有關詳細證明請參考 [2]定理 2.1。

時, 集合

$$\{\lambda_1 p_1^k + \lambda_2 p_2^k + \cdots + \lambda_K p_K^k \mid p_1, p_2, \ldots, p_K \text{ 是質數}\}$$

會稠密於整條實數線 (dense in the real line)。

在非歐基里德線上, 利用定理 vinthm, 我們證明了

定理 5.2[14]: 設 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_D$ 是非歐基里德線 $\mathbf{K}_\infty$ 上 D 個非 0 的元素。若 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_D$ 滿足

$$\operatorname{sgn}(\lambda_1) + \operatorname{sgn}(\lambda_2) + \cdots + \operatorname{sgn}(\lambda_D) = 0 \text{ 且 } \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbf{K},$$

則當

$$D \geq \begin{cases} 2^d + 1 & 1 \leq d < 11, \\ 2[2d^2 \ln d + d^2 \ln\ln d + 2d^2 - 2d] + 1 & 11 \leq d \end{cases}$$

時, 集合

$$\{\lambda_1 p_1^d + \lambda_2 p_2^d + \cdots + \lambda_D p_K^d \mid p_1, p_2, p_3, \ldots, p_D \text{ 是質多項式}\}$$

會稠密於整個非歐基里德線上。

參考文獻

1. 許志農, The Distribution of Irreducible Polynomials in $\mathbb{F}_q[t]$, Journal of Number Theory, 61 (1996), 85-96.
2. 許志農, Diophantine Inequalities for Polynomial Rings, Journal of Number Theory, 78 (1999), 46-61.
3. 許志農, On Hardy-Littlewood method for non-Archimedean line, preprint.
4. 許志農, On Polynomial Waring-Goldbach Problem, preprint.
5. 華羅庚, 堆壘素數論, 亞東書局, 民國八十一年一版。
6. G. W. Effinger and D. R. Hayes, *Additive Number Theory of Polynomials Over a Finite Field*, Oxford, Clarendon Press (1991).
7. D. R. Hayes, The expression of a polynomial as the sum of three irreducibles, *Acta Arith.* 11 (1966), 461-488.
8. R. Lidl and H. Niederreiter, *Finite Fields*, Cambridge University Press (1997).
9. S. A. Stepanow, *Arithmetic of Algebraic Curves*, Translated from Russian by Irene Aleksanova, Consultants Bureau, New York (1994).
10. R. C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood method*, Cambridge University Press (1997) .

—本文作者任教於國立台灣師範大學數學系—

14. 有關詳細證明請參考 [3]定理 2.1。