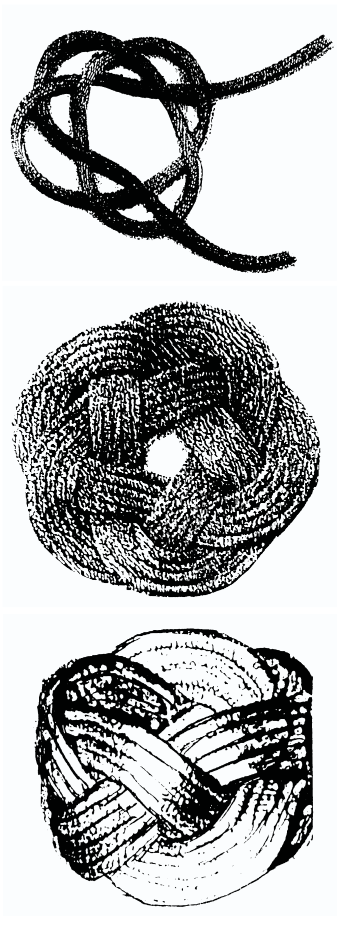
把“雙錢結”一般化

徐道寧

“一般化”是數學裡常用的一種方式, 經一般化後, 原有的就成了其中的一種特殊情形或是特例, 總之是可以包括到裡面去的。“雙錢結”是中國結中非常基本的一種, 可加以種種的組合做出結形美麗的裝飾結或飾物來。怎麼能把一種結加以一般化呢? 這是最近打結打出來的一點心得。

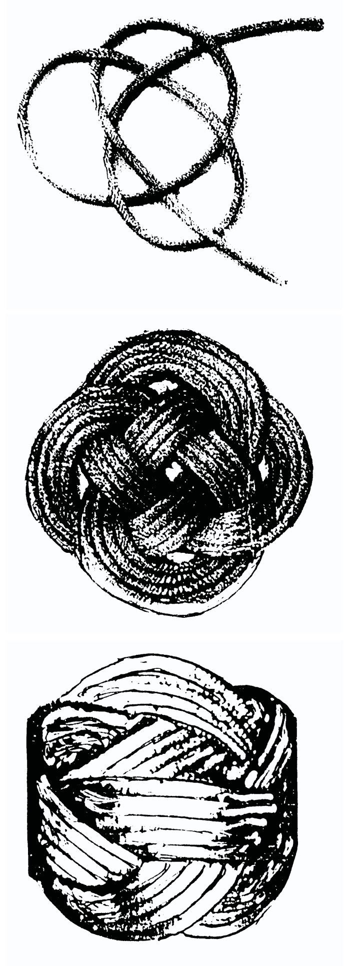
西洋結藝有一種結叫做 “土耳其頭” (Turk's head, 土耳其人的頭) 結, 用來做實用的器物。做法是在一個結打成後, 把線 (或其他細長而有柔性的材料) 的一端塞進另一端線出來的地方, 逆向循原來的路線再走一次, 變成兩股並立所形成而得第二層, 繼續同樣的步驟可得第三層等等。右圖 (圖一) 上方是打成後的結, 中間是打了五層的平面形, 下方是打了五層的柱面形。由平面形可以看出, 打成後像是有五個花瓣的樣子。



圖一

雙錢結與這土耳其頭結其實是同一類的結。用上述方法對雙錢結做第二、第三層等等, 同樣可以得到平面或柱面的。圖二上方是打成的雙錢結, 中間是四層的平面形, 下方則是五層的柱面形。由圖看出這結經這種打法後有四個瓣。為配合瓣的說法, 以後把這類的結稱做“花”。雙錢結是個四瓣花, 土耳其

頭結是個五瓣花。



圖二

雙錢結很容易打, 打出來的是平面的。但結形成了後用手捏一下就可以改成爲柱面 (兩者拓樸性質相同)。土耳其頭結則最好是先打成柱面的, 要平面時就攤平而得到平面。打法是先把線繞兩圈, 然後繞第三圈, 一面繞一面編辮子, 抽出線頭來就打成了。由於開始編辮子時, 線頭與另二圈的相對位置有各種可能, 打出來的就有這四瓣與五瓣的差別。若把辮子繼續編下去, 則由四瓣的可得七瓣, 由五瓣的可得八瓣。這步驟仍可繼續, 所以凡 $n=4+3i$, $i=0,1,2,\ldots$, 或是 $n=5+3i$, $i=0,1,\ldots$, n 瓣的花都可以打出來 (至少理論上如此。即使 n 大到實際上難以處理, 由數學觀點看來仍是一樣的)。用同餘的講法, 上述的 n 合於

$$n \not\equiv 0 \pmod 3$$

的條件, 而除了1與2外, 凡合上列條件的 n, 都能用這種繞三圈的方法打出 n 瓣的花來 (對任一大於1的整數 m, a, b 二整數模 m 同餘的意義是有一個整數 k 使 $a-b=km$, 用 $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$ 表出)。但實際情形打結時, 必須有線與線相遇的地方, 而這類的花必須編織出一片面 (平面或柱面) 來, 所以 $n=1$ 與 $n=2$ 都不合打花的條件, 因而須添加 $n>2$ 這個條件。由實際可以打出結來, 知道對模3不與0同餘, 而大於2的 n, n 瓣花都存在。這有相當多的 n, 但仍有同樣多的 n (同是可數無限多) 不包括在內。對這些 n, 也就是3的倍數, 是不是要用別的方法來打 n 瓣花, 還是根本不能打 (不存在)? 要一般化, 也許還須作其他的調整?

爲了便於一般化, 先定一個名稱。知道 n 瓣花在 n 不是3的倍數 (包括3本身) 時存在, 是由於實地用線三圈編辮子編得的。以後就把這所繞的圈數稱爲花的圈數, 也就是雙錢結是個三圈四瓣花, 土耳其頭結是個三圈五瓣花。由實際所得, 知道在

$$n>2 \text{ 且 } n \not\equiv 0 \pmod 3$$

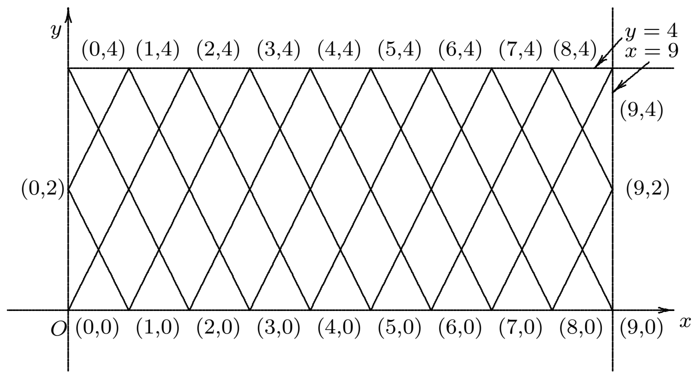
時, 3圈 n 瓣花都存在。其他的 n, 例如3本身或是6, 9之類, 要怎樣處理?

現在出現的數學問題是: 對圈數 m, 瓣數 n, m 圈 n 瓣花能打 (至少理論上) 的必要且充分條件是什麼? 若符合這個條件, 能不能有辦法打出來? 但由實際意義, 知道在 $m=1$ 或 2 時也不能編織, 所以須 $m>2$。

圈數一般化後, 一個 m 圈 n 瓣的花若存在, 則用柱狀來觀察, 它是一個斜向交織的網。若平放在水平的面上, 則柱面的上方有 n 個頂點, 下方也有 n 個頂點, 而上、下之間則有 $m-1$ 排的交點, 每排 n 個。因為成網, 所以在這些交點處, 交叉時哪一方向的線在上或在下, 是相鄰兩排相反, 互相交替的。

柱面上不便處理, 所以把柱面搬到平面上來。設想過一個最低點處, 依鉛直方向把柱面一刀剪斷, 攤平後成一矩形, 可以放到坐標平面的第一象限上, 使斷口在縱軸上, 底邊在橫軸上, 切斷處的最低點就是原點, 其他各最低點則定為 $(1,0),(2,0),\ldots,(n,0)$, 並令最高點的縱坐標為 m。這樣, 原來的網就是 $(0,0)$ 與 $(m/2,m)$ 二點所定的直線及過一切 $(i,0)$ 而與此平行的這組平行線, 與過一切 $(i,0)$ 而以 -2 為斜率的另一組平行線, 在縱橫二軸及 $x=n$, $y=m$ 這四線所圍成的矩形中的那部分, 其中 i 是整數, 而 $x=n$ 上的點因已出現在縱軸上, 所以網中線段上點的橫坐標, 事實上都小於 n, 矩形是只含左方的邊, 不含右方的。這也就是說, 這矩形事實上是個柱形。

反之對任意兩個整數 $m>2$, $n>2$ 及所有的整數 i, 把過點 $(i,0)$ 而以2為斜率及以 -2 為斜率的這樣兩組平行線, 在縱、橫二軸及 $x=n$, $y=m$ 這四線之間的那部分取出來, 所得的就是一個網。由此可知這樣的網是一定可以畫的。現在先用 $m=4$, $n=9$ 作為實例來加以說明, 再觀察一般的情形。



圖三

實地依圖把線的一端固定在 $O(0,0)$ 上, 向上到 $(2,4)$, 折向下到 $(4,0)$, 再折向上到 $(6,4)$。折向下, 到 $(8,0)$, 再折向上到 $(9,2)$。但這網實際上是柱面而不是平面, x 是應該模 $9(n=9)$ 來取的, 所以 $(9,2)$ 事實上是 $(0,2)$; 繼續向上到 $(1,4)$, 向下到 $(3,0),\ldots$, 等等。這樣模9來取 x, 由 $(0,0)$ 點出發後, 最後向上到達 $(7,4)$, 折下

到 $(9,0)$, 也就是回到了 $(0,0)$, 而且到達過每一個 $(i,0)$, $i=0,1,\ldots,8$。由此看來確實可以這樣做得4圈9瓣的花。實際製作時就可以這樣用線繞柱來做, 只要在交點處注意線的上、下方向要各排交替就可以了。所以只要知道 m 圈 n 瓣的花存在, 實地製作並無問題。

上例中若 n 改取6, 則在線到達 $(6,4)$ 後, 也就是回到了 $(0,4)$ 後再折向下到 $(2,0)$, 折向上到 $(4,4)$, 再折向下到 $(6,0)$, 也就是 $(0,0)$, 又回到原出發點了, 不曾到達 $(1,0)$, $(3,0)$, $(5,0)$, 所以不曾繞遍各處, 也就編不出6瓣的花來。所以4圈6瓣的花不存在。

一般情形對任意兩個正整數 $m>2$, $n>2$, 及所有整數 i, 如前所述過點 $(i,0)$, 以2及 -2 爲斜率的這兩組平行線, 在縱、橫兩軸及 $x=n, y=m$ 這四線間形成一個網, 所以對任意的 $m>2, n>2$, 這樣的網是永遠可以畫的, 也一定可以用 m 段編織用的線來實地織出, 並把實物彎成柱面兩端縫合而成一個柱狀網。但這樣的一個網是不是一個 m 圈 n 瓣花? 花是一條線連續繞幾圈打成的, 所以問題在於這網能不能這樣一條線打到底。

編織用的線繞柱形物來編, 就相當於模 n 來取 x。線從 $(0,0)$ 向左上到 $(m/2,m)$, 折向右下到 $(m,0)$, 再向上到 $(3m/2,m)$, 向下到 $(2m,0),\ldots,$ 等等, 直到又回到 $(0,0)$ 爲止。若 m, n 使編織用的線走遍了圖中的各處, 也就是到達了每個交點處, 那就可以對交點處兩次經過的線定好上、下以使成網, 花就可以依此實地編出; 否則就不能成花。所以 m 圈 n 瓣花存在的必要且充分條件是這 $m-1$ 排各 n 個交點全部在所畫的折線上。

上面所說的這些線段, 向右上的含在直線系

$$y=2(x-mi), \quad i \text{ 是整數} \tag{1}$$

中, 向右下的則含在直線系

$$y=-2(x-mi), \quad i \text{ 是整數} \tag{2}$$

中。但交點是由兩線交成的, 所以只要能把一組上的交點全部數得出來, 那就夠了。觀察這些交點, 每個的縱坐標一定都是整數。模 m 取 y 時一共有 m 個整數, 包括0在內。但以0爲縱坐標的點在橫軸上, 正是折線折返處, 而不是交點。由此可知對任一整數 i, 所畫折線含在 (1) 式所表直線裡的每個線段上, 至多只有 $m-1$ 個點可能是交點。想要一共有 $(m-1)n$ 個交點, (1) 式所表的直線系, 至少須有 n 條模 n 不同的直線。

若 m,n 的最大公因數 $(m,n)=d>1$, 即 m 與 n 不互質, 則 m,n 的最小公倍數是 mn/d, 而 $(n/d)\cdot m=(m/d)\cdot n$, 且 $n/d<n$。對 $i=0,1,2,\ldots,n/d-1$, mi 模 n 來取各不相同, 但也只有這 $n/d<n$ 個各不相同。方程式 (1) 所表的直線系中, 模 n 來取只有 n/d 條不同的, 也就是折線中不到 n 段是向右上的, 交點當然不可能有 $(m-1)n$ 個, 因而不能成花。由此證得若 m 圈 n 瓣花存在, 則 m 與 n 必須互質。

若 $(m,n)=1$, 即 m 與 n 互質, 則對 $i=0,1,2,\ldots,n-1$, 模 n 來取 mi, 所得是 n 個模 n 不同的數。這情形

下 (1) 式所表的直線系, 模 n 來取共是 n 條不同的, 所以折線經過每一個 $(j,0)$, 其中 $j=0,1,\ldots,n-1$。對任一這樣的整數 j, 若一點 (a,h) 在直線

$$y=2(x-j)$$

上, 則

$$\begin{aligned} h&=2(a-j)=2a-2j,\\ 2a&=h+2j。\end{aligned}$$

過 (a,h) 而以 -2爲斜率的直線是

$$y-h=-2(x-a)=-2x+2a,$$

也就是

$$\begin{aligned} y-h&=-2x+h+2j,\\ y&=-2x+2h+2j\\ &=-2[x-(h+j)]。\end{aligned}$$

若 h 是整數, 則 $h+j$ 也是整數, 所以一定有一個整數 k, $0\le k<n$, 使

$$h+j\equiv k \pmod n。$$

對這樣的 k, 折線經過 $(k,0)$, 向右上而含在

$$y=-2(x-k)$$

中, 所以若一點在直線系 (1) 中某一線上, 且以整數 h 爲縱坐標, 則除了 $h=0$ 時是折返點外, 其他情形一定是交點。這證明了在 m 與 n 互質時, (1) 式中每一線在 $y=0$ 與 $y=m$ 之間的一段上, 凡以整數 (0與 m 除外) 爲縱坐標的點, 一定是 (1) 系與 (2) 系的一個交點。模 n 來看 x, 這就是折線相交的地方。n 段不同的線段上共有 $(m-1)n$ 個交點, 所以確實可以編出 m 圈 n 瓣的花來。

若要使 x,y 及 m,n 看來較爲對稱, 可以觀察可能是交點的那些點, 橫坐標的情形怎樣。縱坐標是整數的點, 橫坐標有一部分是整數, 另一部分是整數加 $1/2$。把這組線向右 (向左也一樣) 平移 $1/2$, 得到另一組直線 $y=2(x-1/2-mi)$, i 是整數。原來那組線上橫坐標是整數的點, 經平移後都不以整數爲橫坐標了, 而原來不是整數的卻都變成了整數。把這兩系直線合起來, 模 m 取 y, 模 n 取 x, 所有坐標是整數的點, 就相當於原來直線 $y=2(x-j)$, $j=0,1,2,\ldots,n-1$ 上所有縱坐標是整數 (包含0) 的點。前面已證得這些點是否恰有 mn 個不同的, 正就是 m 圈 n 瓣花是否存在的必要且充分條件, 所以也可以轉換成兩系平行線系

$$y=2(x-mi),\quad i \text{ 整數} \tag{1}$$

$$y=2(x-1/2-mi),\quad i \text{ 整數} \tag{2}$$

模 n 來取 x, 模 m 來取 y, 恰有 mn 個格子點 (坐標是整數的點) 的必要且充分條件, 也就是模 n 取 x, 模 m 取 y, 方程組 (1), (2) 恰有 mn 組整數解的必要且充分條件。

方程組 (1), (2) 有 mn 組整數解的必要且充分條件就是 m 與 n 互質, 也就是 m 圈 n 瓣花存在 (且能做得) 的必要且充分條件。雙錢結一般化到對任意一對互質的 m 與 n, 都可以打 m 圈 n 瓣的花。雙錢結本身是個特例, 是 $m=3$, $n=4$ 的情形。本文中所稱的花, 就是一般化了的雙錢結, 或說是廣義的雙錢結[註]。

註: 經查閱資料, 在環結論 (knot theory) 的書籍中, “Turk’s head”結 (中文有譯之爲纏頭結的) 確實包括一切可能的情形, 而且因爲無須作能編出一片面來的要求, 所以2也可以用。但當兩數都大於2時, 則確實能織出一片面來。本文中所稱的圈數, 環結論中稱爲 lead, 瓣數稱爲 bight(不知原來命名的意義, 不敢胡亂給譯名)。中國結中有悠久歷史的雙錢結, 竟然就這樣變成了土耳其人的頭!

—本文作者爲國立清華大學數學系退休教授—